УДК 519.872

МЕТОД АНАЛИЗА ЗАМКНУТЫХ СЕТЕЙ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ С ДИСКРЕТНЫМ ВРЕМЕНЕМ, ГРУППОВЫМИ ПЕРЕХОДАМИ ТРЕБОВАНИЙ И ДИНАМИЧЕСКИМ УПРАВЛЕНИЕМ ИНТЕНСИВНОСТЯМИ ОБСЛУЖИВАНИЯ

Ю. И. Митрофанов[1], В. И. Долгов[2], Е. С. Рогачко[3], Е. П. Станкевич[4]

[1]Митрофанов Юрий Иванович, доктор технических наук, заведующий кафедрой системного анализа и автоматического управления, Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского, Россия, 410012, Саратов, Астраханская, 83, MitrophanovYuI@info.sgu.ru

[2]Долгов Виталий Игоревич, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры системного анализа и автоматического управления, Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского, Россия, 410012, Саратов, Астраханская, 83, www@vidolgov.ru

[3]Рогачко Екатерина Сергеевна, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры системного анализа и автоматического управления, Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского, Россия, 410012, Саратов, Астраханская, 83, RogachkoES@info.sgu.ru

[4]Станкевич Елена Петровна, старший преподаватель кафедры системного анализа и автоматического управления, Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского, Россия, 410012, Саратов, Астраханская, 83, StankevichElena@mail.ru

Рассматриваются однородные замкнутые сети массового обслуживания с дискретным временем и групповыми переходами требований. Системы обслуживания включают несколько одинаковых обслуживающих приборов с геометрическим распределением длительностей обслуживания. Предлагается метод динамического управления интенсивностями обслуживания требований в системах. Управление осуществляется посредством использования в процессе функционирования сетей различных интенсивностей обслуживания в течение интервалов времени определенной длительности. При использовании данного метода в сетях обслуживания рассматриваемого класса обеспечивается близкое к заданному распределение требований по системам. Предлагаются модели эволюции и методы анализа однородных замкнутых сетей массового обслуживания с дискретным временем и групповыми переходами требований без управления и с управлением интенсивностями обслуживания. Эти методы обеспечивают возможность вычисления основных стационарных характеристик сетей обслуживания рассматриваемых классов. Приводится пример сети обслуживания с управлением интенсивностями обслуживания. Результаты анализа этой сети показали эффективность метода управления интенсивностями обслуживания и приемлемую для практических приложений точность метода анализа.

Ключевые слова: замкнутые сети массового обслуживания, геометрическое распределение длительностей обслуживания, групповые переходы требований, управление интенсивностями обслуживания, анализ сетей массового обслуживания, стационарные характеристики.

DOI: 10.18500/1816-9791-2017-17-1-96-108

ВВЕДЕНИЕ

Системы и сети массового обслуживания с дискретным временем в настоящее время широко используются в качестве математических моделей сложных стохастических систем с сетевой структурой, функционирующих в дискретном времени, например, телекоммуникационных и вычислительных систем и сетей [1–4]. Эволюция сложных стохастических сетевых систем и устранение негативного влияния на качество их функционирования случайных факторов, событий и процессов обеспечивается, как правило, использованием в таких системах развитых подсистем управления. Необходимость решения практических задач, связанных с разработкой, модификацией и исследованием таких систем и созданием их математических моделей, обусловила интенсивное развитие теории и методов анализа сетей массового обслуживания с управлением. В частности, одной из актуальных проблем в этой области является разработка и развитие методов динамического управления интенсивностями обслуживания требований, а также разработка методов анализа сетей обслуживания с такими методами управления. Большинство результатов, связанных с разработкой методов управления интенсивностями обслуживания и методов анализа сетей обслуживания с управлением, получено для сетей массового обслуживания с непрерывным временем, в том числе для экспоненциальных сетей, или сетей Джексона [5–10].

В данной статье рассматривается метод динамического управления интенсивностями обслуживания в однородной замкнутой сети массового обслуживания с дискретным временем и групповыми переходами требований. При его разработке предполагалось, что в сети обслуживания используется централизованная система управления, обеспечивающая идентификацию состояний сети обслуживания в заданные моменты времени и формирование зависящих от этих состояний управляющих воздействий на сеть. Групповые переходы требований между системами сети массового обслуживания являются особенностями сетей с дискретным временем и вызваны возможностью одновременного завершения обслуживания нескольких требований в системах и групповых поступлений требований в системы сети, происходящих в дискретные моменты времени [11–15]. Стационарное распределение сети массового обслуживания с групповыми переходами требований вычисляется как стационарное распределение модельной цепи Маркова, описывающей эволюцию сети [16]. Для моделирования эволюции рассматриваемой сети массового обслуживания с управлением интенсивностями обслуживания также используются цепи Маркова, приводится метод вычисления стационарных характеристик сети. Дается пример анализа гипотетической сети массового обслуживания рассматриваемого типа.

