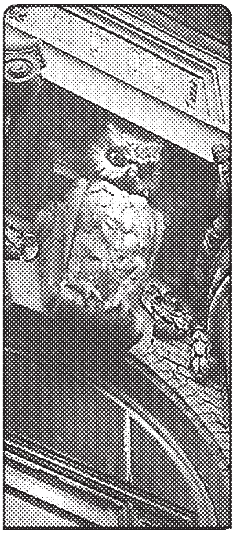

НАУЧНЫЙ ОТДЕЛ

МЕХАНИКА

УДК 517.958:53

ТОЧНЫЕ УЕДИНЕННО-ВОЛНОВЫЕ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ БЮРГЕРСА – ХАКСЛИ И БРЕДЛИ – ХАРПЕРА

А. И. Землянухин[1], А. В. Бочкарев[2]

[1]Землянухин Александр Исаевич, доктор физико-математических наук, заведующий кафедрой прикладной математики и системного анализа, Саратовский государственный технический университет имени Гагарина Ю. А., Россия, 410054, Саратов, Политехническая, 77, zemlyanukhinai@sstu.ru

[2]Бочкарев Андрей Владимирович, кандидат технических наук, доцент кафедры прикладной математики и системного анализа, Саратовский государственный технический университет имени Гагарина Ю. А., Россия, 410054, Саратов, Политехническая, 77, ab2009sar@list.ru

В статье показано, что точные солитоноподобные решения эволюционных уравнений нелинейной волновой механики можно получать прямым методом возмущений на основе решения линеаризованного уравнения. Сами решения представляют собой суммы рядов метода возмущений, найденные при помощи требования об их геометричности. Указанное требование приводит к условиям для коэффициентов уравнений и параметров искомых решений. Получены точные уединенно-волновые решения нелинейных неинтегрируемых уравнения Бюргерса – Хаксли и обобщенного уравнения Бредли – Харпера. Найдены условия, при которых эти решения имеют форму волнового фронта. Показано, что данные решения также могут быть найдены из систем уравнений Риккати, эквивалентных исходному уравнению. При помощи преобразования Коула – Хопфа обобщенное уравнение Бредли – Харпера сведено к линейному дифференциальному уравнению второго порядка с постоянными коэффициентами.

Ключевые слова: точные уединенно-волновые решения, метод возмущений, уравнение Риккати.

DOI: 10.18500/1816-9791-2017-17-1-62-70

ВВЕДЕНИЕ

Метод возмущений и его вариации [1] широко применяются для приближенного решения нелинейных уравнений, моделирующих, в частности, процессы распространения волн в деформируемых средах. Тем не менее среди большого количества методов нахождения точных уединенно-волновых решений неинтегрируемых эволюционных уравнений [2] практически ни один не основан на методе возмущений. Это объясняется тем, что солитон как существенно нелинейное явление не может быть получен ни в каком конечном порядке метода возмущений, сводящего исходное нелинейное уравнение к последовательности линеаризованных задач [3]. В первой части статьи на примере уравнения Бюргерса – Хаксли [4] показано, что ряды метода возмущений для неинтегрируемых уравнений при выполнении определенных условий для их коэффициентов могут стать геометрическими, при этом суммы рядов дают точные решения уравнений [5]. Во второй части продемонстрировано, что суммы упомянутых рядов и условия, при которых они становятся геометрическими, могут быть получены из решения пары уравнений Риккати, эквивалентных исходному уравнению. В третьей, четвертой и пятой частях рассмотрено обобщенное пространственно-одномерное уравнение Бредли – Харпера [6, 7]. Построено точное уединенно-волновое решение, установлена связь с парой уравнений Риккати, продемонстрирована возможность его неявной линеаризации на основе преобразования Коула – Хопфа.

