

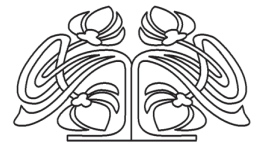


Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
«Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского»

ИЗВЕСТИЯ САРАТОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА

Новая серия

Серия Математика. Механика. Информатика, выпуск 1



Научный журнал
2017 Том 17

ISSN 1814-733X

ISSN 1816-9791

Издается с 2001 года

Продолжение «Известий Императорского Николаевского Университета» 1910–1918 и «Ученых записок СГУ» 1923–1962

СОДЕРЖАНИЕ

Научный отдел

Математика

- Митрохин С. И.** Многоточечные дифференциальные операторы: «расщепление» кратных в главном собственных значений 5
- Мовсисян Г. С., Сергеев А. Н.** Операторы КМС типа $B(1, 1)$ и супералгебра Ли $osp(3, 2)$ 19
- Петриков А. О.** Минимальная непродолжаемая частичная полугруппа 31
- Хачатрян Х. А., Сардарян Т. Г.** О разрешимости одного класса нелинейных интегральных уравнений типа Урысона на всей прямой 40
- Юрко В. А.** О восстановлении дифференциальных пучков на графе-кусте 51

Механика

- Землянухин А. И., Бочкарев А. В.** Точные уединенно-волновые решения уравнений Бюргерса – Хаксли и Бредли – Харпера 62
- Ковалев В. А., Радаев Ю. Н.** Рационально алгебраически полные системы тензоров конечных деформаций сложных континуумов 71

Информатика

- Карандашов М. В.** Алгоритм проверки транзитивности отображений, ассоциированных с конечными автоматами из групп AS_p 85
- Митрофанов Ю. И., Долгов В. И., Рогачко Е. С., Станкевич Е. П.** Метод анализа замкнутых сетей массового обслуживания с дискретным временем, групповыми переходами требований и динамическим управлением интенсивностями обслуживания 96
- Резчиков А. Ф., Кушников В. А., Иващенко В. А., Богомолов А. С., Филимонюк Л. Ю., Шоломов К. И.** Представление динамических причинно-следственных связей в человекомашинных системах 109

Приложения

Personalia

- Прохоров Д. В., Дудов С. И., Захаров А. М., Поплавский В. Б., Розен В. В., Сидоров С. П.** Памяти Александра Юрьевича Васильева 117

Журнал включен в Перечень рецензируемых научных изданий, в которых должны быть опубликованы основные научные результаты диссертаций на соискание ученой степени кандидата наук, на соискание ученой степени доктора наук (журнал входит в международную базу данных zbMATH)

Зарегистрировано в Министерстве Российской Федерации по делам печати, телерадиовещания и средств массовых коммуникаций. Свидетельство о регистрации СМИ ПИ № 77-7185 от 30 января 2001 года. Зарегистрировано в Федеральной службе по надзору в сфере связи, информационных технологий и массовых коммуникаций. Свидетельство о регистрации СМИ ПИ № ФС77-56162 от 15 ноября 2013 года

Индекс издания в объединенном каталоге «Пресса России» 36017, раздел 30 «Научно-технические издания. Известия РАН. Известия вузов». Журнал выходит 4 раза в год

Заведующий редакцией
Бучко Ирина Юрьевна

Редактор
Митенёва Елена Анатольевна

Художник
Соколов Дмитрий Валерьевич

Редактор-стилист
Степанова Наталия Ивановна

Верстка
Багаева Ольга Львовна

Технический редактор
Ковалева Наталья Владимировна

Корректор
Юдина Инна Геннадиевна

Адрес учредителя, издателя и редакции:
410012, Саратов, ул. Астраханская, 83
Тел.: (845-2) 51-45-49, 52-26-89
E-mail: izvestiya@sgu.ru

Подписано в печать 22.02.17.
Формат 60x84 1/8.
Усл. печ. л. 14,17(15,25).
Тираж 500 экз. Заказ 18-Т.

Отпечатано в типографии Саратовского университета.
Адрес типографии:
410012, Саратов, Б. Казачья, 112А

© Саратовский университет, 2017



ПРАВИЛА ДЛЯ АВТОРОВ

Журнал публикует научные статьи по всем основным разделам математики, механики и информатики (математический анализ, дифференциальные уравнения, математическая физика, геометрия и топология, теория вероятностей и математическая статистика, математическая логика, алгебра и теория чисел, вычислительная математика, дискретная математика и математическая кибернетика, теоретическая механика, механика деформируемого твердого тела, механика жидкости, газа и плазмы, динамика, прочность машин, приборов и аппаратуры, биомеханика, машиностроение, информатика, вычислительная техника и управление и др.).

