МАТЕМАТИКА

УДК 517.926

МНОГОТОЧЕЧНЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ ОПЕРАТОРЫ: «РАСЩЕПЛЕНИЕ» КРАТНЫХ В ГЛАВНОМ СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЙ

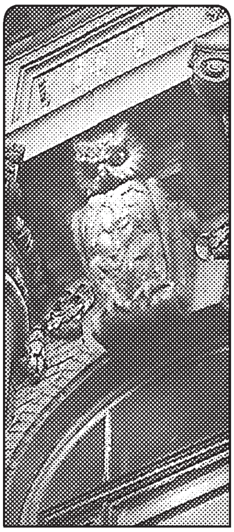
С. И. Митрохин

Митрохин Сергей Иванович, кандидат физико-математических наук, доцент, старший научный сотрудник, Научно-исследовательский вычислительный центр Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова, Россия, 119991, Москва, Ленинские горы, 1, стр. 4, mitrokhin-sergey@yandex.ru

В статье изучается краевая задача для дифференциального оператора восьмого порядка с суммируемым потенциалом. Граничные условия краевой задачи являются многоточечными. Выведено интегральное уравнение для решений дифференциального уравнения, задающего изучаемый дифференциальный оператор. Получены асимптотические формулы и оценки для решений соответствующего дифференциального уравнения при больших значениях спектрального параметра. Изучая граничные условия, выведено уравнение на собственные значения в виде определителя четвёртого порядка. С помощью свойств определителей и асимптотических формул для решений дифференциального уравнения изучается асимптотическое поведение корней уравнения на собственные значения оператора. Коэффициенты граничных условий изучаемой краевой задачи подобраны таким образом, что основное приближение уравнения на собственные значения оператора имеет два корня кратности три. Подробно изучена индикаторная диаграмма уравнения на собственные значения. Изучая один из секторов индикаторной диаграммы, выведена асимптотика собственных значений изучаемого оператора. Показано, что кратные в главном приближении собственные значения «расщепляются» на три однократных серии собственных значений. Аналогичные свойства собственных значений наблюдаются и в остальных секторах индикаторной диаграммы.

Ключевые слова: дифференциальный оператор, спектральный параметр, многоточечные граничные условия, суммируемый потенциал, индикаторная диаграмма, асимптотика собственных значений.

DOI: 10.18500/1816-9791-2017-17-1-5-18



НАУЧНЫЙ ОТДЕЛ

ВВЕДЕНИЕ

Рассмотрим краевую задачу для дифференциального оператора восьмого порядка, задаваемого дифференциальным уравнением вида

$$y^{(8)}(x) + q(x)y(x) = \lambda a^8 y(x), \quad 0 \leqslant x \leqslant \pi, \quad a > 0, \tag{1}$$

с многоточечными граничными условиями:

$$\begin{gathered} y'(0) = y^{(3)}(0) = y^{(5)}(0) = y^{(7)}(0) = 0, \\ y^{(2m-1)}(\pi) = \beta_{2m-1,1} y^{(2m-1)}\left(\frac{\pi}{3}\right) + \beta_{2m-1,2} y^{(2m-1)}\left(\frac{2\pi}{3}\right), \quad m = 1, 2, 3, 4, \\ \beta_{2m-1,1} \in \mathbb{C}, \quad \beta_{2m-1,2} \in \mathbb{C}, \end{gathered} \tag{2}$$

с дополнительным условием на коэффициенты граничных условий:

$$\beta_{11} + \beta_{31} + \beta_{51} + \beta_{71} = 12, \quad \beta_{12} + \beta_{32} + \beta_{52} + \beta_{72} = 0. \tag{3}$$

При этом потенциал $q(x)$ предполагается суммируемой функцией на отрезке $[0;\pi]$:

$$q(x) \in L_1[0;\pi] \Leftrightarrow \left(\int_0^x q(t)dt\right)'_x = q(x) \tag{4}$$

почти всюду на отрезке $[0;\pi]$.

1. ИСТОРИЧЕСКИЙ ОБЗОР

Изучение спектральной теории дифференциальных операторов идет в направлении снижения гладкости коэффициентов дифференциальных уравнений, задающих эти операторы. Сначала коэффициенты (а также и потенциалы) были бесконечно гладкими [1–3]. Затем гладкость коэффициентов постепенно снижалась до одного–двух раз дифференцируемости и до непрерывности [4–6]. Потом коэффициенты дифференциальных уравнений стали кусочно-непрерывными функциями. В работе [7] была изучена сходимость разложений по собственным функциям в точках разрыва коэффициентов дифференциального оператора. В работе [8] были получены регуляризованные следы для дифференциального оператора с разрывными коэффициентами. Обратная спектральная задача с кусочно-гладким потенциалом была решена в работе [9]. Спектральные свойства операторов не только с разрывными коэффициентами, но и с разрывной весовой функцией исследованы автором в работе [10]. В работе [11] приведены примеры изоспектральных операторов с разрывными коэффициентами.

Случай суммируемого потенциала для оператора Штурма – Лиувилля впервые изучен в работах [12, 13]. Была получена асимптотика любого порядка собственных значений и собственных функций для оператора Штурма – Лиувилля с суммируемым потенциалом. Аналогичные результаты для дифференциальных операторов четвертого и шестого порядков получены автором в работах [14, 15]. В работе [16] изучены спектральные свойства оператора 2-го порядка с суммируемым потенциалом и гладкой весовой функцией. Отметим, что с возрастанием порядка оператора сложность выкладок возрастает многократно.

2. АСИМПТОТИКА РЕШЕНИЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ (1) ПРИ $\lambda \to \infty$

Пусть $\lambda = s^8$, $s = \sqrt[8]{\lambda}$, причем зафиксируем ту ветвь арифметического корня 8-й степени, для которой $\sqrt[8]{1} = +1$.

Пусть w_k $(k = 1, 2, \ldots, 8)$ — различные корни 8-й степени из единицы:

$$\begin{gathered} w_k^8 = 1, \quad w_k = e^{\frac{2\pi i}{8}(k-1)}, \quad k = 1, 2, \ldots, 8, \\ w_1 = 1, \quad w_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}(1+i), \quad w_3 = i, \quad w_4 = \frac{\sqrt{2}}{2}(-1+i), \\ w_{n+4} = -w_n, \quad n = 1, 2, 3, 4. \end{gathered} \tag{5}$$

Числа w_k из (5) удовлетворяют следующим соотношениям:

$$\sum_{k=1}^{8} w_k^p = 0, \quad p = 1, 2, \ldots, 7, \qquad \sum_{k=1}^{8} w_k^p = 8, \quad p = 0, \quad p = 8. \tag{6}$$

С помощью метода вариации постоянных доказывается следующая теорема.