1. ТОЧНЫЕ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ БЮРГЕРСА – ХАКСЛИ

Уравнение Бюргерса – Хаксли

$$u_t - u_{xx} - u - u^2 + \alpha u^3 + \beta u u_x = 0 \tag{1}$$

используется для моделирования многих нелинейных волновых явлений, например, процесса движения доменной стенки сегнетоэлектрика в электрическом поле, возмущения среднего уровня поверхности неглубокой жидкости, задач нелинейной акустики и т. п. [4].

В соответствии с методом возмущений будем искать решение уравнения (1) в форме ряда с параметром ε:

$$u = \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon^n u_n(x,t). \tag{2}$$

Подставляя (2) в (1), сгруппируем слагаемые по степеням ε. В первом порядке получим линейное уравнение для функции $u_1(x,t)$, имеющее частное решение $u_1(x,t) = \exp(kx - \omega t)$ при условии $\omega = -k^2 - 1$, являющемся дисперсионным соотношением линеаризованной задачи. Последовательно, решая уравнения в старших порядках, находим выражения для функций $u_n(x,t)$ в виде $u_n(x,t) = K_n u_1^n$. Заменой $z = \varepsilon u_1$ разложение (2) сводится к степенному ряду по z:

$$u = z + \frac{\beta k - 1}{2k^2 - 1} z^2 + \frac{3\beta^2 k^2 + 2\alpha k^2 - 5\beta k - \alpha + 2}{2\,(2k^2 - 1)\,(3k^2 - 1)} z^3 + \dots . \tag{3}$$

При выполнении условия

$$\alpha = \frac{k\,(\beta k - 1)\,(\beta - 2k)}{(2k^2 - 1)^2} \tag{4}$$

ряд (3) становится геометрическим:

$$u = z + \frac{(\beta k - 1)\, z^2}{2k^2 - 1} + \frac{(\beta k - 1)^2 z^3}{(2k^2 - 1)^2} + \frac{(\beta k - 1)^3 z^4}{(2k^2 - 1)^3} + \dots$$

и имеет сумму

$$u = \frac{z}{1 + \frac{1-\beta k}{2k^2-1} z} = \left(\frac{1}{z} + \frac{1-\beta k}{2k^2-1} \right)^{-1}. \tag{5}$$

Выражение (5) после возвращения к переменным x, t дает точное решение уравнения (1)

$$u = \left(\frac{1}{\varepsilon \mathrm{e}^{kx+(k^2+1)t}} + \frac{1-\beta k}{2k^2-1} \right)^{-1}, \tag{6}$$

зависящее от трех произвольных параметров ε, k, β и имеющее форму волнового фронта при $\frac{1-\beta k}{2k^2-1}\varepsilon > 0$.

Заметив, что произвольная постоянная E является решением уравнения (1) при условии $\alpha = \frac{E+1}{E^2}$, будем искать другие решения (1) в окрестности этой постоянной в форме

$$u = E + \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon^n u_n(x,t). \tag{7}$$

Подставляя (7) в (1) и повторяя шаги, описанные выше, получим

$$\sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon^n u_n(x,t) = z + \frac{(E\beta k + 2E + 3)\, z^2}{E\,(2k^2 + E + 2)} + \\ + \frac{(3E^2\beta^2k^2 + 10E^2\beta k + 15E\beta k + 2Ek^2 + 9E^2 + 2k^2 + 27E + 20)\, z^3}{2E^2\,(2k^2+E+2)\,(3k^2+E+2)} + \ldots . \tag{8}$$

Ряд (8) становится геометрическим при выполнении любого из двух условий:

$$\beta = \frac{2k^2 - E - 1}{Ek}, \quad \beta = \frac{2Ek^2 - E^2 + 2k^2 - 4E - 4}{(E+2)\, Ek}.$$

В первом случае сумма ряда (8) равна $\frac{z}{1-z/E}$ и точное решение имеет вид

$$u = \left(-\frac{\varepsilon}{E^2} e^{kx-(k^2+1)t} + \frac{1}{E} \right)^{-1}. \tag{9}$$