Объем публикуемой статьи не должен превышать 12 страниц, оформленных в LaTeX согласно стилевому файлу, размещенному по адресу: <http://mmi.sgu.ru>. Статьи большего объема принимаются только по согласованию с редколлегией журнала.

Статья должна быть аккуратно оформлена и тщательно отредактирована.

Последовательность предоставления материала:

– на русском языке: индекс УДК, название работы, инициалы и фамилии авторов, сведения об авторах (ученая степень, должность и место работы, e-mail), аннотация, ключевые слова, текст статьи, ссылки на гранты и благодарности (если есть), библиографический список;

– на английском языке: название работы, инициалы и фамилии авторов, место работы (вуз, почтовый адрес), e-mail, аннотация, ключевые слова, References.

Отдельным файлом приводятся сведения о статье: раздел журнала, УДК, авторы и название статьи (на русском и английском языках); сведения об авторах: фамилия, имя и отчество (полностью), e-mail, телефон (для ответственного за переписку обязательно указать сотовый или домашний). Если название статьи слишком длинное, для колонтитула следует привести его краткий вариант.

Требования к аннотациям и библиографическим спискам:

– аннотация не должна содержать сложных формул, ссылок на библиографический список, по содержанию повторять название статьи, быть насыщена общими словами, не излагающими сути исследования. Оптимальный объем: 500–600 знаков;

– в библиографическом списке должны быть указаны только процитированные в статье работы. Ссылки на неопубликованные работы не допускаются. Образцы оформления различных источников приведены вместе со стилевым файлом по адресу: <http://mmi.sgu.ru>.

Датой поступления статьи считается дата поступления ее окончательного варианта. Возвращенная на доработку статья должна быть прислана в редакцию не позднее чем через 3 месяца. Возвращение статьи на доработку не означает, что статья будет опубликована, после переработки она вновь будет рецензироваться.

Материалы, отклоненные редколлегией, не возвращаются.

Адрес для переписки с редколлегией серии: mmi@sgu.ru.

CONTENTS

Scientific Part

Mathematics

Mitrokhin S. I. Multipoint Differential Operators: "Splitting" of the Multiple in Main Eigenvalues 5

Movsisyan G. S., Sergeev A. N. CMS Operators Type $B(1,1)$ and Lie Superalgebra $\mathfrak{osp}(3,2)$ 19

Petrikov A. O. A Minimal Non-extendable Partial Semigroup 31

Khachatryan Kh. A., Sardaryan T. H. On Solvability of One Class of Urysohn Type Nonlinear Integral Equation on the Whole Line 40

Yurko V. A. On Recovering Differential Pencils on a Bush-type Graph 51

Mechanics

Zemlyanukhin A. I., Bochkarev A. V. Exact Solitary-wave Solutions of the Burgers – Huxley and Bradley – Harper Equations 62

Kovalev V. A., Radayev Yu. N. On Rationally Complete Algebraic Systems of Finite Strain Tensors of Complex Continua 71

Computer Sciences

Karandashov M. V. The Algorithm for Checking Transitivity of Mappings Associated with the Finite State Machines from the Groups AS_p 85

Mitrophanov Yu. I., Dolgov V. I., Rogachko E. S., Stankevich E. P. Method for Analysis of Closed Queueing Networks with Discrete Time, Batch Movements of Customers and Dynamic Control of Service Rates 96

Rezchikov A. F., Kushnikov V. A., Ivashchenko V. A., Bogomolov A. S., Filimonyuk L. Yu., Sholomov K. I. The Dynamical Cause-effect Links' Presentation in Human-machine Systems 109

Appendices

Personalia

Prokhorov D. V., Dudov S. I., Zakharov A. M., Poplavskii V. B., Rosen V. V., Sidorov C. P. In Memory of Alexandr Yu. Vasiliev 117



РЕДАКЦИОННЫЙ СОВЕТ ЖУРНАЛОВ «ИЗВЕСТИЯ САРАТОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА. НОВАЯ СЕРИЯ»

Главный редактор

Чумаченко Алексей Николаевич, доктор геогр. наук, профессор (Саратов, Россия)

Заместитель главного редактора

Короновский Алексей Александрович, доктор физ.-мат. наук, профессор (Саратов, Россия)

Ответственный секретарь

Халова Виктория Анатольевна, кандидат физ.-мат. наук, доцент (Саратов, Россия)

Члены редакционного совета:

Балаш Ольга Сергеевна, кандидат экон. наук, доцент (Саратов, Россия)

Бучко Ирина Юрьевна, директор Издательства Саратовского университета (Саратов, Россия)

Данилов Виктор Николаевич, доктор ист. наук, профессор (Саратов, Россия)

Ивченков Сергей Григорьевич, доктор соц. наук, профессор (Саратов, Россия)

