УДК 517.984

О ВОССТАНОВЛЕНИИ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ПУЧКОВ НА ГРАФЕ-КУСТЕ

В. А. Юрко

Юрко Вячеслав Анатольевич, доктор физико-математических наук, заведующий кафедрой математической физики и вычислительной математики, Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского, Россия, 410012, Саратов, Астраханская, 83, YurkoVA@info.sgu.ru

Исследуется обратная задача спектрального анализа для дифференциальных пучков второго порядка на графе-кусте, который является произвольным компактным графом с одним циклом. Основное внимание уделяется наиболее важной нелинейной обратной задаче восстановления коэффициентов дифференциальных уравнений при условии, что структура графа известна априори. Используются стандартные условия склейки во внутренних вершинах и краевые условия Дирихле и Неймана в граничных вершинах. Для данного класса пучков установлены свойства спектральных характеристик, получена конструктивная процедура решения обратной задачи восстановления коэффициентов дифференциальных операторов по спектрам и доказана единственность решения. Для решения этой обратной задачи используется метод спектральных отображений, который позволяет строить потенциал на каждом фиксированном ребре. Для перехода к следующему ребру используется специальное представление характеристических функций.

Ключевые слова: дифференциальные пучки, геометрический граф, обратные спектральные задачи.

DOI: 10.18500/1816-9791-2017-17-1-51-61

ВВЕДЕНИЕ

Исследуется обратная спектральная задача для несамосопряженных дифференциальных пучков второго порядка на компактном графе-кусте (произвольный граф с одним циклом) при стандартных условиях склейки во внутренних вершинах и краевых условиях в граничных вершинах. Основное внимание уделяется наиболее важной нелинейной обратной задаче восстановления коэффициентов дифференциальных уравнений (потенциалов) при условии, что структура графа известна априори. Для этой обратной задачи доказана теорема единственности и получена процедура построения решения. Для решения этой обратной задачи используется метод спектральных отображений [1].

Отметим, что обратные спектральные задачи для дифференциальных операторов на интервале изучены достаточно полно (см. [1–5] и библиографию к ним). Обратные задачи на графах исследовались в работах [6–13] и других работах.

Рассмотрим компактный граф G в $\mathbf{R}^\ell$ с множеством ребер $\mathscr{E} = \{e_0, \ldots, e_r\}$ и множеством вершин $W = V \cup U$, где $V = \{v_1, \ldots, v_r\}$, $U = \{v_{r+1}, \ldots, v_{r+N}\}$. Граф имеет вид $G = e_0 \cup T$, где e_0 — цикл, $v_i \in e_0$, $i = \overline{r+1, r+N}$, $v_j \notin e_0$, $j = \overline{1, r}$, $T \cap e_0 = U$, $T = T_1 \cup \ldots \cup T_m$, и T_j — дерево с корнем из U и с одним корневым ребром из $\mathscr{E}$. Множество T состоит из N групп деревьев: $T = R_1 \cup \ldots \cup R_N$, $R_i \cap e_0 = v_{r+i}$, т.е. все деревья из R_i имеют общий корень v_{r+i}. Пусть m_i — число деревьев в блоке R_i; $m_1 + \cdots + m_N = m$. Обозначим $s_0 = 1$, $s_i = m_1 + \cdots + m_i$, $i = \overline{1, N}$. Тогда

$$R_i = \bigcup_{j=s_{i-1}+1}^{s_i} T_j, \quad \bigcap_{j=s_{i-1}+1}^{s_i} T_j = v_{r+i}, \quad i = \overline{1, N}.$$

Фиксируем $i = \overline{1, N}$, $j = \overline{1, m}$, и рассмотрим дерево $T_j \in R_i$. Для двух точек $a, b \in T_j$ будем писать $a \leqslant b$, если a лежит на единственном простом пути, соединяющем корень v_0 с b. Будем писать $a < b$, если $a \leqslant b$ и $a \neq b$. Если $a < b$, то обозначим $[a, b] := \{z \in T : \ a \leqslant z \leqslant b\}$. В частности, если $e = [v, w]$ — ребро, то v называется его начальной точкой, а w — его конечной точкой; будем говорить, что e выходит из v и заканчивается в w. Для каждой вершины $v \in T_j$ обозначим $R(v) := \{e \in T_j : \ e = [v, w], \, w \in T_j\}$ — множество ребер, выходящих из v. Для $v \in T_j$ через $|v|$ обозначим число ребер между u_i и v; число $|v|$ называется порядком v. Для каждого ребра $e \in T$ его порядок определяется как порядок его конечной точки. Число $\sigma := \max_{j=\overline{1,r}} |v_j|$ называется высотой T. Пусть $V^{(\mu)} := \{v \in V : \ |v| = \mu\}$, $\mu = \overline{0, \sigma}$ — множество вершин порядка μ, а $\mathscr{E}^{(\mu)} := \{e \in T : \ e = [v, w], \ v \in V^{(\mu-1)}, \ w \in V^{(\mu)}\}$, $\mu = \overline{1, \sigma}$, — множество ребер порядка μ. Цикл e_0 состоит из N частей:

$$e_0 = e_{r+1} \cup \ldots \cup e_{r+N}, \quad e_{r+k} = [v_{r+k}, v_{r+k+1}], \quad k = \overline{1, N}, \quad v_{r+N+1} := v_{r+1}.$$

Для определенности занумеруем вершины $v_j \in V$ следующим образом: $\Gamma := \{v_1, \ldots, v_p\}$ — граничные вершины графа G, а v_j при $j > p$ занумерованы в порядке возрастания $|v_j|$. Аналогично занумеруем ребра, а именно $e_j = [v_{j_k}, v_j]$, $j = \overline{1, r}$, $j_k < j$. В частности, $E := \{e_1, \ldots, e_p\}$ — множество граничных ребер графа G. Ясно, что $e_j \in \mathscr{E}^{(\mu)}$ тогда и только тогда, когда $v_j \in V^{(\mu)}$. Положим $\mathscr{E}_i := \{e_k \in R_i : \ v_{r+i} \in e_k\}$, $\mathscr{E}_{N+1} := \mathscr{E}_1$.