Во втором случае сумма ряда равна $\frac{z}{1-(E+1)z\big/(E^2+2E)}$ и дает точное решение

$$u = E + \left(\frac{1}{\varepsilon} e^{-kx+\frac{k^2E}{E+2}t} - \frac{E+1}{E\,(E+2)} \right)^{-1}. \tag{10}$$

Каждое из решений (9), (10) зависит от трех произвольных постоянных ε, k, E и имеет форму волнового фронта при условии $\varepsilon E < 0$ для (9) и $\frac{\varepsilon(E+1)}{E(E+2)} < 0$ — для (10).

2. ПОЛУЧЕНИЕ УРАВНЕНИЙ РИККАТИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ БЮРГЕРСА – ХАКСЛИ

Покажем, что, используя ряд метода возмущений, можно свести уравнение (1) к паре уравнений Риккати. Заменив в разложении (3) z на $\varepsilon \exp(kx - \omega t)$, подставим полученное выражение в уравнение Риккати:

$$u_x = Au^2 + Bu + C. \tag{11}$$

Для того чтобы (11) удовлетворялось тождественно, необходимо выполнение условий

$$A = \frac{(\beta k - 1)\, k}{2k^2 - 1}, \quad B = k, \quad C = 0, \tag{12}$$

а также равенства (4).

Диссипативное слагаемое u_{xx} в уравнении Бюргерса – Хаксли (1) с учетом (11) принимает вид

$$u_{xx} = 2A^2u^3 + 3ABu^2 + \left(2AC + B^2\right) u + BC. \tag{13}$$

Подставляя (11), (12) и (13) в (1), получаем уравнение Риккати вида

$$u_t = \frac{(\beta k - 1)\,(k^2+1)}{2k^2 - 1} u^2 + (k^2+1)u. \tag{14}$$

Таким образом, при выполнении (11) уравнение (1) переходит в уравнение (14). Другими словами, уравнение Бюргерса – Хаксли эквивалентно уравнению Риккати (14) при условии (11). Заметим, что в уравнениях Риккати (11), (14) искомая функция u зависит от переменных x и t.

Общее решение уравнения в частных производных (11) с коэффициентами (12) содержит произвольную функцию времени $F(t)$:

$$u = \left(F(t)e^{-kx} + \frac{1 - \beta k}{2k^2 - 1}\right)^{-1}. \tag{15}$$

Подставляя (15) в (14), получаем обыкновенное дифференциальное уравнение для определения $F(t)$:

$$F_t + (k^2+1)F = 0,$$

откуда $F = C_0 \mathrm{e}^{-(k^2+1)t}$, и общее решение уравнения (11) имеет вид (6), если положить $C_0 = 1/\varepsilon$. Можно показать, что решение (9) получается из системы уравнений Риккати вида

$$u_x = \frac{k}{E}u^2 + ku, \quad u_t = -\frac{k^2+1}{E}u^2 - (k^2+1)u,$$

а решение (10) — из системы

$$u_x = \frac{k\,(E+1)}{E\,(E+2)}u^2 + ku, \quad u_t = -\frac{k^2\,(E+1)}{(E+2)^2}u^2 - \frac{Ek^2}{E+2}u.$$

Известно, что уравнение Риккати линеаризуется при помощи преобразования Коула – Хопфа [2], в результате чего получается линейное обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами. В этом смысле эквивалентность неинтегрируемого уравнения Бюргерса – Хаксли паре уравнений Риккати аналогична существованию пар Лакса для интегрируемых уравнений [8].