1. ОПИСАНИЕ СЕТИ С ГРУППОВЫМИ ПЕРЕХОДАМИ ТРЕБОВАНИЙ

Пусть N — замкнутая сеть массового обслуживания, содержащая L систем массового обслуживания S_i, $i \in I = \{1, \ldots, L\}$, и H требований одного класса. Вероятности перехода требований между системами сети определяются неприводимой маршрутной матрицей $\Theta = (\theta_{ij})$, $i, j = 1, \ldots, L$. Система S_i, $i = 1, \ldots, L$, включает κ_i одинаковых обслуживающих приборов и бункер емкости $H - \kappa_i$; $K = \sum\limits_{i=1}^{L} \kappa_i$. Состояние сети N определяется вектором $s = (s_i)$, $i = 1, \ldots, L$, где s_i — число требований, находящихся в системе S_i; множество X состояний сети имеет мощность

$c_X = |X|$; обозначим через $s^{(n)} \in X$ состояние сети с номером n, $n \in B = \{1, \dots, c_X\}$. В системе S_i, $i \in I$, число занятых обслуживающих приборов h_i, число свободных обслуживающих приборов g_i и число находящихся в бункере требований b_i зависят от числа требований s_i и

$$h_i = \min\{s_i, \kappa_i\}, \qquad g_i = \kappa_i - h_i, \qquad b_i = \max\{0, s_i - \kappa_i\}.$$

Все события в системах сети, связанные с завершением обслуживания требований, уходом и поступлением групп требований, поступлением требований из бункеров на свободные обслуживающие приборы, происходят в дискретные моменты времени, интервалы между которыми называются слотами. Длительность каждого слота является фиксированной и полагается равной единице. Длительность обслуживания требований во всех системах S_i, $i \in I$, равная целому числу слотов, является дискретной случайной величиной ξ_i с геометрическим распределением с параметром μ_i, $0 < \mu_i < 1$, принимающей значения $k = 1, 2, \dots$ с вероятностями

$$P\{\xi_i = k\} = (1 - \mu_i)^{k-1}\mu_i.$$

Из данной формулы при $k = 1$ следует, что вероятность завершения обслуживания требования в слоте равна μ_i. Интенсивность обслуживания требований одним прибором в системе S_i, $i \in I$, также равна μ_i; $\mu = (\mu_i)$, $i = 1, \dots, L$, — вектор интенсивностей обслуживания в системах сети N.

В каждом слоте в сети N выполняется следующая последовательность действий. В начале слота определяется состояние сети s, в котором сеть пребывает в течение слота. Требования, обслуживание которых будет завершено в конце слота в системе S_i, $i \in I$, образуют группу d_i уходящих из системы требований; число требований в группе случайно, $d_i \leqslant h_i$. В конце слота формируется вектор $d = (d_i)$, $i = 1, \dots, L$, требований, выходящих после завершения обслуживания из систем; множество всех векторов d обозначим через D,

$$D = \left\{ d = (d_1, \dots, d_L) : \ 0 \leqslant d_i \leqslant \kappa_i, \ i = 1, \dots, L, \ \sum_{i=1}^{L} d_i \leqslant \min\{K, H\} \right\}.$$

Из группы d_i, $i \in I$, требований в соответствии с реализуемым алгоритмом маршрутизации требований (определяемым матрицей Θ) формируются направляемые из S_i в S_j подгруппы d_{ij} требований, $j \in V_i$, V_i — множество номеров выходных смежных с S_i систем. Из подгрупп d_{ij}, $j \in I$, $i \in U_j$, U_j — множество номеров входных смежных с S_j систем, образуется группа a_j требований, поступающих в S_j. Эти требования сначала поступают в бункер системы S_j. Если в системе S_j есть свободные обслуживающие приборы, т. е. $g_j + d_j > 0$, то из бункера согласно дисциплине обслуживания Random производится выбор требований на обслуживание; число выбираемых из бункера требований равно $\min\{b_j + a_j, g_j + d_j\}$. Таким образом, в конце слота вектор d преобразуется в вектор $a = (a_j)$, $j = 1, \dots, L$, требований, поступающих в системы обслуживания сети; множество всех векторов a обозначим через A,

$$A = \left\{ a = (a_1, \dots, a_L) : \ 0 \leqslant a_j \leqslant \min\{K, H\}, \ j = 1, \dots, L, \ \sum_{j=1}^{L} a_j \leqslant \min\{K, H\} \right\}.$$

Очевидно, что $A \supseteq D$. Так как векторы d и a содержат одинаковое число требований, будет сформировано новое состояние сети $s' = s - d + a$.

2. АНАЛИЗ СЕТИ С ГРУППОВЫМИ ПЕРЕХОДАМИ ТРЕБОВАНИЙ

Обозначим $p_{s,d}$ — вероятность формирования вектора уходящих требований $d \in D$ при пребывании сети N в состоянии $s \in X$, ρ_{da} — вероятность преобразования вектора уходящих требований d в вектор поступающих требований $a \in A$. Так как вероятность завершения обслуживания в слоте в системе S_i, $i \in I$, ровно d_i требований определяется биномиальным распределением с параметрами h_i и μ_i, то

$$p_{s,d} = \prod_{i=1}^{L} \binom{h_i}{d_i} \mu_i^{d_i} (1-\mu_i)^{h_i - d_i}.$$

Вероятности ρ_{da} при независимой маршрутизации требований в сети N имеют вид [16]

$$\rho_{da} = \sum_{d_{ij} \in E} \prod_{i=1}^{L} \binom{d_i}{d_{i1}, \ldots, d_{iL}} \prod_{j=1}^{L} \theta_{ij}^{d_{ij}},$$

где

$$E = \left\{ d_{ij},\ i = 1, \ldots, L,\ j \in V_i :\ \sum_{i=1}^{L} d_{ij} = a_j \right\}.$$

Эволюция сети N описывается цепью Маркова ν с дискретным временем и множеством состояний B. Обозначим через $P = (p_{mn})$, $m, n = 1, \ldots, c_X$, матрицу вероятностей перехода цепи ν. Элементы матрицы P определяются выражением [16]

$$p_{mn} = \sum_{\substack{d \in D,\, a \in A: \\ s^{(m)} - d + a = s^{(n)}}} p_{s,da}, \tag{1}$$

где

$$p_{s,da} = p_{s,d} \rho_{da}, \qquad s = s^{(m)}. \tag{2}$$

Стационарное распределение цепи ν является стационарным распределением сети N. Обозначим через $\pi = (\pi_n)$, $n = 1, \ldots, c_X$, стационарное распределение сети N. Из конечности множества состояний B следует, что распределение π существует и является единственным решением уравнения $\pi = \pi P$ с условием $\sum\limits_{n \in B} \pi_n = 1$.