Пусть d_j — длина ребра e_j, $j = \overline{1, r+N}$, а $d_0 = d_{r+1} + \ldots + d_{r+N}$ — длина e_0. Положим $b_0 = 0$, $b_k = d_{r+1} + \ldots + d_{r+k}$, $k = \overline{1, N}$. Тогда $b_N = d_0$. Каждое ребро e_j, $j = \overline{1, r+N}$ параметризуется параметром $x_j \in [0, d_j]$, причем $x_j = 0$ соответствует вершине v_j. Весь цикл e_0 параметризуется параметром $x \in [0, d_0]$, где $x = x_{r+j} + b_{j-1}$ при $x_{r+j} \in [0, d_{r+j}]$, $j = \overline{1, N}$.

Функция Y на G представима в виде $Y = \{y_j\}_{j=\overline{1,r+N}}$, где функция $y_j(x_j)$, $x_j \in [0, d_j]$, определена на ребре e_j. Функция $y(x)$, $x \in [0, d_0]$, на цикле e_0 имеет вид $y(x) = y_{r+j}(x_{r+j})$, $j = \overline{1, N}$. Пусть $Q = \{q_j\}_{j=\overline{1,r+N}}$ и $P = \{p_j\}_{j=\overline{1,r+N}}$ — комплекснозначные функции на G, они называются потенциалами. Предположим, что $q_j(x_j) \in L(0, d_j)$, $p_j(x_j) \in AC[0, d_j]$. Потенциалы $p(x)$, $q(x)$, $x \in [0, d_0]$ на всем цикле e_0 имеют вид $p_0(x) = p_{r+j}(x_{r+j})$, $q_0(x) = q_{r+j}(x_{r+j})$, $j = \overline{1, N}$. Рассмотрим дифференциальное уравнение на графе G:

$$y_j''(x_j) + (\rho^2 + \rho p_j(x) + q_j(x_j)) y_j(x_j) = 0, \quad x_j \in [0, d_j], \tag{1}$$

где $j = \overline{1, r+N}$, ρ — спектральный параметр, функции $y_j(x_j)$, $y_j'(x_j)$ абсолютно непрерывны на $[0, d_j]$ и удовлетворяют следующим условиям склейки во внутренних вершинах: для v_k, $k = \overline{p+1, r}$:

$$y_j(d_j) = y_k(0) \quad \text{for all} \quad e_j \in R(v_k), \qquad \sum_{e_j \in R(v_k)} y_j'(d_j) = y_k'(0), \tag{2}$$

для $v_{\mu+1},\ \mu = \overline{r+1, r+N}$:

$$\left.\begin{aligned} y_{\mu+1}(0) = y_\mu(d_\mu) = y_j(d_j)\ \forall\, e_j \in \mathscr{E}_{\mu-r+1}, \\ y'_{\mu+1}(0) = y'_\mu(d_\mu) + \sum_{e_j \in \mathscr{E}_{\mu-r+1}} y'_j(d_j), \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

где $y_{r+N+1} = y_{r+1}$, $d_{r+N+1} = d_{r+1}$. Условия (2), (3) называются стандартными условиями склейки. В электрических сетях они выражают закон Кирхгофа; при колебаниях упругих сетей — баланс напряжений и т.д. Рассмотрим краевую задачу $B_0(G)$ для уравнения (1) с условиями склейки (2), (3) и с краевыми условиями Дирихле в граничных вершинах $v_1, \ldots, v_p$: $y_j(0) = 0,\ j = \overline{1, p}$. Пусть $\Lambda_0 = \{\rho_{n0}\}$ — собственные значения (с учетом кратностей) задачи $B_0(G)$. Рассмотрим также краевые задачи $B_{\nu_1,\ldots,\nu_\gamma}(G)$, $\gamma = \overline{1, p}$, $1 \leqslant \nu_1 < \ldots < \nu_\gamma \leqslant p$, для уравнения (1) с условиями склейки (2), (3) и с краевыми условиями:

$$y'_k(0) = 0, \quad k = \nu_1, \ldots, \nu_\gamma, \quad y_j(0) = 0, \quad j = \overline{1, p}, \quad j \neq \nu_1, \ldots, \nu_\gamma.$$

Через $\Lambda_{\nu_1,\ldots,\nu_\gamma} := \{\rho_{n,\nu_1,\ldots,\nu_\gamma}\}$ обозначим собственные значения (с учетом кратностей) задачи $B_{\nu_1,\ldots,\nu_\gamma}(G)$. Пусть $C(x, \rho), S(x, \rho)$ — решения уравнения

$$y''(x) + (\rho^2 + \rho p_0(x) + q_0(x))y(x) = 0,\ x \in [0, d_0] \tag{4}$$

на цикле e_0 с начальными условиями $C(0, \rho) = S'(0, \rho) = 1$, $C'(0, \rho) = S(0, \rho) = 0$. Обозначим $H(\rho) := C(d_0, \rho) - S'(d_0, \rho)$, $h(\rho) := S(d_0, \rho)$. Пусть $\mathscr{V} = \{\nu_n\}$ — нули целой функции $h(\rho)$. Тогда $\{\nu_n\}$ являются собственными значениями краевой задачи $\mathscr{B}$ для уравнения (4) при граничных условиях $y(0) = y(d_0) = 0$. Через $\Omega = \{\omega_n\}$ обозначим Ω — последовательность для $\mathscr{B}$ [14].

Выберем и зафиксируем по одной граничной вершине $v_{\xi_i} \in R_i$ из каждого блока R_i, $i = \overline{1, N}$. Обозначим $\xi := \{k :\ \ k = \xi_1, \ldots, \xi_N\}$ — множество индексов ξ_i, $i = \overline{1, N}$.

Обратная задача 1. Даны $2^N + p - N$ спектров Λ_j, $j = \overline{0, p}$, $\Lambda_{\nu_1,\ldots,\nu_\gamma}$, $\gamma = \overline{2, N}$, $1 \leqslant \nu_1 < \ldots < \nu_\gamma \leqslant p$, $\nu_j \in \xi$, Ω, построить потенциалы P, Q на графе G.

Сформулируем теорему единственности решения этой обратной задачи. Для этого наряду с (P, Q) рассмотрим потенциалы $(\tilde{P}, \tilde{Q})$. Условимся, что если некоторый символ μ обозначает объект, относящийся к (P, Q), то $\tilde{\mu}$ будет обозначать аналогичный объект, относящийся к $(\tilde{P}, \tilde{Q})$.