3. ТОЧНОЕ РЕШЕНИЕ ОБОБЩЕННОГО УРАВНЕНИЯ БРЕДЛИ – ХАРПЕРА

Пространственно-одномерное уравнение Бредли – Харпера, которое часто называют обобщенным уравнением Курамото – Сивашинского, используется при математическом моделировании формирования неоднородного рельефа на поверхности пластинки при воздействии потока ионов [6] и имеет вид

$$u_t = u_x + \alpha u_{xx} + u_{xxx} + \beta u_{xxxx} + \lambda u_x^2 + \mu u_x u_{xx}. \tag{16}$$

Рассмотрим обобщение уравнения (16), содержащее в правой части произвольный полином 5-го порядка по нечетным степеням зависимой переменной

$$u_t = u_x + \alpha u_{xx} + u_{xxx} + \beta u_{xxxx} + \lambda u_x^2 + \mu u_x u_{xx} + a_1 u + a_3 u^3 + a_5 u^5. \tag{17}$$

Подставляя (2) в (17) и группируя по степеням ε, в первом порядке получаем однородное уравнение, имеющее частное решение $u_1(x,t) = \exp(kx - \omega t)$ при условии

$$\omega = -\left(\beta k^4 + k^3 + \alpha k^2 + a_1 + k\right). \tag{18}$$

Последовательно решая уравнения, возникающие в старших порядках по ε, находим выражения для функций $u_n(x,t)$ в виде $u_n(x,t) = K_n u_1^n$. Заменой $z = \varepsilon u_1$ разложение (2) сводится к степенному ряду по z:

$$\begin{gathered} u = z + \frac{k^2 (k\mu + \lambda)}{-14\beta k^4 - 6k^3 - 2\alpha k^2 + a_1} z^2 + \\ + \frac{6k^6\mu^2 + 10k^5\lambda\mu + (4\lambda^2 - 14a_3\beta) k^4 - 6a_3k^3 - 2a_3\alpha k^2 + a_1a_3}{2(-14\beta k^4 - 6k^3 - 2\alpha k^2 + a_1)(-39\beta k^4 - 12k^3 - 3\alpha k^2 + a_1)} z^3 + \dots . \end{gathered} \tag{19}$$

При выполнении условий

$$\begin{gathered} \lambda = -\frac{k\mu}{D}\left(-10\beta k^4 - 24k^3 - 10\alpha k^2 + 5a_1\right), \\ a_3 = -\frac{8k^6\mu^2}{D^2}\left(-2\beta k^4 - 2\alpha k^2 + 3a_1\right), \quad a_5 = \frac{128k^{12}\mu^4}{D^4}\left(-2\beta k^4 - 2\alpha k^2 + a_1\right), \end{gathered} \tag{20}$$

где $D = 46\beta k^4 - 2\alpha k^2 + a_1$, ряд (19) становится геометрическим

$$u = z - \frac{4k^3\mu}{D} z^2 + \frac{16k^6\mu^2}{D^2} z^3 - \dots$$

и имеет сумму

$$u = \frac{z}{1 + \frac{4k^3\mu}{D} z}. \tag{21}$$

Выражение (21) после возвращения к переменным x, t дает точное решение уравнения (17):

$$u = \left(\frac{1}{\varepsilon} e^{-kx - \left(\beta k^4 + k^3 + \alpha k^2 + a_1 + k\right)t} + \frac{4k^3\mu}{D}\right)^{-1}, \tag{22}$$

содержащее шесть произвольных постоянных ε, k, α, β, a_1, μ и имеющее форму волнового фронта при $\varepsilon k^3 \mu D > 0$.

4. ПОЛУЧЕНИЕ УРАВНЕНИЙ РИККАТИ ДЛЯ ОБОБЩЕННОГО УРАВНЕНИЯ БРЕДЛИ – ХАРПЕРА

Действуя, как и ранее в параграфе 1, заменим в разложении (19) z на $\varepsilon \exp(kx - \omega t)$, где ω определяется равенством (18) и подставим полученное выражение в уравнение Риккати (11). Сгруппировав слагаемые по степеням экспоненциальной функции, потребуем равенства нулю коэффициентов перед ними — получим бесконечную систему уравнений. Из первых трех уравнений системы найдем

$$A = \frac{(k\mu + \lambda) k^3}{-14\beta k^4 - 6k^3 - 2\alpha k^2 + a_1}, \quad B = k, \quad C = 0. \tag{23}$$

Следующие три уравнения приводят к равенствам (20). При выполнении (23) и (20) все последующие уравнения системы удовлетворяются тождественно.