Теорема 1. *Решение* $y(x, s)$ *дифференциального уравнения* (1) *является решением интегрального уравнения Вольтерры:*

$$\begin{gathered} y(x, s) = \sum_{k=1}^{8} C_k e^{a w_k s x} - \frac{1}{8a^7 s^7} \sum_{k=1}^{8} w_k e^{a w_k s x} f_k(x, s), \\ f_k(x, s) = \int_0^x q(t) e^{-a w_k s t} y(t, s) dt, \quad k = 1, 2, \ldots, 8. \end{gathered} \tag{7}$$

Проверить справедливость теоремы 1 можно непосредственным образом: по свойству (4) для $f_k(x, s)$ из (7) следует формула

$$(f_k(x, s))'_x = q(x) e^{-a w_k s x} y(x, s).$$

Используя эту формулу, находим $y'(x, s), y''(x, s), \ldots, y^{(8)}(x, s)$ (с использованием свойства (6)), подставляем в уравнение (1), убеждаемся в выполнении верного равенства.

Решая интегральное уравнение (7) методом последовательных приближений Пикара, получаем следующее утверждение.

Теорема 2. *Общее решение дифференциального уравнения* (1) *представляется в виде*

$$y^{(m)}(x, s) = \sum_{k=1}^{8} C_k y_k^{(m)}(x, s), \quad y^{(0)}(x, s) = y(x, s), \quad m = 0, 1, 2, \ldots, 7, \tag{8}$$

где C_k $(k = 1, 2, \ldots, 8)$ — *произвольные постоянные,*

$$y_k(x, s) = e^{a w_k s x} - \frac{A_{7k}^0(x, s)}{8a^7 s^7} + \underline{O}\left(\frac{e^{|\operatorname{Im} s| a x}}{s^{14}}\right), \quad k = \overline{1;8} \quad (k = 1, 2, \ldots, 8); \tag{9}$$

$$y_k^{(m)}(x, s) = (as)^m \left\{ w_k^m e^{a w_k s x} - \frac{A_{7k}^m(x, s)}{8a^7 s^7} + \underline{O}\left(\frac{e^{|\operatorname{Im} s| a x}}{s^{14}}\right) \right\}, \ k = \overline{1;8}, \ m = \overline{1;7}; \tag{10}$$

$$A_{7k}(x,s)=w_1e^{aw_1sx}\int_0^x q(t)e^{a(w_k-w_1)st}dt_{ak1}+w_2e^{aw_2sx}\int_0^x q(t)e^{a(w_k-w_2)st}dt_{ak2}+\dots+$$
$$+w_8e^{aw_8sx}\int_0^x q(t)e^{a(w_k-w_8)st}dt_{ak8},\quad k=\overline{1;8}; \tag{11}$$

$$A^m_{7k}(x,s)=\sum_{p=1}^{8} w_pw_p^m e^{aw_psx}\left(\int_0^x\dots\right)_{akp},\quad k=\overline{1;8},\quad m=\overline{1;7}. \tag{12}$$

При выводе формул (8)–(12) мы считали, что выполняются следующие начальные условия:

$$A^0_{7k}(0,s)=0,\quad A^m_{7k}(0,s)=0,$$
$$y_k(0,s)=1,\quad y_k^{(m)}(0,s)=a^mw_k^ms^m,\quad y(0,s)=\sum_{k=1}^{8}C_k\cdot 1,$$
$$y^{(m)}(0,s)=\sum_{k=1}^{8}C_kw_k^ma^ms^m,\quad k=\overline{1;8},\quad m=\overline{1;7}. \tag{13}$$

Асимптотические оценки формул (9)–(12) получаются аналогично оценкам работ [17, гл. 2; 18, гл. 2; 19].

3. ИССЛЕДОВАНИЕ ГРАНИЧНЫХ УСЛОВИЙ (2)

Применяя формулы (8)–(10), (13), из первых четырех граничных условий (2) находим:

$$y^{(2m-1)}(0)=0,\quad m=1,2,3,4\quad\Leftrightarrow\quad\sum_{k=1}^{8}C_ky_k^{(2m-1)}(0,s)=0\quad\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow\quad\sum_{k=1}^{8}C_kw_k^{2m-1}a^{2m-1}s^{2m-1}=0,\quad m=1,2,3,4.$$

Применяя свойства (5), (6), из этих равенств получаем: $C_{k+4}=C_k$, $k=1,2,3,4$. Поэтому формула (8) принимает следующий вид:

$$y^{(m)}(x,s)=\sum_{k=1}^{4}C_k[y_k^{(m)}(x,s)+y_{k+4}^{(m)}(x,s)],\quad m=\overline{1;7}. \tag{14}$$

Подставляя формулы (14) в последние четыре граничные условия (2), имеем:

$$y^{(2m-1)}(\pi,s)=\beta_{2m-1,1}y^{(2m-1)}\left(\frac{\pi}{3};s\right)+\beta_{2m-1,2}y^{(2m-1)}\left(\frac{2\pi}{3};s\right),\quad m=1,2,3,4\quad\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow\quad\sum_{k=1}^{4}C_k[y_k^{(2m-1)}(\pi,s)+y_{k+4}^{(2m-1)}(\pi,s)]-\beta_{2m-1,1}\left[y_k^{(2m-1)}\left(\frac{\pi}{3},s\right)+y_{k+4}^{(2m-1)}\left(\frac{\pi}{3},s\right)\right]-$$
$$-\beta_{2m-1,2}\left[y_k^{(2m-1)}\left(\frac{2\pi}{3},s\right)+y_{k+4}^{(2m-1)}\left(\frac{2\pi}{3},s\right)\right]=0,\quad m=1,2,3,4. \tag{15}$$

Однородная система (15) (из четырех уравнений с четырьмя неизвестными C_1, C_2, C_3, C_4) имеет ненулевые решения $\left(\sum\limits_{k=1}^{4}C_k^4\neq 0\right)$ только тогда, когда ее определитель равен нулю. Поэтому справедлива следующая теорема.