Теорема 1. *Если* $\Lambda_j = \tilde{\Lambda}_j$, $j = \overline{0, p}$, $\Lambda_{\nu_1,\ldots,\nu_\gamma} = \tilde{\Lambda}_{\nu_1,\ldots,\nu_\gamma}$, $\gamma = \overline{2, N}$, $1 \leqslant \nu_1 < \ldots < \nu_\gamma \leqslant p$, $\nu_j \in \xi$, *и* $\Omega = \tilde{\Omega}$, *то* $Q = \tilde{Q}$, $P = \tilde{P}$ *на графе* G.

Эта теорема будет доказана в параграфе 2. Кроме того, мы дадим там конструктивную процедуру решения обратной задачи 1. В параграфе 1 вводятся основные понятия и доказываются вспомогательные утверждения.

1. СВОЙСТВА СПЕКТРАЛЬНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК

Пусть $S_j(x_j, \rho)$, $C_j(x_j, \rho)$, $j = \overline{1, r+N}$, $x_j \in [0, d_j]$ — решения уравнения (1) на ребре e_j при начальных условиях $S_j(0, \rho) = C'_j(0, \rho) = 0$, $S'_j(0, \rho) = C_j(0, \rho) = 1$.

При каждом фиксированном $x_j \in [0, d_j]$ функции $S_j^{(\nu)}(x_j, \rho)$, $C_j^{(\nu)}(x_j, \rho)$, $j = \overline{1, r+N}$, $\nu = 0, 1$, являются целыми по ρ экспоненциального типа. Кроме того, $\langle C_j(x_j, \rho), S_j(x_j, \rho)\rangle \equiv 1$, где $\langle y, z\rangle := yz' - y'z$ — вронскиан функций y и z. Зафиксируем $k = \overline{p+1, r}$. Обозначим $Q_k := \{z \in T: \ v_k < z\}$, $G_k := \overline{G \setminus Q_k}$. Тогда

$$Q_k = \bigcup_{e_i \in R(v_k)} T_{ki}\,,$$

где T_{ki} — дерево с корнем v_k и с корневым ребром e_i.

Обозначения. Если $D \subset G$ — граф, то через $B_0(D)$ обозначим краевую задачу для уравнения (1) на D со стандартными условиями склейки во внутренних вершинах и с краевыми условиями Дирихле в граничных вершинах. Пусть $\{Y\}_D := \{y_j\}_{e_j \in D}$. Если v_j — граничная вершина для D, то через $B_j(D)$ обозначим краевую задачу для уравнения (1) на D со стандартными условиями склейки во внутренних вершинах, с условием Неймана $Y'_{|v_j} = 0$ в вершине v_j и с краевыми условиями Дирихле в остальных граничных вершинах. Например, $B_0(G_k)$ — краевая задача на G_k с краевыми условиями $y_k(0) = 0$, $y_m(0) = 0$, $e_m \in E \cap G_k$, а $B_k(G_k)$ — краевая задача на G_k с краевыми условиями $y'_k(0) = 0$, $y_m(0) = 0$, $e_m \in (E \cap G_k) \setminus e_k$. Рассмотрим также краевую задачу $B^1(T_j)$ для уравнения (1) на $T_j \in R_i$ с краевыми условиями $Y'_{|u_i} = 0$, $Y_{|v_j} = 0$, $j = \Gamma \cap T_j$.

Зафиксируем граничную вершину $v_k \in \Gamma$. Пусть $\Phi_k = \{\Phi_{kj}\}_{j=\overline{1,r+N}}$ — решение уравнения (1) на G, удовлетворяющее условиям склейки (2), (3) и краевым условиям

$$\Phi_{kj}(0, \rho) = \delta_{kj}, \quad j = \overline{1, p}, \tag{5}$$

где δ_{kj} — символ Кронекера. Положим $M_k(\rho) := \Phi'_{kk}(0, \rho)$, $k = \overline{1, p}$. Функция $M_k(\rho, G) := M_k(\rho)$ называется функцией Вейля относительно граничной вершины v_k.

Обозначим $M^0_{kj}(\rho) = \Phi'_{kj}(0, \rho)$, $M^1_{kj}(\rho) = \Phi_{kj}(0, \rho)$, $j = \overline{1, r+N}$. Тогда

$$\Phi_{kj}(x_j, \rho) = M^1_{kj}(\rho) C_j(x_j, \rho) + M^0_{kj}(\rho) S_j(x_j, \rho), \quad j = \overline{1, r+N}. \tag{6}$$

В частности, $M^0_{kk}(\rho) = M_k(\rho, G)$, $M^1_{kk}(\rho) = 1$, $M^1_{kj}(\rho) = 0$ при $j = \overline{1, p} \setminus k$. Имеем

$$\Phi_{kk}(x_k, \rho) = C_k(x_k, \rho) + M_k(\rho, G) S_k(x_k, \rho) \tag{7}$$

и, следовательно,

$$\langle \Phi_{kk}(x_k, \rho),\, S_k(x_k, \rho)\rangle \equiv 1. \tag{8}$$

Подставляя (6) в (2), (3) и (5), получаем линейную алгебраическую систему D_k относительно $M^0_{kj}(\rho), M^1_{kj}(\rho)$, $j = \overline{1, r+N}$. Определитель $\Delta_0(\rho, G)$ этой системы не зависит от k и имеет вид

$$\Delta_0(\rho, G) = \sigma(\rho)\Big(a(\rho) + \sum_{k=1}^{N} \sum_{1 \leqslant \mu_1 < \ldots < \mu_k \leqslant N} a_{\mu_1 \ldots \mu_k}(\rho) \eta_{\mu_1}(\rho) \ldots \eta_{\mu_k}(\rho)\Big), \tag{9}$$

где

$$\sigma(\rho) = \prod_{k=1}^{m} \Delta_0(\rho, T_k), \quad \eta_i(\rho) = \sum_{j=s_{i-1}+1}^{s_i} \frac{\Delta^1(\rho, T_j)}{\Delta_0(\rho, T_j)}\,, \tag{10}$$

$$a(\rho) := C(d_0, \rho) + S'(d_0, \rho) - 2, \quad a_1(\rho) := h(\rho) = S(d_0, \rho), \tag{11}$$