Обозначим $\bar{s}_i$ — математическое ожидание (м. о.) числа требований в системе S_i, $i \in I$, $\bar{h}_i$ — м. о. числа занятых обслуживающих приборов в системе S_i, λ_i — интенсивность входящего потока требований в систему S_i, $\bar{u}_i$ — м. о. длительности пребывания требований в системе S_i, ψ_i — коэффициент использования обслуживающих приборов системы S_i.

Приведем формулы для вычисления основных стационарных характеристик системы S_i, $i \in I$, сети N:

$$\bar{s}_i = \sum_{k=1}^{H} k P\{s_i = k\},$$

где

$$P\{s_i = k\} = \sum_{n \in B:\, s_i^{(n)} = k} \pi_n,$$

$$\bar{h}_i = \sum_{k=1}^{H} \min\{k, \kappa_i\} P\{s_i = k\}, \qquad \lambda_i = \bar{h}_i \mu_i; \qquad \bar{u}_i = \bar{s}_i / \lambda_i; \qquad \psi_i = \bar{h}_i / \kappa_i. \quad (3)$$

3. УПРАВЛЕНИЕ ИНТЕНСИВНОСТЯМИ ОБСЛУЖИВАНИЯ

Пусть N^c — сеть массового обслуживания, которая отличается от сети N только тем, что в ней используется динамическое управление интенсивностями обслуживания. Целью управления является приближение математических ожиданий числа требований в системах сети к требуемому распределению, называемому базовым. Оно определяется заданным состоянием $s^\circ \in X$. Рассматриваются два подмножества множества состояний X: Y — множество доминантных состояний, Z — множество ординарных состояний, $X = Y \cup Z$; $c_Y = |Y|$, $c_Z = |Z|$, $c_X = c_Y + c_Z$. При формировании множеств Y и Z используется вектор $q = (q_i)$, $i = 1, \ldots, L$, граничных значений числа требований в системах. Состояние $s \in X$, для которого справедливы неравенства

$$|s_i - s_i^\circ| \leqslant q_i, \qquad i = 1, \ldots, L,$$

относится к множеству Y, иначе — к множеству Z. Упорядочим состояния в множестве X таким образом, что $s^{(n)} \in Y$, если $n \in \{1, \ldots, c_Y\}$, и $s^{(n)} \in Z$, если $n \in \{c_Y + 1, \ldots, c_Y + c_Z\}$; базовое состояние s° имеет номер $n = 1$.

В соответствии с интервальным методом управления [6] различаются два режима функционирования сети N^c — нормальный и коррективный. Периоды функционирования сети в этих режимах называются соответственно нормальным и коррективным тактами. Все такты имеют фиксированную длительность φ (φ — целое число слотов). Такты отличаются используемыми в системах сети интенсивностями обслуживания — в нормальном такте используется вектор $\mu = (\mu_i)$, $i = 1, \ldots, L$, в коррективном такте — вектор $\mu^J = (\mu_i^J)$, $i = 1, \ldots, L$, $J \in \{1, \ldots, c_Z\}$, соответствующий состоянию сети $s^{(n)} \in Z$, $n = c_Y + J$, в момент начала текущего такта. Нормальный такт начинается всегда в одном из доминантных, а коррективный такт — в одном из ординарных состояний. Заканчиваться такты могут как в доминантном, так и в ординарном состоянии. Предполагается, что функционирование сети N^c начинается в нормальном режиме в базовом состоянии $s^\circ = s^{(1)}$ в момент времени $t = 0$. В момент $t = \varphi$ текущий такт заканчивается или в доминантном состоянии $s^{(n)} \in Y$, или в ординарном состоянии $s^{(n)} \in Z$; в первом случае выполняется очередной нормальный такт, во втором случае — коррективный такт. В течение данного коррективного такта происходит переход сети из этого ординарного состояния или в доминантное состояние или в некоторое другое ординарное состояние и т. д. Если в момент начала текущего такта состояние сети является ординарным, определяются новые значения интенсивностей обслуживания во всех системах сети обслуживания.

Обозначим $x^{(k)}$ — такт с номером k, $k \in \{1, 2, \ldots\}$; $\eta^{(k)}$ — момент начала такта $x^{(k)}$ (момент начала первого слота в такте $x^{(k)}$); $\tau^{(k)}$ — момент окончания такта $x^{(k)}$ (момент окончания последнего слота в такте $x^{(k)}$); $s^{(n,k)} = (s_i^{(n,k)})$ — состояние с номером n сети N^c в начале такта $x^{(k)}$, где $s_i^{(n,k)}$ — число требований в системе S_i.