Коссович Леонид Юрьевич, доктор физ.-мат. наук, профессор (Саратов, Россия)

Макаров Владимир Зиновьевич, доктор геогр. наук, профессор (Саратов, Россия)

Прозоров Валерий Владимирович, доктор филол. наук, профессор (Саратов, Россия)

Усанов Дмитрий Александрович, доктор физ.-мат. наук, профессор (Саратов, Россия)

Устьянцев Владимир Борисович, доктор филос. наук, профессор (Саратов, Россия)

Шамяионов Раиль Мунирович, доктор психол. наук, профессор (Саратов, Россия)

Шляхтин Геннадий Викторович, доктор биол. наук, профессор (Саратов, Россия)

EDITORIAL COUNCIL OF THE JOURNALS «IZVESTIYA OF SARATOV UNIVERSITY. NEW SERIES»

Editor-in-Chief – Chumachenko A. N. (Saratov, Russia)

Deputy Editor-in-Chief – Koronovskii A. A. (Saratov, Russia)

Executive Secretary – Khalova V. A. (Saratov, Russia)

Members of the Editorial Council:

Balash O. S. (Saratov, Russia)

Buchko I. Yu. (Saratov, Russia)

Danilov V. N. (Saratov, Russia)

Ivchenkov S. G. (Saratov, Russia)

Kossovich L. Yu. (Saratov, Russia)

Makarov V. Z. (Saratov, Russia)

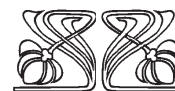
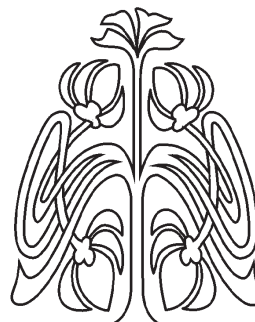
Prozorov V. V. (Saratov, Russia)

Usanov D. A. (Saratov, Russia)

Ustiantsev V. B. (Saratov, Russia)

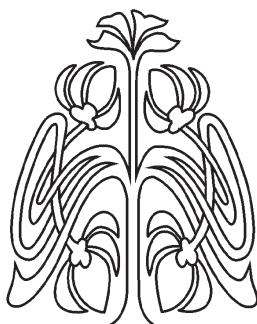
Shamionov R. M. (Saratov, Russia)

Shlyakhtin G. V. (Saratov, Russia)

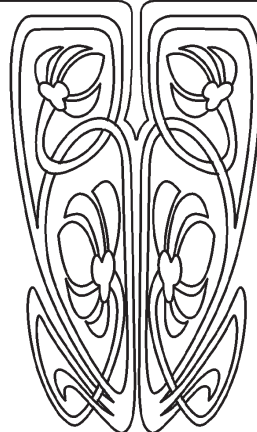


РЕДАКЦИОННЫЙ
СОВЕТ





**РЕДАКЦИОННАЯ
КОЛЛЕГИЯ**



**РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ ЖУРНАЛА
«ИЗВЕСТИЯ САРАТОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА. НОВАЯ СЕРИЯ.
СЕРИЯ: МАТЕМАТИКА. МЕХАНИКА. ИНФОРМАТИКА»**

Главный редактор

Коссович Леонид Юрьевич, доктор физ.-мат. наук, профессор (Саратов, Россия)

Заместитель главного редактора

Прохоров Дмитрий Валентинович, доктор физ.-мат. наук, профессор (Саратов, Россия)

Ответственный секретарь

Халова Виктория Анатольевна, кандидат физ.-мат. наук, доцент (Саратов, Россия)

Члены редакционной коллегии:

Андрейченко Дмитрий Константинович, доктор физ.-мат. наук, профессор (Саратов, Россия)

Васильев Александр Юрьевич, доктор физ.-мат. наук, профессор (Берген, Норвегия)

Ватульян Александр Ованесович, доктор физ.-мат. наук, профессор (Ростов-на-Дону, Россия)

Индейцев Дмитрий Анатольевич, чл.-корр. РАН, доктор физ.-мат. наук, профессор

(Санкт-Петербург, Россия)

Каплунов Юлий Давидович, доктор физ.-мат. наук, профессор (Киль, Великобритания)

Ковалёв Владимир Александрович, доктор физ.-мат. наук, профессор (Москва, Россия)

Ломакин Евгений Викторович, чл.-корр. РАН, доктор физ.-мат. наук, профессор

(Москва, Россия)

Манжиров Александр Владимирович, доктор физ.-мат. наук, профессор (Москва, Россия)

Матвеев Валерий Павлович, акад. РАН, доктор техн. наук, профессор (Пермь, Россия)

Морозов Никита Фёдорович, акад. РАН, доктор физ.-мат. наук, профессор

(Санкт-Петербург, Россия)