а $\Delta_0(\rho, T_j)$, $\Delta^1(\rho, T_j)$ — характеристические функции краевых задач $B_0(T_j)$, $B^1(T_j)$ соответственно. Нам не нужны конкретные формулы для других коэффициентов $a_{\mu_1\ldots\mu_k}(\rho)$. Функция $\Delta_0(\rho, G)$ является целой по ρ экспоненциального типа, и ее нули (с учетом кратностей) совпадают с собственными значениями краевой задачи $B_0(G)$. Функция $\Delta_0(\rho, G)$ называется характеристической функцией для $B_0(G)$. Пусть $\Delta_{\nu_1,\ldots,\nu_\gamma}(\rho, G)$, $\gamma = \overline{1,p}$, $1 \leqslant \nu_1 < \ldots < \nu_\gamma \leqslant p$ — функция, получающаяся из $\Delta_0(\rho, G)$ заменой $S_j^{(\nu)}(d_j, \rho)$ на $C_j^{(\nu)}(d_j, \rho)$ для $j = \nu_1, \ldots, \nu_\gamma$, $\nu = 0, 1$. Функция $\Delta_{\nu_1,\ldots,\nu_\gamma}(\rho, G)$ является целой по ρ экспоненциального типа, и ее нули совпадают с собственными значениями краевой задачи $B_{\nu_1,\ldots,\nu_\gamma}(G)$. Функция $\Delta_{\nu_1,\ldots,\nu_\gamma}(\rho, G)$ называется характеристической функцией для $B_{\nu_1,\ldots,\nu_\gamma}(G)$. Имеем

$$\Delta_{\nu_1,\ldots,\nu_\gamma}(\rho, G) = \sigma_{(\nu_1,\ldots,\nu_\gamma)}(\rho)\Big(a(\rho) +$$
$$+ \sum_{k=1}^{N} \sum_{1 \leqslant \mu_1 < \ldots < \mu_k \leqslant N} a_{\mu_1\ldots\mu_k}(\rho)\eta_{\mu_1,(\nu_1,\ldots,\nu_\gamma)}(\rho)\ldots\eta_{\mu_k,(\nu_1,\ldots,\nu_\gamma)}(\rho)\Big), \tag{12}$$

где функции $\sigma_{(\nu_1,\ldots,\nu_\gamma)}(\rho)$ и $\eta_{i,(\nu_1,\ldots,\nu_\gamma)}(\rho)$ получаются из $\sigma(\rho)$ и $\eta_i(\rho)$ заменой $S_j^{(\nu)}(d_j, \rho)$ на $C_j^{(\nu)}(d_j, \rho)$ для $j = \nu_1, \ldots, \nu_\gamma$, $\nu = 0, 1$.

Решая алгебраическую систему D_k, получаем $M_{kj}^s(\rho) = \Delta_{kj}^s(\rho, G)/\Delta_0(\rho, G)$, $s = 0, 1$, $j = \overline{1, r+N}$, где определитель $\Delta_{kj}^s(\rho, G)$ получается из $\Delta_0(\rho, G)$ заменой столбца, соответствующего $M_{kj}^s(\rho)$, на столбец свободных членов. В частности,

$$M_k(\rho, G) = -\Delta_k(\rho, G)/\Delta_0(\rho, G), \quad k = \overline{1,p}. \tag{13}$$

Из (13) вытекает, что функции Вейля $M_k(\rho, G)$ являются мероморфными по ρ с множеством полюсов Λ_0 множеством нулей Λ_k.

Зафиксируем $k = \overline{p+1, r}$. Пусть $\Delta_0(\rho, G_k)$ и $\Delta_k(\rho, G_k)$ — характеристические функции задач $B_0(G_k)$ и $B_k(G_k)$ соответственно. Используя (9)–(11), вычисляем

$$\Delta_0(\rho, G) = \Delta_0(\rho, Q_k)\Delta_0(\rho, G_k) + \Big(\prod_{e_i \in R(v_k)} \Delta_0(\rho, T_{ki})\Big)\Delta_k(\rho, G_k), \tag{14}$$

где $\Delta_0(\rho, Q_k)$ и $\Delta_0(\rho, T_{ki})$ — характеристические функции для $B_0(Q_k)$ и $B_0(T_{ki})$ соответственно. Аналогично для $e_j \in E \cap T_{ks}$ имеем

$$\Delta_j(\rho, G) = \Delta_j(\rho, Q_k)\Delta_0(\rho, G_k) + \Big(\Delta_j(\rho, T_{ks}) \prod_{e_i \in R(v_k),\, i \neq s} \Delta_0(\rho, T_{ki})\Big)\Delta_k(\rho, G_k), \tag{15}$$

где $\Delta_j(\rho, Q_k)$ и $\Delta_j(\rho, T_{ki})$ строятся из $\Delta_0(\rho, Q_k)$ и $\Delta_0(\rho, T_{ki})$ заменой $S_j^{(\nu)}(d_j, \rho)$, $\nu = 0, 1$ на $C_j^{(\nu)}(d_j, \rho)$. Обозначим

$$\mathscr{E}_k(x_k) = \frac{1}{2}\int_0^{x_k} p_k(t)\,dt, \quad \theta_k = \frac{1}{2d_k}\int_0^{d_k} p_k(t)\,dt, \quad E^{\pm}(\rho) = \prod_{j=1}^{r+N} \exp(\mp i(\rho + \theta_j)d_j),$$

$$d := \sum_{j=1}^{r+N} \theta_j d_j = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{r+N} \int_0^{d_j} p_j(t)\,dt, \quad \tau = \operatorname{Im} \rho,$$

$$\Pi^{\pm} = \{\rho:\ \pm\tau \geqslant 0\}, \quad \Pi_\delta^{+} = \{\rho:\ \arg \rho \in [\delta, \pi - \delta]\}, \quad \Pi_\delta^{-} = \{\rho:\ \arg\rho \in [\pi + \delta, 2\pi - \delta]\}.$$

Без ограничения общности считаем, что $d = 0$. При каждом $x_k \in [0, d_k)$ имеем

$$\Phi_{kk}^{(\nu)}(x_k, \rho) = (\pm i\rho)^\nu \exp(\pm i(\rho x_k + \mathscr{E}_k(x_k)))[1], \quad \rho \in \Pi_\delta^{\pm},\ |\rho| \to \infty. \tag{16}$$

В частности,

$$M_k(\rho) = (\pm i \rho)[1], \quad \rho \in \Pi_\delta^{\pm}, \quad |\rho| \to \infty. \tag{17}$$