Основными действиями, выполняемыми в сети N^c в момент $\eta^{(k)}$, являются:

1) идентификация состояния $s^{(n,k)}$, $n \in B$, сети;

2) проверка выполнения неравенств

$$|s_i^{(n,k)} - s_i^\circ| \leqslant q_i, \; i = 1, \ldots, L, \tag{4}$$

т. е. проверка принадлежности состояния $s^{(n,k)}$ множеству Y;

3) если неравенства (4) выполняются для всех систем сети, то следующий такт является нормальным, и в течение такта $x^{(k)}$ используется вектор μ. Выполняется очередной нормальный такт;

4) если хотя бы для одной системы не выполнилось неравенство (4), то такт $x^{(k)}$ является коррективным, формируется вектор $\mu^{(J,k)} = (\mu_i^{(J,k)})$, $i = 1, \ldots, L$, $J \in \{1, \ldots, c_Z\}$, который соответствует состоянию сети $s^{(n,k)} \in Z$, $n = c_Y + J$, в момент начала такта; этот вектор используется в течение такта $x^{(k)}$. Выполняется очередной коррективный такт.

После окончания выполнения такта $x^{(k)}$ в момент $\eta^{(k+1)}$ производится очередное выполнение действий 1–4 и т. д.

Рассмотрим эволюцию сети N^c в течение коррективного такта $x^{(k)}$, в начале которого сеть находится в состоянии $s^{(c_Y+J,k)}$. В момент $\eta^{(k)}$ в S_i, $i \in I$, находится $s_i^{(c_Y+J,k)}$ требований. В течение такта $x^{(k)}$ в S_i поступит $\upsilon_i^{(k)}$ требований. Средняя интенсивность суммарного входящего потока требований в S_i из других систем массового обслуживания сети в течение такта $x^{(k)}$ $\sigma_i^{(k)} = \upsilon_i^{(k)}/\varphi$. Чтобы в момент $\tau^{(k)}$ в системе S_i осталось s_i° требований, необходимо обслужить $W_i^{(k)} = s_i^{(c_Y+J,k)} + \upsilon_i^{(k)} - s_i^\circ$ требований в течение такта $x^{(k)}$, т. е. в среднем $W_i^{(k)}/\varphi$ требований в единицу времени. Следовательно, средняя интенсивность выходящего потока требований из S_i в течение такта $x^{(k)}$ $\beta_i^{(k)} = W_i^{(k)}/\varphi$.

За такт $x^{(k)}$ один прибор обслуживает в среднем $W_i^{(k)}/\kappa_i$ требований. Обозначая через $\mu_i^{(J,k)}$ интенсивность обслуживания требований одним прибором в S_i в течение такта $x^{(k)}$, получим, что средняя длительность обслуживания одного требования прибором равна $1/\mu_i^{(J,k)}$. Поэтому среднее суммарное время занятости одного прибора в течение такта $x^{(k)}$ равно $W_i^{(k)}/(\kappa_i\mu_i^{(J,k)})$, коэффициент использования прибора $\psi_i^{(k)} = W_i^{(k)}/(\kappa_i\mu_i^{(J,k)}\varphi)$, а среднее число занятых обслуживающих приборов в системе S_i $\bar{h}_i^{(k)} = \bar{h}_i = \kappa_i\psi_i^{(k)}$.

Из равенства $W_i^{(k)}/(\kappa_i\mu_i^{(J,k)}\varphi) = \bar{h}_i/\kappa_i$, $i \in I$, получим

$$\mu_i^{(J,k)} = \begin{cases} \min\left\{\dfrac{s_i^{(c_Y+J,k)} + \upsilon_i^{(k)} - s_i^\circ}{\bar{h}_i\varphi}, 1\right\} & \text{при } s_i^{(c_Y+J,k)} + \upsilon_i^{(k)} > s_i^\circ, \\ 0 & \text{при } s_i^{(c_Y+J,k)} + \upsilon_i^{(k)} \leqslant s_i^\circ. \end{cases}$$

Алгоритм вычисления $\mu_i^{(J,k)}$ содержит вспомогательный шаг и основные шаги, число которых зависит от требуемой точности определения $\mu_i^{(J,k)}$. При выполнении вспомогательного шага полагается, что $\upsilon_i^{(k)} = \bar{h}_i\mu_i\varphi$, и определяются величины

$$\hat{\mu}_i^{(J,k)} = \begin{cases} \min\left\{\dfrac{s_i^{(c_Y+J,k)} + \bar{h}_i\mu_i\varphi - s_i^\circ}{\bar{h}_i\varphi}, 1\right\} & \text{при } s_i^{(c_Y+J,k)} + \bar{h}_i\mu_i\varphi > s_i^\circ, \\ 0 & \text{при } s_i^{(c_Y+J,k)} + \bar{h}_i\mu_i\varphi \leqslant s_i^\circ. \end{cases}$$

На первом основном шаге полагается, что средняя интенсивность выходящего потока требований из системы S_j в течение такта $x^{(k)}$

$$\beta_j^{(k)} = \bar{h}_j\hat{\mu}_j^{(J,k)}, \qquad j = 1, \ldots, L,$$

и определяются

$$\beta_{ji}^{(k)} = \beta_j^{(k)}\theta_{ji}, \qquad i,j = 1,\dots,L, \tag{5}$$

$$\tilde{\sigma}_i^{(k)} = \sum_{j=1}^{L} \beta_{ji}^{(k)}, \qquad i = 1,\dots,L,$$

$$\tilde{\mu}_i^{(J,k)} = \begin{cases} \min\left\{\dfrac{s_i^{(c_Y+J,k)} + \tilde{\sigma}_i^{(k)}\varphi - s_i^\circ}{\bar{h}_i\varphi}, 1\right\} & \text{при } s_i^{(c_Y+J,k)} + \tilde{\sigma}_i^{(k)}\varphi > s_i^\circ, \\ 0 & \text{при } s_i^{(c_Y+J,k)} + \tilde{\sigma}_i^{(k)}\varphi \leqslant s_i^\circ. \end{cases}$$

При выполнении следующего основного шага в выражении (5) используются величины

$$\beta_j^{(k)} = \bar{h}_j \tilde{\mu}_j^{(J,k)}, \qquad j = 1,\dots,L,$$

с $\tilde{\mu}_j^{(J,k)}$, вычисленными на предыдущем шаге.