Используя равенство (11), получим выражения для частных производных по x высших порядков:

$$u_{xx} = 2A^2u^3 + 3ABu^2 + \left(2AC + B^2\right) u + BC, \tag{24}$$

$$u_{xxx} = 6A^3u^4 + 12A^2Bu^3 + \left(8A^2C + 7AB^2\right) u^2 + \left(8ABC + B^3\right) u + 2AC^2 + B^2C, \tag{25}$$

$$u_{xxxx} = 24A^4u^5 + 60A^3Bu^4 + \left(40A^3C + 50A^2B^2\right) u^3 + \left(60A^2BC + 15AB^3\right) u^2 + \\ + \left(16A^2C^2 + 22AB^2C + B^4\right) u + 8ABC^2 + B^3C, \tag{26}$$

Подставив (11) и (24)–(26) в обобщенное уравнение Бредли – Харпера (17), учтем равенства (23) и (20). В результате получаем уравнение Риккати вида

$$u_t = -\frac{4k^3\mu\left(\beta k^4 + k^3 + \alpha k^2 + a_1 + k\right)}{D}u^2 + \left(\beta k^4 + k^3 + \alpha k^2 + a_1 + k\right) u. \tag{27}$$

Подставляя λ из (20) в (23), полученные в (11) выражения для постоянных A, B, C, имеем второе уравнение Риккати:

$$u_x = -\frac{4k^4\mu}{D}u^2 + ku. \tag{28}$$

Заметим, что из пропорциональности правых частей (27) и (28) следует

$$u_t = \frac{\beta k^4 + k^3 + \alpha k^2 + a_1 + k}{k}u_x = -\frac{\omega}{k}u_x. \tag{29}$$

Аналогично параграфу 2 можно показать, что решение системы уравнений (28), (29) совпадает с решением (22) уравнения (17) при соответствующем выборе постоянных интегрирования.

5. НЕЯВНАЯ ЛИНЕАРИЗАЦИЯ ОБОБЩЕННОГО УРАВНЕНИЯ БРЕДЛИ – ХАРПЕРА

Известно, что уравнение Риккати (11) при помощи преобразования Коула – Хопфа

$$u = \gamma\frac{\phi_x}{\phi}, \tag{30}$$

в котором $\phi = \phi(x,t)$ — новая зависимая переменная, а γ — постоянная, сводится к линейному уравнению второго порядка с постоянными коэффициентами [4]:

$$\phi_{xx} - B\phi_x + AC\phi = 0, \tag{31}$$

если $\gamma = -1/A$.

Покажем, что точное решение обобщенного уравнения Бредли – Харпера (17) определяется по формуле (30), в которой функция $\phi(x,t)$ является решением линейного уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами (31).

Общее решение уравнения (31), найденное с учетом значений постоянных (23), содержит две произвольные функции $F_1(t)$ и $F_2(t)$:

$$\phi(x,t) = F_1(t) + F_2(t)e^{kx}. \tag{32}$$

Подставим (32) в (30):

$$u = -\frac{F_2(t)e^{kx}\left(-14\beta k^4 - 6k^3 - 2\alpha k^2 + a_1\right)}{k^2\left(k\mu + \lambda\right)\left(F_1(t) + F_2(t)e^{kx}\right)}, \qquad (33)$$

чтобы затем подставить функцию (33) в уравнение (17) и перенести все слагаемые в левую часть. Учитывая равенства (20), произведем факторизацию левой части, выделим ведущий множитель, содержащий производные функций $F_1(t)$, $F_2(t)$, и приравняем его к нулю:

$$F_1F_2' - F_1'F_2 - \left(\beta k^4 + k^3 + \alpha k^2 + a_1 + k\right)F_1F_2 = 0.$$