Кроме того, при $|\rho| \to \infty$, $k = \overline{1, r+N}$, равномерно по $x_k \in [0, d_k]$,

$$S_k^{(\nu)}(x_k, \rho) = \frac{1}{2(-i\rho)^{1-\nu}} \exp(-i(\rho x_k + \mathscr{E}_k(x_k)))[1] + \frac{1}{2(i\rho)^{1-\nu}} \exp(i(\rho x_k + \mathscr{E}_k(x_k)))[1]. \tag{18}$$

Аналогично получаем при $\rho \in \Pi_\delta^{\pm}$, $|\rho| \to \infty$:

$$\Delta_0(\rho, G) = \Delta_0^{\pm} \rho^{-p} E^{\pm}(\rho)[1], \quad \Delta_0^{\pm} \neq 0, \tag{19}$$

$$\Delta_k(\rho, G) = (\mp i\rho) \Delta_0^{\pm} \rho^{-p} E^{\pm}(\rho)[1], \quad k = \overline{1, p}, \tag{20}$$

$$\Delta_{\nu_1, \ldots, \nu_\gamma}(\rho, G) = (\mp i \rho)^\gamma \Delta_0^{\pm} \rho^{-p} E^{\pm}(\rho)[1],\ \gamma = \overline{1, N}, \quad 1 \leqslant \nu_1 < \ldots < \nu_\gamma \leqslant p. \tag{21}$$

2. РЕШЕНИЕ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ 1

В этом параграфе мы опишем конструктивную процедуру решения обратной задачи 1 и докажем его единственность. Сначала рассмотрим вспомогательные обратные задачи. Фиксируем граничную вершину $v_k \in \Gamma$, $k = \overline{1, p}$, и рассмотрим следующую обратную задачу на ребре e_k, которую будем обозначать IP(k).

IP(k). *Дана $M_k(\rho, G)$, построить $q_k(x_k)$, $p_k(x_k)$, $x_k \in [0, d_k]$.*

Теорема 2. *Если $M_k(\rho, G) = \tilde{M}_k(\rho, G)$, то $p_k(x_k) = \tilde{p}_k(x_k)$ и $q_k(x_k) = \tilde{q}_k(x_k)$ п.в. на $[0, d_k]$. Таким образом, задание функции Вейля M_k однозначно определяет потенциалы p_k и q_k на ребре e_k.*

Доказательство. Введем функции

$$P_{1s}^k(x_k, \rho) = (-1)^s \Big(\Phi_{kk}(x_k, \rho) \tilde{S}_k^{(2-s)}(x_k, \rho) - \tilde{\Phi}_{kk}^{(2-s)}(x_k, \rho) S_k(x_k, \rho) \Big), \quad s = 1, 2. \tag{22}$$

Из (8) выводим

$$S_k(x_k, \rho) = P_{11}^k(x_k, \rho) \tilde{S}_k(x_k, \rho) + P_{12}^k(x_k, \rho) \tilde{S}_k'(x_k, \rho). \tag{23}$$

Обозначим $\Omega_k(x_k) = \cos \hat{\mathscr{E}}_k(x_k)$, где $\hat{\mathscr{E}}_k(x_k) = \mathscr{E}_k(x_k) - \tilde{\mathscr{E}}_k(x_k)$. Учитывая (16), (18) и (22), получаем

$$P_{1s}^k(x_k, \rho) = \delta_{1s} \Omega_k(x_k) + O(\rho^{-1}), \quad \rho \in \Pi_\delta^{\pm}, \quad |\rho| \to \infty, \quad x_k \in (0, d_k), \quad s = 1, 2. \tag{24}$$

Используя (22) и (7), получаем, что при каждом фиксированном x_k функции $P^k_{1s}(x_k,\rho)$ являются целыми по ρ экспоненциального типа. Вместе с (24) это дает $P^k_{11}(x_k,\rho)\equiv\Omega_k(x_k)$, $P^k_{12}(x_k,\rho)\equiv 0$. Подставляя эти соотношения в (22) и (23), находим

$$(\tilde S_k(x_k,\rho))^{-1}S_k(x_k,\rho)=(\tilde\Phi_{kk}(x_k,\rho))^{-1}\Phi_{kk}(x_k,\rho), \tag{25}$$

при всех x_k и ρ. Используя (16) и (18), получаем при $|\rho|\to\infty$, $\rho\in\Pi^{\pm}_{\delta}$,

$$(\tilde S_k(x_k,\rho))^{-1}S_k(x_k,\rho)=\exp(\mp\hat{\mathscr{E}}_k(x_k))[1],\ (\tilde\Phi_{kk}(x_k,\rho))^{-1}\Phi_{kk}(x_k,\rho)=\exp(\pm\hat{\mathscr{E}}_k(x_k))[1].$$

Отсюда и из (25) выводим $\exp(2\hat{\mathscr{E}}_k(x_k))\equiv 1$. Так как $\hat{\mathscr{E}}_k(0)=0$, то $\hat{\mathscr{E}}_k(x_k)\equiv 0$, т. е. $P_{11}(x_k,\rho)\equiv 1$, $S_k(x_k,\rho)\equiv\tilde S_k(x_k,\rho)$, $\Phi_{kk}(x_k,\rho)\equiv\tilde\Phi_{kk}(x_k,\rho)$ и, следовательно, $q_k(x_k)=\tilde q_k(x_k)$, $p_k(x_k)=\tilde p_k(x_k)$ на $[0,d_k]$. □

Используя метод спектральных отображений [1] для оператора Штурма–Лиувилля на ребре e_k, получаем конструктивную процедуру решения обратной задачи IP(k).