4. АНАЛИЗ СЕТИ С УПРАВЛЕНИЕМ

Эволюция сети N^c в течение нормальных и коррективных тактов описывается цепями Маркова соответственно $\hat{C}$ и $\tilde{C}^J$, $J \in \{1,\dots,c_Z\}$, с множеством состояний B и дискретным временем. Множествами начальных состояний цепи $\hat{C}$ и цепей $\tilde{C}^J$ являются соответственно $\{1,\dots,c_Y\}$ и $\{c_Y + J\}$, а матрицами вероятностей перехода — $\hat{P} = (\hat{p}_{mn})$ и $\tilde{P}^J = (\tilde{p}_{mn}^J)$, $m,n = 1,\dots,c_X$. Элементы матрицы $\hat{P}$ определяются выражениями (1) и (2), а элементы матрицы $\tilde{P}^J$ определяются аналогично элементам матрицы $\hat{P}$ при замене $p_{s,d}$ на $\tilde{p}_{s,d}^J$:

$$\tilde{p}_{s,d}^J = \prod_{i=1}^{L} \binom{h_i}{d_i} (\mu_i^J)^{d_i} (1 - \mu_i^J)^{h_i - d_i}.$$

Обозначим через $\hat{P}^{(t)} = (\hat{p}_{mn}^{(t)})$ и $\tilde{P}^{(t),J} = (\tilde{p}_{mn}^{(t),J})$, $m,n = 1,\dots,c_X$, матрицы вероятностей перехода за t слотов цепей $\hat{C}$ и $\tilde{C}^J$, $J \in \{1,\dots,c_Z\}$, соответственно. Известно, что

$$\hat{P}^{(t)} = (\hat{P})^t, \qquad \tilde{P}^{(t),J} = (\tilde{P}^J)^t.$$

Эволюция сети N^c описывается цепью Маркова ν^c с дискретным временем с множеством состояний B и матрицей вероятностей перехода $P^c = (p_{mn}^c)$, $m,n = 1,\dots,c_X$, при заданном значении φ [19]

$$p_{mn}^c = \begin{cases} \hat{p}_{mn}^{(\varphi)}, & m \in \{1,\dots,c_Y\}, \\ \tilde{p}_{mn}^{(\varphi),J}, & m = c_Y + J,\ J \in \{1,\dots,c_Z\}. \end{cases}$$

Стационарное распределение $\pi^c = (\pi_n^c)$, $n = 1,\dots,c_X$, вероятностей состояний сети N^c при заданном значении φ является единственным решением уравнения $\pi^c = \pi^c P^c$ с условием $\sum\limits_{n\in B} \pi_n^c = 1$.

Основные стационарные характеристики системы S_i, $i \in I$, сети N^c вычисляются по формулам (3) при замене μ_i на $\bar{\mu}_i^c$:

$$\bar{\mu}_i^c = \mu_i \sum_{n=1}^{c_Y} \pi_n^c + \sum_{J=1}^{c_Z} \mu_i^J \pi_{c_Y+J}^c.$$

5. ПРИМЕР

Пусть сеть N^c имеет следующие параметры: $L = 4$, $H = 8$, $\mu = (\mu_i) = (0.4,\ 0.3,\ 0.3,\ 0.1)$, $\kappa = (\kappa_i) = (1,\ 3,\ 2,\ 1)$, $c_X = 165$, $s^\circ = (2,\ 2,\ 2,\ 2)$, $q = (1,\ 2,\ 2,\ 1)$,

$$\Theta = \begin{bmatrix} 0 & 0.3 & 0.5 & 0.2 \\ 0.4 & 0 & 0.5 & 0.1 \\ 0.2 & 0.7 & 0 & 0.1 \\ 0.1 & 0.5 & 0.4 & 0 \end{bmatrix}.$$

Множество Y будет включать состояния $s^{(n)}$, $n = 1, \ldots, 79$. Остальные состояния будут принадлежать множеству Z.

Стационарная вероятность пребывания сети N в множестве Y: $\pi_Y = \sum\limits_{n=1}^{c_Y} \pi_n = 0.313$, стационарная вероятность базового состояния $\pi_1 = 0.004$, вектор м. о. числа требований в системах сети $\bar{s} = (\bar{s}_i) = (0.802,\ 1.064,\ 1.174,\ 4.960)$, вектор м. о. длительностей реакции сети для систем $\bar{\zeta} = (\bar{\zeta}_i) = (37.608,\ 22.406,\ 23.574,\ 30.920)$, где $\bar{\zeta}_i = \frac{1}{\lambda_i} \sum\limits_{j=1,\, j\neq i}^{L} \lambda_j \bar{u}_j$, вектор интенсивностей входящих потоков требований $\lambda = (\lambda_i) = (0.191,\ 0.309,\ 0.289,\ 0.098)$, пропускная способность сети $\Lambda = \sum\limits_{i=1}^{L} \lambda_i = 0.887$.