Теорема 3. *Уравнение на собственные значения дифференциального оператора* (1)–(4) *имеет следующий вид:*

$$g(s) = \|g_{mn}(s)\|_{m,n=1}^{4} = 0, \tag{16}$$

$$g_{mn}(s) = [y_n^{(2m-1)}(\pi, s) + y_{n+4}^{(2m-1)}(\pi, s)] - \beta_{2n-1,1}\left[y_n^{(2m-1)}\left(\frac{\pi}{3}, s\right) + y_{n+4}^{(2m-1)}\left(\frac{\pi}{3}, s\right)\right] -$$
$$-\beta_{2m-1,2}\left[y_n^{(2m-1)}\left(\frac{2\pi}{3}, s\right) + y_{n+4}^{(2m-1)}\left(\frac{2\pi}{3}, s\right)\right], \quad m, n = 1, 2, 3, 4. \tag{17}$$

Применяя формулы (9), (10), разложим по столбцам определитель $f(s)$ из (16), (17) на сумму определителей, преобразуем $g(s)$ к следующему виду:

$$g(s) = g_0(s) - \frac{g_7(s)}{8a^7 s^7} + \underline{O}\left(\frac{1}{s^{14}}\right) = 0; \tag{18}$$

$$g_0(s) = \|g_{nm,0}(s)\|_{n,m=1}^{4},$$
$$g_{nm,0}(s) = w_m^{2n-1}\{[z^{3w_m} - z^{-3w_m}] - \beta_{2n-1,1}[z^{w_m} - z^{-w_m}] - \beta_{2n-1,2}[z^{2w_m} - z^{-2w_m}]\}, \tag{19}$$
$$n, m = 1, 2, 3, 4, \quad z = e^{a\frac{\pi}{3}s} \neq 0;$$

$$g_7(s) = \sum_{k=1}^{4} g_{7,k}(s), \tag{20}$$

при этом определители $g_{7,k}(s)$ $(k = 1, 2, 3, 4)$ получаются из определителя $g_0(s)$ из (19) заменой k-го столбца на столбец

$$(g_{7k,1k}(s); g_{7k,2k}(s); g_{7k,3k}(s); g_{7k,4k}(s))^*,$$

где

$$g_{7k,nk}(s) = [A_{7k}^{2n-1}(\pi, s) + A_{7,k+4}^{2n-1}(\pi, s)] - \beta_{2n-1,1}\left[A_{7k}^{2n-1}\left(\frac{\pi}{3}, s\right) + A_{7,k+4}^{2n-1}\left(\frac{\pi}{3}, s\right)\right] -$$
$$-\beta_{2n-1,2}\left[A_{7k}^{2n-1}\left(\frac{2\pi}{3}, s\right) + A_{7,k+4}^{2n-1}\left(\frac{2\pi}{3}, s\right)\right], \quad k, n = 1, 2, 3, 4. \tag{21}$$

Основное приближение уравнения (18)–(21) имеет вид $g_0(s) = 0$, где $g_0(s)$ — определитель четвертого порядка, поэтому $g_0(s)$ представляется в виде

$$g_0(s) = \sum_k D_k z^{M_k}, \quad z = e^{a\frac{\pi}{3}s} \neq 0,$$
$$M_k = \delta_{1k}w_1 + \delta_{2k}w_2 + \delta_{3k}w_3 + \delta_{4k}w_4, \quad \delta_{nk} \in \{\pm 1, \pm 2, \pm 3\}, \quad n = 1, 2, 3, 4, \tag{22}$$

D_k — некоторые числа.

Индикаторная диаграмма [20, гл. 12] (т. е. выпуклый многоугольник, который образуют показатели экспонент, входящих в (22)) уравнения (22) представляет собой правильный восьмиугольник $R_1R_2\ldots R_8$, вершины которого имеют координаты $R_1(3w_1 + 3w_2 + 3w_3 + 3w_8)$, $R_2(3w_1 + 3w_2 + 3w_3 + 3w_4)$, $R_3(3w_2 + 3w_3 + 3w_4 + 3w_5), \ldots,$ $R_7(3w_6 + 3w_7 + 3w_8 + 3w_1)$, $R_8(3w_7 + 3w_8 + 3w_1 + 3w_2)$, числа w_k заданы формулами (5), (6).

При этом на границах этого восьмиугольника находятся точки, делящие границы отрезков на шесть равных частей. Например, на отрезке $[R_1; R_2]$ находятся точки

$R_{12}(V_1-2w_4)$, $R_{13}(V_1-w_4)$, $R_{15}(V_1+w_4)$, $R_{16}(V_1+2w_4)$, $V_1=3w_1+3w_2+3w_3$, точки $R_{14}(V_1)$ среди показателей экспонент $\{M_k\}$ из (22) нет. На отрезке $[R_8;R_1]$ находятся точки $R_{82}(V_8-2w_3)$, $R_{83}(V_8-w_3)$, $R_{85}(V_8+w_3)$, $R_{86}(V_8+2w_3)$, $V_8=3w_8+3w_1+3w_2$, точки $R_{84}(V_8)$ среди множества $\{M_k\}$ из (22) нет.

Из общей теории нахождения корней квазиполиномов вида (18)–(21), а также (22) (см. [6, 20]), следует, что корни уравнения (18)–(21) находятся в восьми секторах бесконечно малого раствора, биссектрисы которых являются серединными перпендикулярами к сторонам восьмиугольника, т. е. перпендикулярами к отрезкам $[R_1;R_2]$, $[R_2;R_3]$, ..., $[R_8;R_1]$.

4. ИССЛЕДОВАНИЕ СЕКТОРА ИНДИКАТОРНОЙ ДИАГРАММЫ, ПЕРПЕНДИКУЛЯРНОГО ОТРЕЗКУ $[R_1;R_2]$

Чтобы изучить асимптотику корней уравнения (18)–(21) в секторе $[R_1;R_2]$ индикаторной диаграммы, необходимо в этом уравнении (а также и в уравнении $g_0(s)=0$ из (22)) оставить только те экспоненты, показатели которых соответствуют точкам, находящимся на этом отрезке, т. е. точкам $R_1, R_{12}, R_{13}, R_{15}, R_{16}, R_2$. Подставляя формулы (11), (12) в уравнение (18)–(21), проведем необходимые преобразования и упрощения, в результате докажем следующую теорему.