Разделив последнее уравнение почленно на F_2^2 и обозначив $F(t) = \frac{F_1(t)}{F_2(t)}$, получим дифференциальное уравнение для функции $F(t)$:

$$F' + \left(\beta k^4 + k^3 + \alpha k^2 + a_1 + k\right)F = 0,$$

общее решение которого будет иметь вид

$$F = C_0 e^{-\left(\beta k^4 + k^3 + \alpha k^2 + a_1 + k\right)t}. \qquad (34)$$

Замечая, что после почленного деления на F_2 выражение (33) зависит только от отношения F_1/F_2, заменим это отношение в (33) на правую часть равенства (34). В результате равенству (33) можно придать вид

$$u = \frac{\mathrm{e}^{kx}\left(46\beta k^4 - 2\alpha k^2 + a_1\right)}{4k^3\mu\left(C_0 e^{-(\beta k^4 + k^3 + \alpha k^2 + a_1 + k)t} + e^{kx}\right)}. \qquad (35)$$

Выражение (35) содержит шесть произвольных постоянных α, β, μ, k, C_0, a_1 и является точным решением уравнения (17). После подстановки $C_0 = \frac{46\beta k^4 - 2\alpha k^2 + a_1}{4\varepsilon k^3\mu}$ выражение (35) совпадает с решением (22), найденным выше при помощи метода возмущений.

Благодарности. Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 16-01-00176а).

Библиографический список

1. *Коул Дж.* Методы возмущений в прикладной математике. М. : Мир, 1972. 276 с.
2. *Кудряшов Н. А.* Методы нелинейной математической физики. Долгопрудный : Изд. дом «Интеллект», 2010. 368 с.
3. *Маневич Л. И.* Линейная и нелинейная математическая физика: от гармонических волн к солитонам // Соросовский образовательный журн. 1996. № 1. С. 86–93.
4. Macias-Diaz J. E., Ruiz-Ramirez J., Villa J. The numerical solution of a generalized Burgers – Huxley equation through a conditionally bounded and symmetry-preserving method // Computers and Mathematics with Applications. 2011. Vol. 61. P. 3330–3342. DOI: 10.1016/j.camwa.2011.04.022.
5. *Землянухин А. И., Бочкарев А. В.* Метод возмущений и точные решения уравнений нелинейной динамики сред с микроструктурой // Вычисл. мех. сплош. сред. 2016. Т. 9, № 2. С. 182–191. DOI: 10.7242/1999-6691/2016.9.2.16.

6. *Куликов А. Н., Куликов Д. А.* Формирование волнообразных наноструктур на поверхности плоских подложек при ионной бомбардировке // Журн. вычисл. матем. и матем. физ. 2012. Т. 52, № 5. С. 930–945.
7. Kulikov D. A. Spatially inhomogeneous dissipative structures in a periodic boundary-value problem for nonlocal erosion equation // J. Math. Sci. 2015. Vol. 205, № 6. P. 791–805. DOI: 10.1007/s10958-015-2284-x.
8. *Абловиц М., Сигур Х.* Солитоны и метод обратной задачи : пер. с англ. М. : Мир, 1987. 479 с.

Образец для цитирования:
Землянухин А. И., Бочкарев А. В. Точные уединенно-волновые решения уравнений Бюргерса – Хаксли и Бредли – Харпера // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2017. Т. 17, вып. 1. С. 62–70. DOI: 10.18500/1816-9791-2017-17-1-62-70.