Значения стационарных характеристик сети N^c при различных значениях φ приведены в табл. 1 и 2. Отметим, что результаты, полученные методом имитационного моделирования, отличаются не более чем на 10% от результатов, полученных аналитически [17]. Это говорит о приемлемой для практических приложений точности предложенных методов анализа сетей N и N^c.

Таблица 1

Характеристики качества функционирования сети N^c

Вероятность	Длительность такта φ						
	10	20	50	100	200	500	1000
π_Y^c	0.748	0.660	0.535	0.465	0.420	0.376	0.367
π_1^c	0.017	0.014	0.010	0.009	0.008	0.006	0.006

Из табл. 1 видно, что при уменьшении φ вероятности π_Y^c и π_1^c увеличиваются и при $\varphi = 10$ первая из них более чем в 2 раза, а вторая в 4 раза превосходят соответствующие вероятности сети N. Результаты сравнения характеристик качества функционирования сетей N^c и N показывают, что качество функционирования сети N^c при $\varphi < 100$ выше, чем сети N. Это свидетельствует о возможности достижения при малых значениях φ высокой эффективности метода динамического управления интенсивностями обслуживания. При увеличении φ эффект от управления интенсивностями обслуживания уменьшается вследствие уменьшения влияния управления на эволюцию сети N^c.

Таблица 2

Стационарные характеристики сети N^c

Характеристика	№ системы, i	Длительность такта φ						
		10	20	50	100	200	500	1000
$\bar{\mu}_i^c$	1	0.362	0.363	0.375	0.383	0.390	0.395	0.399
	2	0.283	0.289	0.293	0.297	0.298	0.300	0.300
	3	0.286	0.290	0.292	0.295	0.297	0.299	0.299
	4	0.142	0.135	0.124	0.116	0.109	0.104	0.103
$\bar{s}_i^c$	1	1.581	1.464	1.246	1.098	0.990	0.903	0.869
	2	1.608	1.538	1.381	1.285	1.217	1.149	1.138
	3	1.854	1.789	1.599	1.470	1.368	1.272	1.254
	4	2.957	3.209	3.774	4.147	4.425	4.676	4.739
$\bar{\zeta}_i^c$	1	23.564	25.503	28.778	31.184	33.097	35.040	35.537
	2	14.410	15.337	17.168	18.366	19.519	20.579	20.787
	3	14.901	15.980	17.849	19.164	20.495	21.716	21.902
	4	37.648	37.385	35.822	34.702	33.727	32.889	32.612
λ_i^c	1	0.272	0.255	0.235	0.221	0.212	0.202	0.200
	2	0.443	0.419	0.386	0.365	0.348	0.332	0.329
	3	0.412	0.389	0.359	0.340	0.324	0.309	0.307
	4	0.134	0.127	0.118	0.111	0.106	0.101	0.100
Λ^c		1.261	1.190	1.098	1.037	0.990	0.944	0.936

Из табл. 2 видно, что при уменьшении φ значения $\bar{\mu}_i^c$, $i = 1, \ldots, 4$, изменяются в соответствии с характером зависимости от φ интенсивностей обслуживания, определенных для коррективных тактов, и при $\varphi \to \infty$ $\bar{\mu}_i^c \to \mu_i$. Следствием зависимости величин $\bar{\mu}_i^c$ от φ является увеличение интенсивностей потоков требований λ_i^c и пропускной способности сети Λ^c, а также изменение м. о. длительностей реакции сети для систем $\bar{\zeta}_i^c$ при уменьшении φ. При этом значения $\bar{s}_i^c$ приближаются к значениям s_i°, $i = 1, \ldots, 4$. Очевидно, при $\varphi \to \infty$ значения характеристик сети N^c стремятся к значениям характеристик сети N.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Рассматриваемая в статье проблема анализа замкнутых сетей массового обслуживания с дискретным временем и динамическим управлением интенсивностями обслуживания требований включает три задачи, решения которых представлены в соответствующих параграфах статьи. Первой задачей является разработка метода анализа замкнутых сетей массового обслуживания с дискретным временем и групповыми переходами требований. Результаты решения этой задачи непосредственно используются при решении второй задачи — разработке метода динамического управления интенсивностями обслуживания в сетях обслуживания с дискретным временем. При разработке метода анализа замкнутых сетей массового обслуживания с дискретным временем и управлением интенсивностями обслуживания (третья задача) в существенной степени используются результаты решения первых двух задач.

Из результатов исследования гипотетических сетей обслуживания рассматриваемого типа с использованием метода анализа замкнутых сетей массового обслуживания с динамическим управлением интенсивностями обслуживания и метода имитационного моделирования можно сделать вывод, что предложенный в статье метод анализа сетей имеет точность и эффективность, достаточные для практических приложений.

В частности, этот метод может применяться для анализа сетей обслуживания, используемых в качестве математических моделей дискретных стохастических систем с сетевой структурой, в которых реализованы методы управления производительностью входящих в систему элементов.