Теорема 4. *Уравнение на собственные значения дифференциального оператора* (1)–(4) *в секторе* $[R_1;R_2]$ *имеет вид:*

$$g_1(s)=g_{0,1}(s)-\frac{g_{7,1}(s)}{8a^7s^7}+\underline{O}\left(\frac{1}{s^{14}}\right)=0, \tag{23}$$

$$g_{01}(s)=\begin{vmatrix} w_1z^{3w_1} & w_2z^{3w_2} & w_3z^{3w_3} & h_{14}\\ w_1^3z^{3w_1} & w_2^3z^{3w_2} & w_3^3z^{3w_3} & h_{24}\\ w_1^5z^{3w_1} & w_2^5z^{3w_2} & w_3^5z^{3w_3} & h_{34}\\ w_1^7z^{3w_1} & w_2^7z^{3w_2} & w_3^7z^{3w_3} & h_{44}\end{vmatrix}, \tag{24}$$

$$h_{m4}=w_4^{2m-1}[z^{3w_4}-z^{-3w_4}]-\beta_{2m-1,1}[z^{w_4}-z^{-w_4}]-\beta_{2m-1,2}[z^{2w_4}-z^{-2w_4}], \quad m=1,2,3,4, \tag{25}$$

$$g_{7,1}(s)=\sum_{k=1}^{4}g_{7,1,k}(s), \tag{26}$$

определители $g_{7,1,k}(s)$ $(k=1,2,3)$ *получаются из определителя* $g_{0,1}(s)$ *из* (24), (25) *заменой* k*-го столбца на столбец*

$$(u_{k1};u_{k2};u_{k3};u_{k4})^*,$$

$$u_{km}=w_kw_k^{2m-1}z^{3w_k}\left(\int_0^\pi\ldots\right)_{ak1}+w_kw_k^{2m-1}z^{3w_k}\left(\int_0^\pi\ldots\right)_{a,k+4,1}+\bar{\bar{o}}(1),$$

$$m=1,2,3,4;$$

определитель $g_{7,1,4}(s)$ *получается из определителя* $g_{0,1}(s)$ *из* (24), (25) *заменой* *четвертого столбца на столбец*

$$(p_{14}; p_{24}; p_{34}; p_{44})^*,$$
$$p_{m4} = V_m(\pi) - \beta_{2m-1,1} V_m\left(\frac{\pi}{3}\right) - \beta_{2m-1,1} V_m\left(\frac{2\pi}{3}\right),$$
$$V_m(c) = w_4 w_4^{2m-1} z^{\frac{3c}{\pi}w_4} \left(\int_0^c \ldots\right)_{a44} + w_8 w_8^{2m-1} z^{\frac{-3c}{\pi}w_4} \left(\int_0^c \ldots\right)_{a48} + \tag{27}$$
$$+ w_4 w_4^{2m-1} z^{\frac{3c}{\pi}w_4} \left(\int_0^c \ldots\right)_{a84} + w_8 w_8^{2m-1} z^{\frac{-3c}{\pi}w_4} \left(\int_0^c \ldots\right)_{a88},$$
$$w_8 = -w_4, \quad m = 1, 2, 3, 4.$$

Вычисляя необходимые определители, используя формулы (5), (6), (11), (12), сделаем необходимые преобразования, приведем уравнение (23)–(27) к следующему виду:

$$g_1(s) = h_{0,1}(s) - \frac{w_4}{8a^7 s^7} h_{7,1}(s) + \underline{O}\left(\frac{1}{s^{14}}\right) = 0, \tag{28}$$

$$h_{0,1}(s) = 4[z^{3w_4} - z^{-3w_4}] - \sum_{m=1}^{4} \beta_{2m-1,1}[z^{w_4} - z^{-w_4}] - \sum_{m=1}^{4} \beta_{2m-1,2}[z^{2w_4} - z^{-2w_4}], \tag{29}$$

$$h_{7,1}(s) = 4H(\pi) - \sum_{m=1}^{4} \beta_{2m-1,1} H\left(\frac{\pi}{3}\right) - \sum_{m=1}^{4} \beta_{2m-1,2} H\left(\frac{2\pi}{3}\right), \tag{30}$$

$$H(c) = z^{\frac{3c}{\pi}w_4} \left(\int_0^c \ldots\right)_{a44} + z^{\frac{-3c}{\pi}w_4} \left(\int_0^c \ldots\right)_{a48} +$$
$$+ z^{\frac{3c}{\pi}w_4} \left(\int_0^c \ldots\right)_{a84} + z^{\frac{-3c}{\pi}w_4} \left(\int_0^c \ldots\right)_{a88}, \tag{31}$$

при этом из условия (3) следует, что

$$\sum_{m=1}^{4} \beta_{2m-1,1} = 12, \quad \sum_{m=1}^{4} \beta_{2m-1,2} = 0.$$

Основное приближение уравнения (28)–(31) имеет вид

$$h_{0,1}(s) = 0 \overset{(3)}{\Leftrightarrow} 4[z^{3w_4} - z^{-3w_4}] - 12[z^{w_4} - z^{-w_4}] = 0 \quad \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \quad z^{6w_4} - 3z^{4w_4} + 3z^{2w_4} - 1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (z^{w_4} - 1)^3 (z^{w_4} + 1)^3 = 0. \tag{32}$$

Уравнение (32) имеет два корня: $x_1 = x_2 = x_3 = 1$ (кратности 3) и $x_4 = x_5 = x_6 = -1$ (кратности 3), $x = z^{w_4}$. Таким образом, в случае граничных условий (2), (3) мы изучаем случай так называемых «кратных в главном собственных значений».

В случае $x = 1$ имеем:

$$z^{w_4} = 1 \Leftrightarrow e^{a\frac{\pi}{3}w_4 s} = 1 = e^{2\pi i k} \quad \Leftrightarrow \quad s_{k,1,\text{осн}} = \frac{6ik}{aw_4}, \quad k \in \mathbb{Z}. \tag{33}$$

В формуле (33) индекс 1 означает, что мы рассматриваем сектор 1) индикаторной диаграммы, биссектриса которого перпендикулярна отрезку $[R_1; R_2]$, индекс «осн» означает, что мы нашли основное приближение корней уравнения (28)–(31), кратность этих корней равна трем, поэтому общее асимптотическое разложение корней уравнения (28)–(31) будет идти по дробным степеням k. Справедлива следующая теорема.