Exact Solitary-wave Solutions of the Burgers – Huxley and Bradley – Harper Equations

A. I. Zemlyanukhin[1], **A. V. Bochkarev**[2]

[1] Alexander I. Zemlyanukhin, Yuri Gagarin State Technical University of Saratov, 77, Politechnicheskaya str., 410054, Saratov, Russia, zemlyanukhinai@sstu.ru
[2] Andrey V. Bochkarev, Yuri Gagarin State Technical University of Saratov, 77, Politechnicheskaya str., Saratov, Russia, 410054, ab2009sar@list.ru

It is shown that the exact soliton-like solutions of nonlinear wave mechanics evolution equations can be obtained by direct perturbation method based on the solution of a linearized equation. The sought solutions are sums of the perturbation series which can be found using the requirement that the series are to be geometric. This requirement leads to the conditions for the coefficients of the equations and parameters of the sought solutions. The exact solitary-wave solutions of the nonlinear non-integrable Burgers–Huxley equation and the generalized Bradley–Harper equation are obtained. The conditions are formulated under which these solutions have the form of a wave front. It is shown that these solutions can also be found from the system of Riccati equations, that is equivalent to the original equation. By utilizing the Cole–Hopf transformation, the generalized Bradley–Harper equation is reduced to a second-order linear differential equation with constant coefficients.

Key words: exact solitary-wave solution, perturbation method, Riccati equation.

Acknowledgements: This work was supported by the Russian Foundation for Basic Research (project no. 16-01-00176a).

References

1. Cole J. D. *Perturbation Methods in Applied Mathematics*. Ginn, Blaisdell, Waltham, Mass, 1968. 260 p. (Russ. ed.: Cole J. D. *Metody vozmushhenij v prikladnoj matematike*. Moscow, Mir, 1972. 276 p.)
2. Kudryashov N. A. *Metody nelinejnoj matematicheskoj fiziki* [Methods of nonlinear mathematical physics]. Dolgoprudnyj, Izd. dom “Intellekt”, 2010. 368 p. (in Russian).
3. Manevich L. I. Linejnaja i nelinejnaja matematicheskaja fizika: ot garmonicheskih voln k solitonam [Linear and nonlinear mathematical physics: from harmonic waves to solitons]. *Sorosovskij obrazovatel’nyj zhurnal*, 1996, no. 1, pp. 86–93 (in Russian).

4. Macias-Diaz J. E., Ruiz-Ramirez J., Villa J. The numerical solution of a generalized Burgers-Huxley equation through a conditionally bounded and symmetry-preserving method. *Computers and Mathematics with Applications*, 2011, vol. 61, pp. 3330–3342. DOI: 10.1016/j.camwa.2011.04.022.
5. Zemlyanukhin A. I., Bochkarev A. V. Metod vozmushhenij i tochnye reshenija uravnenij nelinejnoj dinamiki sred s mikrostrukturoj [The perturbation method and exact solutions of nonlinear dynamics equations for media with microstructure]. *Vyichisl. meh. splosh. sred*, 2016, vol. 9, no. 2, pp. 182–191 (in Russian) DOI: 10.7242/1999-6691/2016.9.2.16.
6. Kulikov A. N., Kulikov D. A. Formation of wavy nanostructures on the surface of flat substrates by ion bombardment. *Comput. Math. Math. Phys.*, 2012, vol. 52, no. 5, pp. 800—814. DOI: 10.1134/S0965542512050132.
7. Kulikov D. A. Spatially inhomogeneous dissipative structures in a periodic boundary-value problem for nonlocal erosion equation. *J. Math. Sci.*, 2015, vol. 205, no. 6, pp. 791–805. DOI: 10.1007/s10958-015-2284-x.
8. Ablowitz M., Segur H. *Solitons and the Inverse Scattering Transform*. Philadelphia, SIAM, 1981. 425 p.

Cite this article as:
Zemlyanukhin A. I., Bochkarev A. V. Exact Solitary-wave Solutions of the Burgers – Huxley and Bradley – Harper Equations. *Izv. Saratov Univ. (N. S.), Ser. Math. Mech. Inform.*, 2017, vol. 17, iss. 1, pp. 62–70 (in Russian). DOI: 10.18500/1816-9791-2017-17-1-62-70.