Лемма 1. *Фиксируем $k=\overline{1,p}$. Задание двух спектров Λ_0 и Λ_k однозначно определяет функцию Вейля $M_k(\rho,G)$.*

Доказательство. Характеристические функции $\Delta_k(\rho,G)$, $k=\overline{0,p}$, являются целыми по ρ экспоненциального типа. По теореме Адамара

$$\Delta_k(\rho,G)=B_k\exp(A_k\rho)\Delta^*_k(\rho,G),\quad k=\overline{0,p}, \tag{26}$$

$$\Delta^*_k(\rho,G)=\rho^{\xi_k}\prod_{n\in\Lambda'_k}\Big(1-\frac{\rho}{\rho_{nk}}\Big)\exp(\rho/\rho_{nk}),\quad k=\overline{0,p}, \tag{27}$$

$\Lambda'_k=\{n:\ \rho_{nk}\neq 0\}$, и $\xi_k\geqslant 0$ — кратность нулевого собственного значения. В силу (13) и (26) заключаем

$$M_k(\rho,G)=-b_k\exp(a_k\rho)\frac{\Delta^*_k(\rho,G)}{\Delta^*_0(\rho,G)},\quad k=\overline{1,p}, \tag{28}$$

где $b_k=B_k/B_0$, $a_k=A_k-A_0$. Используя (17), вычисляем

$$a_k=\lim_{|\rho|\to\infty}\frac{1}{\rho}\ln\Big(\frac{\Delta^*_0(\rho,G)}{\Delta^*_k(\rho,G)}\Big),\quad \rho\in\Pi^{\pm}_{\delta},\quad k=\overline{1,p}, \tag{29}$$

$$b_k=\lim_{|\rho|\to\infty}\frac{(\mp i\rho)\Delta^*_0(\rho,G)\exp(-a_k\rho)}{\Delta^*_k(\rho,G)},\quad \rho\in\Pi^{\pm}_{\delta},\ k=\overline{1,p}. \tag{30}$$

Итак, мы однозначно построили $M_k(\rho,G)$ по формулам (27)–(30). □

Теперь рассмотрим вспомогательную обратную задачу IP(0) на цикле e_0.

IP(0). Даны $a(\rho)$, $h(\rho)$ и Ω, построить $p_0(x)$, $q_0(x)$, $x\in[0,d_0]$.

Эта задача является классической периодической обратной задачей на интервале $[0,d_0]$; она была решена в [15], где доказана единственность решения и получен алгоритм построения решения задачи IP(0).

Зафиксируем $k=\overline{0,p}$. Пусть задан спектр Λ_k краевой задачи $L_k(G)$. Тогда мы можем построить характеристическую функцию $\Delta_k(\rho,G)$ следующим образом.

Используя (26), (27) и асимптотику (19), (20), получаем при $\rho \in \Pi_\delta^{\pm}$, $|\rho| \to \infty$:

$$B_0 \exp(A_0\rho)\Delta_0^*(\rho, G) = \Delta_0^{\pm} \rho^{-p} E^{\pm}(\rho)[1],$$
$$B_k \exp(A_k\rho)\Delta_k^*(\rho, G) = (\mp i\rho)\rho^{-p}\Delta_0^{\pm} E^{\pm}(\rho)[1], \quad k = \overline{1,p}$$

и, следовательно,

$$A_k = -\kappa_k^{\pm} \mp i \sum_{j=1}^{r+N} d_j, \quad k = \overline{0,p}, \quad \kappa_k^{\pm} := \lim_{|\rho|\to\infty} \frac{\ln \Delta_k^*(\rho, G)}{\rho}, \quad \rho \in \Pi_\delta^{\pm}. \tag{31}$$

Далее,

$$B_k = \Delta_0^{\pm}\sigma_k^{\pm}, \quad k = \overline{0,p}, \tag{32}$$
$$\sigma_0^{\pm} = \lim_{|\rho|\to\infty} \frac{\exp(\kappa_0^{\pm}\rho)}{\rho^p \Delta_0^*(\rho, G)}, \quad \sigma_k^{\pm} = \lim_{|\rho|\to\infty} \frac{(\mp i\rho)\exp(\kappa_k^{\pm}\rho)}{\rho^p \Delta_k^*(\rho, G)}, \quad k = \overline{1,p}.$$

Аналогично, используя (21), получаем

$$\Delta_{\nu_1,\dots,\nu_\gamma}(\rho, G) = B_{\nu_1,\dots,\nu_\gamma} \exp(A_{\nu_1,\dots,\nu_\gamma}\rho)\Delta^*_{\nu_1,\dots,\nu_\gamma}(\rho, G), \quad \gamma = \overline{1,p}, \quad 1 \leqslant \nu_1 < \ldots < \nu_\gamma \leqslant p, \tag{33}$$

$$\Delta^*_{\nu_1,\dots,\nu_\gamma}(\rho, G) = \rho^{\xi_{\nu_1,\dots,\nu_\gamma}} \prod_{n\in\Lambda'_{\nu_1,\dots,\nu_\gamma}} \left(1 - \frac{\rho}{\rho_{n,\nu_1,\dots,\nu_\gamma}}\right) \exp(\rho/\rho_{n,\nu_1,\dots,\nu_\gamma}), \tag{34}$$

$$A_{\nu_1,\dots,\nu_\gamma} = -\kappa^{\pm}_{\nu_1,\dots,\nu_\gamma} \mp i \sum_{j=1}^{r+N} d_j, \quad \kappa^{\pm}_{\nu_1,\dots,\nu_\gamma} := \lim_{|\rho|\to\infty} \frac{\ln \Delta^*_{\nu_1,\dots,\nu_\gamma}(\rho, G)}{\rho}, \quad \rho \in \Pi_\delta^{\pm}, \tag{35}$$

$$B_{\nu_1,\dots,\nu_\gamma} = \Delta_0^{\pm}\sigma^{\pm}_{\nu_1,\dots,\nu_\gamma}, \quad \sigma^{\pm}_{\nu_1,\dots,\nu_\gamma} = \lim_{|\rho|\to\infty} \frac{(\mp i\rho)^\gamma \exp(\kappa^{\pm}_{\nu_1,\dots,\nu_\gamma}\rho)}{\rho^p \Delta^*_{\nu_1,\dots,\nu_\gamma}(\rho, G)}, \tag{36}$$

$\Lambda'_{\nu_1,\dots,\nu_\gamma} = \{n : \rho_{n,\nu_1,\dots,\nu_\gamma} \neq 0\}$, и $\xi_{\nu_1,\dots,\nu_\gamma} \geqslant 0$ — кратность нулевого собственного значения.

Теперь мы готовы описать конструктивную процедуру решения обратной задачи 1 и доказать его единственность. Пусть даны Λ_j, $j = \overline{0,p}$, $\Lambda_{\nu_1,\dots,\nu_\gamma}$, $\gamma = \overline{2,N}$, $1 \leqslant \nu_1 < \ldots < \nu_\gamma \leqslant p$, $\nu_j \in \xi$, и Ω. Процедура построения решения обратной задачи 1 состоит в реализации так называемых D_μ-процедур последовательно для $\mu = \sigma, \sigma - 1, \ldots, 1, 0$, где σ — высота T. Опишем D_μ-процедуры.