Теорема 5. *Асимптотика собственных значений дифференциального оператора* (1)–(4) *в секторе* 1, *соответствующих корням* $x_1 = x_2 = x_3 = 1$ (*кратности* 3) *уравнения* (32) *имеет следующий вид:*

$$s_{k,1,m} = \frac{6i}{aw_4}[k + D_{1m}],$$
$$D_{1m} = \frac{d_{1k,1,m}}{k^{7/3}} + \frac{d_{2k,1,m}}{k^{14/3}} + \frac{d_{3k,1,m}}{k^{21/3}} + \underline{O}\left(\frac{1}{k^{28/3}}\right), \quad m = 1, 2, 3, \quad k \in \mathbb{Z}. \tag{34}$$

Для доказательства теоремы 5 необходимо доказать, что коэффициенты $d_{1k,1,m}$, $d_{2k,1,m}$, $d_{3k,1,m}, \ldots$ разложения (34) вычисляются единственным образом.

Применяя формулы Маклорена, находим:

$$z^{\pm nw_4}\Big|_{s_{k,1,m}} = e^{\pm a\frac{\pi}{3}nw_4 s}\Big|_{s_{k,1,m}} \overset{(34)}{=} e^{\pm 2\pi in}e^{\pm 2\pi inD_{1m}} =$$
$$= 1\left[1 \pm (2\pi in)D_{1m} + \frac{(2\pi in)^2}{2}D_{1m}^2 \pm \frac{(2\pi in)^3}{6}D_{1m}^3 + \frac{(2\pi in)^4}{24}D_{1m}^4 \pm\right.$$
$$\left.\pm\frac{(2\pi in)^5}{120}D_{1m}^5 + \underline{O}(D_{1m}^6)\right], \quad n = 1, 2, 3. \tag{35}$$

Подставляя формулы (34), (35) в уравнение (28)–(31), учтем условие (3) на коэффициенты граничных условий (2), сделаем необходимые преобразования, увидим, что коэффициенты при D_{1m}, D_{2m}, D_{4m} равны нулю, коэффициент при D_{1m}^3 равен $(-256\pi^3 i)$, коэффициент при D_{1m}^5 равен $512\pi^5 i$, в результате получим:

$$(-256\pi^3 i)\left[\frac{d_{1k,1,m}^3}{k^{21/3}} + \frac{3d_{1k,1,m}^2 d_{2k,1,m}}{k^{28/3}} + \frac{3d_{1k,1,m}^2 d_{3k,1,m}}{k^{35/3}} + \frac{3d_{1k,1,m}d_{2k,1,m}^2}{k^{35/3}} + \underline{O}\left(\frac{1}{k^{42/3}}\right)\right] +$$
$$+512\pi^5 i\left[\frac{d_{1k,1,m}^5}{k^{35/3}} + \underline{O}\left(\frac{1}{k^{42/3}}\right)\right] - \frac{w_4}{8a^7}\frac{a^7 w_4^7 i}{6^7}\frac{1}{k^7}\left(1 + \underline{O}\left(\frac{1}{k^{10/3}}\right)\right] h_{7,1}(s)\Big|_{s_{k,1,m}} +$$
$$+\underline{O}\left(\frac{1}{k^{14}}\right) = 0. \tag{36}$$

Для нахождения асимптотики величины $h_{7,1}(s)|_{s_{k,1,m}}$ из (36), (30), (31) воспользуемся формулами (11), (12), (34):

$$\left[z^{-nw_4}\left(\int_0^{\pi n/3}\ldots\right)_{a48} + z^{nw_4}\left(\int_0^{\pi n/3}\ldots\right)_{a84}\right]\Big|_{s_{k,1,m}} =$$
$$= \left[e^{-a\frac{\pi}{3}nw_4 s}\int_0^{\pi n/3} q(t)\exp[a(w_4 - w_8)st]dt_{a48} +\right.$$
$$\left.+e^{a\frac{\pi}{4}nw_4 s}\int_0^{\pi n/3} q(t)\exp(-2aw_4 st)dt_{a84}\right]\Big|_{s_{k,1,m}} =$$

$$= 2\int_0^{\pi n/3} q(t)\cos[12kt + 12tD_{1m} - 2\pi kn - 2\pi D_{1m}n]dt_{mn}, \quad n,m = 1,2,3; \tag{37}$$

$$\left(\int_0^b \dots\right)_{a44} = \left(\int_0^b \dots\right)_{a88} = \int_0^b q(t)dt_{a44}, \tag{38}$$

$$\cos[12kt + (12t - 2\pi n)M_{1m}] = \cos(12kt) - \frac{d_{1k,1,m}}{k^{7/3}}(12t - 2\pi n)\sin(12kt) -$$
$$-\frac{d_{2k,1,m}}{k^{14/3}}(12t - 2\pi n)\sin(12kt) - \frac{d^2_{1k,1,m}}{2k^{14/3}}(12t - 2\pi n)^2\cos(12kt) +$$
$$+\underline{O}\left(\frac{1}{k^{21/3}}\right), \quad n = 1,2,3. \tag{39}$$

Подставим формулы (37)–(39) в уравнение (36) и приравняем коэффициенты при одинаковых степенях k. При $k^{-7} = k^{-21/3}$ имеем:

$$(-256\pi^3 i)d^3_{1k,1,m} = \frac{i}{8\cdot 6^7}\left\{\left[8\left(\int_0^\pi \dots\right)_{a44} - 24\left(\int_0^{\pi/3} \dots\right)_{a44}\right] +\right.$$
$$\left. + \left[8\left(\int_0^\pi \dots\right)_{m1} - 24\left(\int_0^\pi \dots\right)_{m1}\right]\right\},$$
$$\left(\int_0^b \dots\right)_{m1} = \int_0^b q(t)\cos(12kt)dt_{m1}, \quad \left(\int_0^b \dots\right)_{a44} = \int_0^b q(t)dt_{a44}, \quad m = 1,2,3,$$

откуда находим

$$d_{1k,1,m} = -\frac{1}{288\pi}\frac{1}{\sqrt[3]{3}}(\sqrt[3]{1})_m\left[\left(\int_0^\pi \dots\right)_{m2} - 3\left(\int_0^{\pi/3} \dots\right)_{m2}\right],$$
$$(\sqrt[3]{1})_m = e^{\frac{2\pi i}{3}(m-1)}, \quad m = 1,2,3, \tag{40}$$
$$\left(\int_0^b \dots\right)_{m2} = \int_0^b q(t)[1 - \cos(12kt)]dt_{m2}.$$

Формула (40) показывает, что произошло «расщепление» кратных в главном собственных значений $s_{k,1,\text{осн}}$ из (33) (кратности 3) на три однократные серии $s_{k,1,m}$ $(m = 1,2,3)$ из (34), при этом коэффициенты $d_{1k,1,m}$ $(m = 1,2,3)$ определены в (40).