Библиографический список

1. *Alfa A. S.* Queueing theory for telecommunications: discrete time modelling of a single node system. N. Y. ; Heidelberg ; London : Springer Science + Business Media, LLC, 2010. 248 p. DOI: 10.1007/978-1-4419-7314-6.
2. *Daduna H.* Queueing networks with discrete time scale: explicit expressions for the steady state behavior of discrete time stochastic networks. Berlin ; Heidelberg : Springer-Verlag, 2001. 143 p. DOI: 10.1007/3-540-44592-7.
3. *Malchin C., Daduna H.* Discrete time queueing networks with product form steady state. Availability and performance analysis in an integrated model // Queueing Systems. 2010. Vol. 65, № 4. P. 385–421. DOI: 10.1007/s11134-010-9181-2.
4. *Woodward M. E.* Towards the accurate modelling of high-speed communication networks with product-form discrete-time networks of queues // Computer Communications. 1998. Vol. 21. P. 1530–1543. DOI: 10.1016/S0140-3664(98)00220-5.
5. *Mitra D., McKenna J.* Asymptotic expansions for closed Markovian networks with state-dependent service rates // Journal of ACM. 1986. Vol. 33, № 3. P. 568–592. DOI: 10.1145/5925.5935.
6. *Weber R. R., Stidham S.* Optimal control of service rates in networks of queues // Advances in Applied Probability. 1987. Vol. 19. P. 202–218. DOI: 10.1017/S0001867800016451.
7. *Митрофанов Ю. И.* Анализ сетей массового обслуживания с управлением интенсивностями обслуживания // Автоматика и вычислительная техника. 2005. № 6. С. 22–31.
8. *Митрофанов Ю. И., Долгов В. И.* Динамическое управление интенсивностями обслуживания в сетях массового обслуживания // Автоматика и вычислительная техника. 2008. № 6. С. 44–56.
9. *Azaron A., Ghomi S. M.* Optimal control of the service rates and arrivals in Jackson networks // European Journal of Operational Research. 2003. Vol. 147, № 1. P. 17–31. DOI: 10.1016/S0377-2217(02)00177-7.
10. *Xia L.* Service rate control of closed Jackson networks from game theoretic perspective // European Journal of Operational Research. 2014. Vol. 237, № 2. P. 546–554. DOI: 10.1016/j.ejor.2014.01.038.
11. *Mitrofanov Yu. I., Rogachko E. S., Stankevich E. P.* Analysis of queueing networks with batch movements of customers and control of flows among clusters // Automatic Control and Computer Sciences. 2015. Vol. 49, № 4. P. 221–230. DOI: 10.3103/S0146411615040094.
12. *Тананко И. Е., Фокина Н. П.* Анализ замкнутых ненадежных сетей массового обслуживания с групповыми переходами требований // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2013. Т. 13, вып. 2, ч. 1. С. 111–117.
13. *Henderson W., Taylor P. G.* Product form in networks of queues with batch arrivals and batch services // Queueing Systems. 1990. Vol. 6. P. 71–88. DOI: 10.1007/BF02411466.
14. *Serfozo R. F.* Queueing networks with dependent nodes and concurrent movements // Queueing Systems. 1993. Vol. 13. P. 143–182. DOI: 10.1007/BF01158932.

15. *Miyazawa M.* On the characterization of departure rules for discrete-time queueing networks with batch movements and its applications // Queueing Systems. 1994. Vol. 18. P. 149–166. DOI: 10.1007/BF01158779.
16. *Митрофанов Ю. И., Рогачко Е. С., Станкевич Е. П.* Анализ неоднородных сетей массового обслуживания с групповыми переходами требований // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2011. Т. 11, вып. 3, ч. 1. С. 41–46.
17. *Долгов В. И.* Исследование замкнутых сетей массового обслуживания с дискретным временем, групповыми переходами требований и управлением интенсивностями обслуживания методом имитационного моделирования // Компьютерные науки и информационные технологии : материалы междунар. науч. конф. Саратов : Издат. центр «Наука», 2016. С. 145–148.

Образец для цитирования:
Митрофанов Ю. И., Долгов В. И., Рогачко Е. С., Станкевич Е. П. Метод анализа замкнутых сетей массового обслуживания с дискретным временем, групповыми переходами требований и динамическим управлением интенсивностями обслуживания // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2017. Т. 17, вып. 1. С. 96–108. DOI: 10.18500/1816-9791-2017-17-1-96-108.

Method for Analysis of Closed Queueing Networks with Discrete Time, Batch Movements of Customers and Dynamic Control of Service Rates

Yu. I. Mitrophanov[1], **V. I. Dolgov**[2], **E. S. Rogachko**[3], **E. P. Stankevich**[4]

[1]Yury I. Mitrophanov, Saratov State University, 83, Astrakhanskaya str., 410012, Saratov, Russia, MitrophanovYuI@info.sgu.ru
[2]Vitaly I. Dolgov, Saratov State University, 83, Astrakhanskaya str., 410012, Saratov, Russia, www@vidolgov.ru
[3]Ekaterina S. Rogachko, Saratov State University, 83, Astrakhanskaya str., 410012, Saratov, Russia, RogachkoES@info.sgu.ru
[4]Elena P. Stankevich, Saratov State University, 83, Astrakhanskaya str., 410012, Saratov, Russia, StankevichElena@mail.ru

The closed queueing networks with single class of customers, discrete time and batch movements of customers are considered. Queues include multiple identical servers with geometric distribution of service times. A method for dynamic control of service rates in queues is proposed. The control is realized by use of different service rates during fixed time intervals in process of networks operation. When this method is used in queueing networks of considered type, close to given customer allocation among queueing systems is provided. Models for evolution and methods for analysis of closed queueing networks with single class of customers, discrete time and batch movements of customers without control and with dynamic control of service rates are proposed. These methods provide possibility of computing basic steady-state characteristics of considered classes queueing networks. An example of queueing network with control of service rates is presented. Results of analysis of this network have shown efficiency of method for control of service rates and acceptable for practical applications accuracy of method for analysis.