D_σ-процедура

1. При каждом $k = \overline{1,p}$ строим функцию Вейля $M_k(\rho, G)$, используя (27)–(30).

2. При каждом фиксированном $k = \overline{1,p}$ решаем обратную задачу IP(k) и находим потенциалы $p_k(x_k)$, $q_k(x_k)$, $x_k \in [0, d_k]$, на ребре e_k.

3. При каждом фиксированном $k = \overline{1,p}$ вычисляем $C_k^{(\nu)}(d_k, \rho)$, $S_k^{(\nu)}(d_k, \rho)$, $\nu = 0, 1$.

4. Строим $\Delta_0(\rho, G)$ и $\Delta_{\nu_1,\dots,\nu_\gamma}(\rho, G)$, $\gamma = \overline{1,N}$, $1 \leqslant \nu_1 < \ldots < \nu_\gamma \leqslant p$, $\nu_j \in \xi$, используя (26), (27) и (31)–(36).

5. Для каждой вершины $v_k \in V^{(\sigma-1)} \setminus \Gamma$ выбираем и фиксируем s и j так, что $e_j \in E \cap T_{ks}$. Решая линейную алгебраическую систему (14), (15), находим $\Delta_0(\rho, G_k)$ и $\Delta_k(\rho, G_k)$.

6. Для каждой $v_k \in V^{(\sigma-1)} \setminus \Gamma$ строим функцию Вейля $M_k(\rho, G_k)$ для G_k по формуле

$$M_k(\rho, G_k) = -\Delta_k(\rho, G_k)/\Delta_0(\rho, G_k). \tag{37}$$

Выполним теперь D_μ-процедуры последовательно при $\mu = \overline{2, \sigma - 1}$ по индукции. Фиксируем $\mu = \overline{2, \sigma - 1}$ и предположим, что $D_\sigma, \dots, D_{\mu+1}$-процедуры уже выполнены. Выполним D_μ-процедуру.

$\mathbf{D}_\mu$-процедура

1. При каждом фиксированном $e_k \in \mathscr{E}^{(\mu)}$ решаем обратную задачу IP(k) на G_k и находим потенциалы $p_k(x_k)$, $q_k(x_k)$, $x_k \in [0, d_k]$, на ребре e_k.

2. Для каждого $e_k \in \mathscr{E}^{(\mu)}$ вычисляем $C_k^{(\nu)}(d_k, \rho)$, $S_k^{(\nu)}(d_k, \rho)$, $\nu = 0, 1$.

3. Для каждой вершины $v_k \in V^{(\mu-1)} \setminus \Gamma$ выбираем и фиксируем s и j так, что $e_j \in E \cap T_{ks}$. Решая линейную алгебраическую систему (14), (15), находим $\Delta_0(\rho, G_k)$ и $\Delta_k(\rho, G_k)$.

4. Для каждой вершины $v_k \in V^{(\mu-1)} \setminus \Gamma$ вычисляем $M_k(\rho, G_k)$ для G_k по формуле (37).

$\mathbf{D}_1$-процедура

1. Для каждого ребра $e_k \in \mathscr{E}^{(1)}$ решаем обратную задачу IP(k) на G_k и находим потенциалы $p_k(x_k)$, $q_k(x_k)$, $x_k \in [0, d_k]$ на ребре e_k.

2. Для каждого $e_k \in \mathscr{E}^{(1)}$ вычисляем $C_k^{(\nu)}(d_k, \rho)$, $S_k^{(\nu)}(d_k, \rho)$, $\nu = 0, 1$.

3. Строим $a(\rho)$ и $a_1(\rho)$, используя (9) и (12).

$\mathbf{D}_0$-процедура

По $a(\rho)$, $h(\rho)$, Ω строим $q_0(x)$, $p_0(x)$, $x \in [0, d_0]$ на e_0, решая задачу IP(0).

Таким образом, выполняя последовательно $D_\sigma, D_{\sigma-1}, \dots, D_0$-процедуры, мы получили решение обратной задачи 1 и доказали его единственность.

Благодарности. Работа выполнена при поддержке Минобрнауки РФ (проект № 1.1660.2017/ПЧ) и РФФИ (проекты № 16-01-00015, 17-51-53180). .

Библиографический список

1. *Yurko V. A.* Method of Spectral Mappings in the Inverse Problem Theory. Inverse and Ill-posed Problems Series. Utrecht : VSP, 2002. 316 p.
2. *Marchenko V. A.* Sturm – Liouville Operators and Applications. Basel ; Switzerland : Birkhäuser Verlag, 1986. 393 p.
3. *Levitan B. M.* Inverse Sturm – Liouville problems. Utrecht : VNU Science Press, 1987. 246 p.
4. *Freiling G., Yurko V. A.* Inverse Sturm – Liouville Problems and their Applications. N. Y. : Nova Science Publ., 2001. 305 p.
5. *Beals R., Deift P., Tomei C.* Direct and Inverse Scattering on the Line // Math. Surveys and Monographs. Vol. 28. Providence, RI : Amer. Math. Soc., 1988. 209 p.
6. *Belishev M. I.* Boundary spectral Inverse Problem on a class of graphs (trees) by the BC method // Inverse Problems. 2004. Vol. 20, № 3. P. 647–672.
7. *Yurko V. A.* Inverse spectral problems for Sturm – Liouville operators on graphs // Inverse Problems. 2005. Vol. 21, № 3. P. 1075–1086.
8. *Brown B. M., Weikard R.* A Borg – Levinson theorem for trees // Proc. Royal Soc. Ser. A : Math. Phys. Eng. Sci. 2005. Vol. 461, № 2062. P. 3231–3243. DOI: 10.1098/rspa.2005.1513.