Приравнивая в (36)–(39) коэффициенты при $k^{-28/3}$, выводим

$$d_{2k,1,m} = \frac{1}{768\pi^3}\frac{1}{6^7}\frac{1}{d_{1k,1,m}}\left[\int_0^\pi q(t)(12t - 6\pi)\sin(12kt)\,dt -\right.$$
$$\left. -3\int_0^{\pi/3} q(t)(12t - 2\pi)\sin(12kt)dt\right], \quad d_{1k,1,m} \neq 0. \tag{41}$$

Приравнивая в (36)–(39) коэффициенты при $k^{-35/3}$, получим уравнение, из которого можно однозначно найти коэффициенты $d_{3k,1,m}$ в случае, если $d_{1k,1,m} \neq 0$.

Получение формул (40), (41) завершает доказательство теоремы 5.

Теорема 6. *Асимптотика собственных значений дифференциального оператора* (1)–(4) *в секторе* 1), *соответствующих корням* $x_4 = x_5 = x_6 = -1$

(*кратности* 3) *уравнения* (32), *имеет вид*

$$\tilde{s}_{k,1,m} = \frac{6i}{aw_4}\left[\tilde{k} + \tilde{D}_{1m}\right],$$
$$\tilde{D}_{1m} = \frac{\tilde{d}_{1k,1,m}}{\tilde{k}^{7/3}} + \frac{\tilde{d}_{2k,1,m}}{\tilde{k}^{14/3}} + \underline{O}\left(\frac{1}{\tilde{k}^{21/3}}\right), \tag{42}$$
$$\tilde{k} = k + \frac{1}{2}, \quad k \in \mathbb{Z}, \quad m = 4, 5, 6.$$

Доказательство теоремы 6 аналогично доказательству теоремы 5:

$$x = -1 \quad \Leftrightarrow \quad e^{a\frac{\pi}{3}w_4 s} = -1 = e^{2\pi i k}e^{\pi i} \quad \Leftrightarrow \quad s_{k,1,m,\text{осн}} = \frac{6i\tilde{k}}{aw_4}, \quad \tilde{k} = k + \frac{1}{2}, \quad k \in \mathbb{Z},$$

кратность корня равна трем. Значит (см. [20–22]), асимптотику собственных значений, соответствующих корню $x = -1$, надо искать в виде (42). Проведя вычисления, аналогичные вычислениям при выводе формул (35)–(41), убедимся в том, что коэффициенты $\tilde{d}_{1k,1,m}$ и $\tilde{d}_{2k,1,m}, \ldots$ формулы (42) находятся единственным образом, при этом имеем:

$$\tilde{d}_{1k,1,m} = -\frac{1}{288\pi}\frac{1}{\sqrt[3]{3}}(\sqrt[3]{1})_m\left[\left(\int_0^{\pi}\ldots\right)_{m3} - 3\left(\int_0^{\pi/3}\ldots\right)_{m3}\right],$$
$$(\sqrt[3]{1})_m = e^{\frac{2\pi i}{3}(m-1)}, \quad m = 4, 5, 6, \tag{43}$$
$$\left(\int_0^{b}\ldots\right)_{m3} = \int_0^{b} q(t)[1 - \cos(12\tilde{k}t)]dt_{m3};$$

$$\tilde{d}_{2k,1,m} = -\frac{1}{768\pi^3}\frac{1}{6^7}\frac{1}{\tilde{d}_{1k,1,m}}\left[\int_0^{\pi} q(t)(12t - 6\pi)\sin(12\tilde{k}t)\,dt - \right.$$
$$\left. -3\int_0^{\pi/3} q(t)(12t - 2\pi)\sin(12\tilde{k}t)\,dt\right], \quad k \in \mathbb{Z}, \quad m = 4, 5, 6. \tag{44}$$

В секторах 2–8 (биссектрисы которых перпендикулярны отрезкам $[R_2; R_3]$, $[R_3; R_4], \ldots$, $[R_8; R_1]$) индикаторной диаграммы справедливы следующие утверждения.

Теорема 7. *Асимптотика собственных значений дифференциального оператора* (1)–(4) *в секторах* 2), 3), …, 8) *индикаторной диаграммы, соответствующих корням* $x = 1$ (*кратности* 3) *и* $x = -1$ (*кратности* 3) *уравнения* (32), *удовлетворяет следующему закону:*

1) $s_{k,2,m} = s_{k,1,m}e^{\frac{2\pi i}{8}}, \quad s_{k,3,m} = s_{k,2,m}e^{\frac{2\pi i}{8}} = s_{k,1,m}e^{\frac{4\pi i}{8}}, \quad \ldots, \quad s_{k,n,m} = s_{k,1,m}e^{\frac{\pi i}{4}(n-1)},$

$$n = 1, 2, \ldots, 8, \quad \lambda_{k,n,m} = s^8_{k,n,m}, \quad k \in \mathbb{Z}, \quad m = 1, 2, 3; \tag{45}$$

(46)

$s_{1,k,m}$ *заданы формулами* (34), (40), (41);

2) $\tilde{s}_{k,2,m} = \tilde{s}_{k,1,m}e^{\frac{2\pi i}{8}}, \quad \tilde{s}_{k,3,m} = \tilde{s}_{k,2,m}e^{\frac{2\pi i}{8}} = \tilde{s}_{k,1,m}e^{\frac{4\pi i}{8}}, \quad \ldots, \quad \tilde{s}_{k,n,m} = \tilde{s}_{k,1,m}e^{\frac{\pi i}{4}(n-1)},$

$$n = 1, 2, \ldots, 8, \quad \tilde{\lambda}_{k,n,m} = \tilde{s}^8_{k,n,m}, \quad k \in \mathbb{Z}, \quad m = 4, 5, 6, \tag{47}$$

$\tilde{s}_{k,1,m}$ *определены формулами* (42)–(44).