Key words: closed queueing networks, geometric distribution of service times, batch movements of customers, control of service rates, analysis of queueing networks, stationary characteristics.

References

1. Alfa A. S. *Queueing theory for telecommunications: discrete time modelling of a single node system*. New York, Heidelberg, London, Springer Science + Business Media, LLC, 2010. 248 p. DOI: 10.1007/978-1-4419-7314-6.
2. Daduna H. *Queueing networks with discrete time scale: explicit expressions for the steady state behavior of discrete time stochastic networks*. Berlin, Heidelberg, Springer-Verlag, 2001. 143 p. DOI: 10.1007/3-540-44592-7.
3. Malchin C., Daduna H. Discrete time queueing networks with product form steady state. Availability and performance analysis in an integrated model. *Queueing Systems*, 2010, vol. 65, no. 4, pp. 385–421. DOI: 10.1007/s11134-010-9181-2.
4. Woodward M. E. Towards the accurate modelling of high-speed communication networks with product-form discrete-time networks of queues. *Computer Communications*, 1998, vol. 21, pp. 1530–1543. DOI: 10.1016/S0140-3664(98)00220-5.
5. Mitra D., McKenna J. Asymptotic expansions for closed Markovian networks with state-dependent service rates. *Journal of ACM*, 1986, vol. 33, no. 3, pp. 568–592. DOI: 10.1145/5925.5935.
6. Weber R. R., Stidham S. Optimal control of service rates in networks of queues. *Advances in Applied Probability*, 1987, vol. 19, pp. 202–218. DOI: 10.1017/S0001867800016451.
7. Mitrophanov Yu. I. Analysis of queueing networks with controlled service rate. *Automatic Control and Computer Sciences*, 2005, vol. 39, no. 6, pp. 18–26.
8. Mitrophanov Yu. I., Dolgov V. I. Dynamic control of service rates in queuing networks. *Automatic Control and Computer Sciences*, 2008, vol. 42, no. 6, pp. 311–319. DOI: 10.3103/S0146411608060060.
9. Azaron A., Ghomi S. M. Optimal control of the service rates and arrivals in Jackson networks. *European Journal of Operational Research*, 2003, vol. 147, no. 1, pp. 17–31. DOI: 10.1016/S0377-2217(02)00177-7.
10. Xia L. Service rate control of closed Jackson networks from game theoretic perspective. *European Journal of Operational Research*, 2014, vol. 237, no. 2, pp. 546–554. DOI: 10.1016/j.ejor.2014.01.038.
11. Mitrofanov Yu. I., Rogachko E. S., Stankevich E. P. Analysis of queueing networks with batch movements of customers and control of flows among clusters. *Automatic Control and Computer Sciences*, 2015, vol. 49, no. 4, pp. 221–230. DOI: 10.3103/S0146411615040094.
12. Tananko I. E., Fokina N. P. Analysis of closed unreliable queueing networks with batch movements of customers. *Izv. Saratov Univ. (N. S.), Ser. Math. Mech. Inform.*, 2013, vol. 13, iss. 2, pt. 1, pp. 111–117 (in Russian).
13. Henderson W., Taylor P. G. Product form in networks of queues with batch arrivals and batch services. *Queueing Systems*, 1990, vol. 6, pp. 71–88. DOI: 10.1007/BF02411466.
14. Serfozo R. F. Queueing networks with dependent nodes and concurrent movements. *Queueing Systems*, 1993, vol. 13, pp. 143–182. DOI: 10.1007/BF01158932.
15. Miyazawa M. On the characterization of departure rules for discrete-time queueing networks with batch movements and its applications. *Queueing Systems*, 1994, vol. 18, pp. 149–166. DOI: 10.1007/BF01158779.
16. Mitrophanov Yu. I., Rogachko E. S., Stankevich E. P. Analysis of heterogeneous queueing networks with batch movements of customers. *Izv. Saratov Univ. (N. S.), Ser. Math. Mech. Inform.*, 2011, vol. 11, iss. 3, pt. 1, pp. 41–46 (in Russian).
17. Dolgov V. I. Issledovanie zamknutykh setei massovogo obsluzhivaniia s diskretnym vremenem, gruppovymi perekhodami trebovanii i upravleniem intensivnostiami obsluzhivaniia metodom imitatsionnogo modelirovaniia [Investigation by simulation of closed

queueing networks with discrete time, batch movements of customers and control of service rates]. *Komp'iuternye nauki i informatsionnye tekhnologii : materialy Mezhdunar. nauch. konf.* [Computer Science and Information Technologies : Proc. Intern. Sci. Conf.]. Saratov, Publ. Center "Nauka", 2016, pp. 145–148 (in Russian).

Cite this article as:

Mitrophanov Yu. I., Dolgov V. I., Rogachko E. S., Stankevich E. P. Method for Analysis of Closed Queueing Networks with Discrete Time, Batch Movements of Customers and Dynamic Control of Service Rates. *Izv. Saratov Univ. (N. S.), Ser. Math. Mech. Inform.*, 2017, vol. 17, iss. 1, pp. 96–108 (in Russian). DOI: 10.18500/1816-9791-2017-17-1-96-108.