9. *Yang C.-Fu, Yang X.-P.* Uniqueness theorems from partial information of the potential on a graph // J. Inverse and Ill-Posed Problems. 2011. Vol. 19, № 4–5. P. 631–639. DOI: 10.1515/jiip.2011.059.
10. *Bondarenko N. P.* Inverse problems for the differential operator on the graph with a cycle with different orders on different edges // Tamkang J. Math. 2015. Vol. 46, № 3. P. 229–243. DOI: 10.5556/j.tkjm.46.2015.1694.
11. *Ignatyev M. Yu., Freiling G.* Spectral analysis for the Sturm – Liouville operator on sun-type graphs // Inverse Problems. 2011. Vol. 27, № 9, 095003. 17 p.
12. *Ignatyev M. Yu.* Inverse scattering problem for Sturm – Liouville operator on one-vertex noncompact graph with a cycle // Tamkang J. Math. 2011. Vol. 42, № 3. P. 365–384. DOI: 10.5556/j.tkjm.42.2011.913.
13. *Buterin S. A., Freiling G.* Inverse spectral-scattering problem for the Sturm – Liouville operator on a noncompact star-type graph // Tamkang J. Math. 2013. Vol. 44, № 3. P. 327–349. DOI: 10.5556/j.tkjm.44.2013.1422.
14. *Yurko V. A.* Inverse problems for non-selfadjoint quasi-periodic differential pencils // Anal. Math. Phys. 2012. Vol. 2, № 3. P. 215–230. DOI: 10.1007/s13324-012-0030-9.
15. *Марченко В. А., Островский И. В.* Характеристика спектра оператора Хилла // Матем. сб. 1975. Т. 97(139), № 4(8). С. 540–606.

Образец для цитирования:

Юрко В. А. О восстановлении дифференциальных пучков на графе-кусте // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2017. Т. 17, вып. 1. С. 51–61. DOI: 10.18500/1816-9791-2017-17-1-51-61.

On Recovering Differential Pencils on a Bush-type Graph

V. A. Yurko

Vjacheslav A. Yurko, Saratov State University, 83, Astrakhanskaya str., 410012, Saratov, Russia, Yurko-VA@info.sgu.ru

We study the inverse problem of spectral analysis for differential pencils on a bush-type graph, which is an arbitrary compact graph with one cycle. We pay the main attention to the most important nonlinear inverse problem of recovering coefficients of differential equations provided that the structure of the graph is known a priori. We use the standard matching conditions in the interior vertices and Dirichlet and Neumann boundary conditions in the boundary vertices. For this class of pencils properties of spectral characteristics are established, a constructive procedure is obtained for the solution of the inverse problem of recovering coefficients of differential operators from spectra, and the uniqueness of the solution is proved. For solving this inverse problem we use the method of spectral mappings, which allows one to construct the potential on each fixed edge. For transition to the next edge we use a special representation of the characteristic functions.

Key words: differential pencils, geometrical graph, inverse spectral problems.

Acknowledgements: This work was supported by the Ministry of Education and Science of Russian Federation (project no. 1.1660.2017/PCh) and by the Russian Foundation for Basic Research (projects no. 16-01-00015, no. 17-51-53180).

References

1. Yurko V. A. *Method of Spectral Mappings in the Inverse Problem Theory*. Inverse and Ill-posed Problems Series. Utrecht, VSP, 2002. 316 p.
2. Marchenko V. A. *Sturm – Liouville Operators and Applications*. Basel, Switzerland, Birkhäuser Verlag, 1986. 393 p.
3. Levitan B. M. *Inverse Sturm – Liouville problems*. Utrecht, VNU Science Press, 1987. 246 p.
4. Freiling G., Yurko V. A. *Inverse Sturm – Liouville Problems and their Applications*. New York, Nova Science Publ., 2001. 305 p.
5. Beals R., Deift P., Tomei C. *Direct and Inverse Scattering on the Line*. Math. Surveys and Monographs, vol. 28. Providence, RI, Amer. Math. Soc., 1988. 209 p.
6. Belishev M. I. Boundary spectral Inverse Problem on a class of graphs (trees) by the BC method. *Inverse Problems*, 2004, vol. 20, no. 3, pp. 647–672.
7. Yurko V. A. Inverse spectral problems for Sturm – Liouville operators on graphs. *Inverse Problems*, 2005, vol. 21, no. 3, pp. 1075–1086.
8. Brown B. M., Weikard R. A Borg – Levinson theorem for trees. *Proc. Royal Soc. Ser. A : Math. Phys. Eng. Sci.*, 2005, vol. 461, no. 2062, pp. 3231–3243. DOI: 10.1098/rspa.2005.1513.
9. Yang C-Fu, Yang X-P. Uniqueness theorems from partial information of the potential on a graph. *J. Inverse and Ill-Posed Problems*, 2011, vol. 19, no. 4–5, pp. 631–639. DOI: 10.1515/jiip.2011.059.
10. Bondarenko N. P. Inverse problems for the differential operator on the graph with a cycle with different orders on different edges. *Tamkang J. Math.*, 2015, vol. 46, no. 3, pp. 229–243. DOI: 10.5556/j.tkjm.46.2015.1694.
11. Ignatyev M. Yu., Freiling G. Spectral analysis for the Sturm – Liouville operator on sun-type graphs. *Inverse Problems*, 2011, vol. 27, no. 9, 095003, 17 p.
12. Ignatyev M. Yu. Inverse scattering problem for Sturm – Liouville operator on one-vertex noncompact graph with a cycle. *Tamkang J. Math.*, 2011, vol. 42, no. 3, pp. 365–384. DOI: 10.5556/j.tkjm.42.2011.913.
13. Buterin S. A., Freiling G. Inverse spectral-scattering problem for the Sturm – Liouville operator on a noncompact star-type graph. *Tamkang J. Math.*, 2013, vol. 44, no. 3, pp. 327–349. DOI: 10.5556/j.tkjm.44.2013.1422.
14. Yurko V. A. Inverse problems for non-selfadjoint quasi-periodic differential pencils. *Anal. Math. Phys.*, 2012, vol. 2, no. 3, pp. 215–230. DOI: 10.1007/s13324-012-0030-9.
15. Marchenko V. A., Ostrovskii I. V. A characterization of the spectrum of the Hill operator. *Math. USSR-Sb.*, 1975, vol. 26, iss. 4, pp. 493–554. DOI: 10.1070/SM1975v026n04ABEH002493.

Cite this article as:

Yurko V. A. On Recovering Differential Pencils on a Bush-type Graph. *Izv. Saratov Univ. (N. S.), Ser. Math. Mech. Inform.*, 2017, vol. 17, iss. 1, pp. 51–61 (in Russian). DOI: 10.18500/1816-9791-2017-17-1-51-61.