С помощью формул (45), (47) можно в каждом из секторов индикаторной диаграммы изучить асимптотику собственных функций оператора (1)–(4).

Библиографический список

1. *Birkhoff G. D.* On the asymptotic character of the solutions of the certain linear differential equations containing parameter // Trans. Amer. Math. Soc. 1908. Vol. 9. P. 219–231.
2. *Тамаркин Я. Д.* О некоторых общих задачах теории обыкновенных линейных дифференциальных уравнений и о разложении произвольных функций в ряды. Петроград : тип. М. П. Фроловой, 1917. 308 с.
3. *Федорюк М. В.* Асимптотика решений обыкновенных линейных дифференециальных уравнений n-го порядка // Дифференц. уравнения. 1966. Т. 2, № 4. С. 492–507.
4. *Гелъфанд И. М., Левитан Б. М.* Об одном простом тождестве для собственных значений дифференциального оператора второго порядка // Докл. АН СССР. 1953. Т. 88. С. 593–596.
5. *Левитан Б. М., Гасымов М. Г.* Определение дифференциального оператора по двум спектрам // УМН. 1964. Т. 19, вып. 2(116). С. 3–63.
6. *Лидский В. Б., Садовничий В. А.* Асимптотические формулы для корней одного класса целых функций // Матем. сб. 1968. Т. 75(117), № 4. С. 558–566.
7. *Ильин В. А.* О сходимости разложений по собственным функциям в точках разрыва коэффициентов дифференциального оператора // Матем. заметки. 1977. Т. 22, вып. 5. С. 679–698.
8. *Митрохин С. И.* О формулах регуляризованных следов для дифференциальных операторов второго порядка с разрывными коэффициентами // Вестн. Моск. ун-та. Сер.: матем., мех. 1986. № 6. С. 3–6.
9. *Hald O. H.* Discontinuous inverse eigenvalue problems // Commun. Pure Appl. Math. 1984. Vol. 37, iss. 5. P. 539–577. DOI: 10.1002/cpa.3160370502.
10. *Митрохин С. И.* О некоторых спектральных свойствах дифференциальных операторов второго порядка с разрывной весовой функцией // Докл. АН. 1997. Т. 356, № 1. С. 13–15.
11. *Gottlieb H. P. W.* Iso-spectral operators : some model examples with discontinuous coefficients // J. Math. Anal. and Appl. 1988. Vol. 132. P. 123–137.
12. *Винокуров В. А., Садовничий В. А.* Асимптотика любого порядка собственных значений и собственных функций краевой задачи Штурма—Лиувилля на отрезке с суммируемым потенциалом // Дифференц. уравнения. 1998. Т. 34, № 10. С. 1423–1426.
13. *Винокуров В. А., Садовничий В. А.* Асимптотика любого порядка собственных значений и собственных функций краевой задачи Штурма – Лиувилля на отрезке с суммируемым потенциалом // Изв. РАН. Сер. матем. 2000. Т. 64, вып. 4. С. 47–108. DOI: 10.4213/im295.
14. *Митрохин С. И.* Асимптотика собственных значений дифференциального оператора четвёртого порядка с суммируемыми коэффициентами // Вестн. Моск. ун-та. Сер.: матем., мех. 2009. № 3. С. 14–17.
15. *Митрохин С. И.* О спектральных свойствах одного дифференциального оператора с суммируемыми коэффициентами с запаздывающим аргументом // Уфимск. матем. журн. 2011. Т. 3, № 4. С. 95–115.
16. *Митрохин С. И.* О спектральных свойствах дифференциального оператора с суммируемым потенциалом и гладкой весовой функцией // Вестн. СамГУ. Естественнонауч. сер. 2008. № 8/1(67). С. 172–187.
17. *Наймарк М. А.* Линейные дифференциальные операторы. М. : Наука, 1969. 528 с.
18. *Марченко В. А.* Спектральная теория операторов Штурма – Лиувилля. Киев : Наук. думка, 1977. 329 с.

19. *Лундина Д. Ш.* Точная зависимость между асимптотическими разложениями собственных значений краевых задач Штурма—Лиувилля и гладкостью потенциала // Теория функций, функциональный анализ и их приложения. 1982. № 37. С. 74–101.
20. *Беллман Р., Кук К. Л.* Дифференциально-разностные уравнения. М. : Мир, 1967. 548 с.
21. *Садовничий В. А., Любишкин В. А.* О некоторых новых результатах теории регуляризованных следов дифференциальных операторов // Дифференц. уравнения. 1982. Т. 18, № 1. С. 109–116.
22. *Митрохин С. И.* О «расщеплении» кратных в главном собственных значений многоточечных краевых задач // Изв. вузов. Матем. 1997. № 3(418). С. 38–43.

Образец для цитирования:
Митрохин С. И. Многоточечные дифференциальные операторы: «расщепление» кратных в главном собственных значений // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2017. Т. 17, вып. 1. С. 5–18. DOI: 10.18500/1816-9791-2017-17-1-5-18.

Multipoint Differential Operators: „Splitting“ of the Multiple in Main Eigenvalues

S. I. Mitrokhin

Sergei I. Mitrokhin, Lomonosov Moscow State University, Research Computing Center, 1, building 4, Leninskiye Gory, 119991, Moscow, Russia, mitrokhin-sergey@yandex.ru

We study the boundary value problem for the differential operator of the eighth order with a summable potential. The boundary conditions of the boundary value problem are multipoint. We derived the integral equation for solutions of differential equation which define the studied differential operator. The asymptotic formulas and estimates for the solutions of the corresponding differential equation for large values of the spectral parameter are obtained. By studying the boundary conditions, the equation for the eigenvalues as the determinant of the fourth order is derived. By using the properties of determinants and asymptotic formulas for solutions of differential equation we study the asymptotic behavior of the roots of the equation on eigenvalues of the operator. The coefficients of the boundary conditions of the studied boundary value problem are chosen in such a way that the main approach of the equation for the eigenvalues of the operator has two roots multiplicity three. The indicator diagram of the equation for the eigenvalues is studied in the detail. Studying one of the sectors of the indicator diagram, we derived the asymptotics of the eigenvalues of the studied operator. It is shown that the eigenvalues which are multiple in the main approximation „are split“ into three single series of eigenvalues. Similar properties of eigenvalues are observed in other sectors of the indicator diagram.

Key words: differential operator, spectral parameter, multipoint boundary conditions, summable potential, indicator diagram, asymptotics of the eigenvalues.

References

1. Birkhoff G. D. On the asymptotic character of the solutions of the certain linear differential equations containing parameter. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 1908, vol. 9, pp. 219–231.
2. Tamarkin J. D. *On some general problems in the theory of ordinary linear differential equations and on the expansion in series of arbitrary functions*. Petrograd, typography M. P. Frolova, 1917. 308 p. (in Russian).

3. Fedorjuk M. V. The asymptotics of solutions to ordinary linear differential equations of the n-th order. *Differ. Uravn.*, 1966, vol. 2, no. 4, pp. 492–507 (in Russian).
4. Gel'fand I. M., Levitan B. M. Ob odnom prostom tozhdestve dlia sobstvennykh znachenii differentsial'nogo operatora vtorogo poriadka [On a simple identity for eigenvalues of a differential operator of the second order]. *Dokl. USSR Academy of Sciences*, 1953, vol. 88, pp. 593–596 (in Russian).
5. Levitan B. M., Gasymov M. G. Determination of a differential equation by two of its spectra. *Russian Math. Surveys*, 1964, vol. 19, iss. 2, pp. 1–63. DOI: 10.1070/RM1964v019n02ABEH001145.
6. Lidskii V. B., Sadovnichii V. A. Asymptotic formulas for the zeros of a class of entire functions. *Math. USSR-Sb.*, 1968, vol. 4, iss. 4, pp. 519–527. DOI: 10.1070/SM1968v004n04ABEH002812.
7. Il'in V. A. Convergence of eigenfunction expansions at points of discontinuity of the coefficients of a differential operator. *Math. Notes*, 1977, vol. 22, iss. 5, pp. 870–882. DOI: 10.1007/BF01098352.
8. Mitrokhin S.I. About formulas of regularized traces for differential operators of the second order with discontinuous coefficients. *Vestnik Moskovskogo universiteta. Ser.: matematika, mehanika* [Vestnik MGU. Ser.: Mathematics, mechanics], 1986, iss. 6, pp. 3–6 (in Russian).
9. Hald O. H. Discontinuous inverse eigenvalue problems. *Commun. Pure Appl. Math.*, 1984, vol. 37, iss. 5, pp. 539–577. DOI: 10.1002/cpa.3160370502.
10. Mitrokhin S. I. About some spectral properties of differential operators of the second order with discontinuous weight function. *Doklady Akademii nauk* [Doklady Math.], 1997, vol. 356, iss. 1, pp. 13-15 (in Russian).
11. Gottlieb H. P. W. Iso-spectral operators : some model examples with discontinuous coefficients. *J. Math. Anal. and Appl.*, 1988, vol. 132, pp. 123–137.
12. Vinokurov V. A., Sadovnichii V. A. Arbitrary-order asymptotics of the eigenvalues and eigenfunctions of the Sturm – Liouville boundary value problem on an interval with integrable potential. *Differ. Equ.*, 1999, vol. 34, no. 10, pp. 1425–1429.
13. Vinokurov V. A., Sadovnichii V. A. Asymptotics of any order for the eigenvalues and eigenfunctions of the Sturm – Liouville boundary-value problem on a segment with a summable potential. *Izv. Math.*, 2000, vol. 64, iss. 4, pp. 695–754. DOI: 10.1070/im2000v064n04ABEH000295.
14. Mitrokhin S.I. Asymptotics of the eigenvalues of the differential operator of the fourth order with summable coefficients. *Vestnik Moskovskogo universiteta. Ser.: matematika, mehanika* [Vestnik MGU. Ser.: Mathematics, mechanics], 2009, iss. 3, pp. 14–17 (in Russian).
15. Mitrokhin S. I. On spectral properties of a differential operator with summable coefficients with a retarded argument. *Ufimsk. Mat. Zh.*, 2011, vol. 3, no. 4, pp. 95–115 (in Russian).
16. Mitrokhin S. I. The spectral properties of a differential operator with summable potential and smooth weight function. *Vestnik of Samara State University. Natural Science Ser.*, 2008, no. 8/1(67), pp. 172–187 (in Russian).
17. Naimark M. A. *Lineynye differencial'nye operatory* [Linear differential operators]. Moscow, Nauka, 1969. 528 p. (in Russian).
18. Marchenko V. A. *Operatory Shturma – Liuvillya i ikh prilozheniya* [Sturm – Liouville operators and their applications]. Kiev, Naukova Dumka, 1977. 329 p. (in Russian).
19. Lundina D. Sh. Exact relationship between the asymptotic expansions of the eigenvalues of boundary value problems of the Sturm-Liouville problem and the smoothness of the

potential. *Teoriya funktsiy, funktsional'nyy analiz i ikh prilozheniya* [The theory of functions, functional analysis and their applications], 1982, no. 37, pp. 74–101 (in Russian).
20. Bellman R., Cooke K. L. *Differentsial'no-raznostnye uravneniya* [Differential-difference equations]. Moscow, Mir, 1967. 548 p. (in Russian).
21. Sadovnichii V. A., Lyubishkin V. A. Some new results of the theory of regularized traces of differential operators. *Differ. Uravn.*, 1982, vol. 18, no. 1, pp. 109–116 (in Russian).
22. Mitrokhin S. I. On the "splitting" in the main approximation of multiple eigenvalues of multipoint boundary value problems. *Russian Math.* [Iz. VUZ], 1997, no. 3, pp. 37–42.

Cite this article as:
Mitrokhin S. I. Multipoint Differential Operators: „Splitting“ of the Multiple in Main Eigenvalues. *Izv. Saratov Univ. (N. S.), Ser. Math. Mech. Inform.*, 2017, vol. 17, iss. 1, pp. 5–18 (in Russian). DOI: 10.18500/1816-9791-2017-17-1-5-18.