Насыров Семён Рафаилович, доктор физ.-мат. наук, профессор (Казань, Россия)

Пархоменко Павел Павлович, чл.-корр. РАН, доктор техн. наук, профессор (Москва, Россия)

Радаев Юрий Николаевич, доктор физ.-мат. наук, профессор (Москва, Россия)

Резчиков Александр Федорович, чл.-корр. РАН, доктор техн. наук, профессор

(Саратов, Россия)

Роджерсон Грэм, Ph.D., профессор (Киль, Великобритания)

Сперанский Дмитрий Васильевич, доктор техн. наук, профессор (Москва, Россия)

Субботин Юрий Николаевич, чл.-корр. РАН, доктор физ.-мат. наук, профессор

(Екатеринбург, Россия)

Харченко Вячеслав Сергеевич, доктор техн. наук, профессор (Харьков, Украина)

Хромов Август Петрович, доктор физ.-мат. наук, профессор (Саратов, Россия)

Шальто Анатолий Абрамович, доктор техн. наук, профессор (Санкт-Петербург, Россия)

Шашкин Александр Иванович, доктор физ.-мат. наук, профессор (Воронеж, Россия)

Юрко Вячеслав Анатольевич, доктор физ.-мат. наук, профессор (Саратов, Россия)

**EDITORIAL BOARD OF THE JOURNAL
«IZVESTIYA OF SARATOV UNIVERSITY. NEW SERIES.
SERIES: MATHEMATICS. MECHANICS. INFORMATICS»**

Editor-in-Chief – Kossovich L. Yu. (Saratov, Russia)

Deputy Editor-in-Chief – Prokhorov D. V. (Saratov, Russia)

Executive Secretary – Khalova V. A. (Saratov, Russia)

Members of the Editorial Board:

Andreichenko D. K. (Saratov, Russia)

Vasiliev A. Yu. (Bergen, Norway)

Vatulyan A. O. (Rostov-on-Don, Russia)

Indeitsev D. A. (St. Petersburg, Russia)

Kaplunov J. D. (Keele, United Kingdom)

Kovalev V. A. (Moscow, Russia)

Lomakin E. V. (Moscow, Russia)

Manzhirou A. V. (Moscow, Russia)

Matveenko V. P. (Perm, Russia)

Morozov N. F. (St. Petersburg, Russia)

Nasyrov S. R. (Kazan', Russia)

Parkhomenko P. P. (Moscow, Russia)

Radaev Yu. N. (Moscow, Russia)

Rezchikov A. F. (Saratov, Russia)

Rogerson Graham (Keele, United Kingdom)

Speranskii D. V. (Moscow, Russia)

Subbotin Yu. N. (Ekaterinburg, Russia)

Kharchenko V. S. (Kharkiv, Ukraine)

Khromov A. P. (Saratov, Russia)

Shalyto A. A. (St. Petersburg, Russia)

Shashkin A. I. (Voronezh, Russia)

Yurko V. A. (Saratov, Russia)



МАТЕМАТИКА

УДК 517.926

МНОГОТОЧЕЧНЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ ОПЕРАТОРЫ: «РАСЩЕПЛЕНИЕ» КРАТНЫХ В ГЛАВНОМ СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЙ

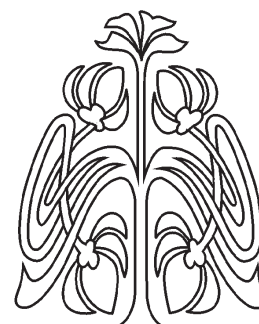
С. И. Митрохин

Митрохин Сергей Иванович, кандидат физико-математических наук, доцент, старший научный сотрудник, Научно-исследовательский вычислительный центр Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова, Россия, 119991, Москва, Ленинские горы, 1, стр. 4, mitrokhin-sergey@yandex.ru

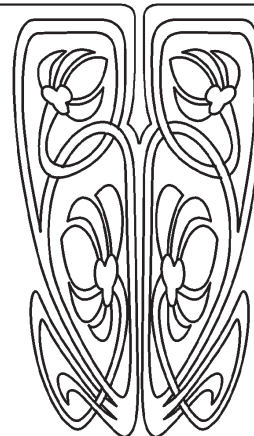
В статье изучается краевая задача для дифференциального оператора восьмого порядка с суммируемым потенциалом. Граничные условия краевой задачи являются многоточечными. Выведено интегральное уравнение для решений дифференциального уравнения, задающего изучаемый дифференциальный оператор. Получены асимптотические формулы и оценки для решений соответствующего дифференциального уравнения при больших значениях спектрального параметра. Изучая граничные условия, выведено уравнение на собственные значения в виде определителя четвёртого порядка. С помощью свойств определителей и асимптотических формул для решений дифференциального уравнения изучается асимптотическое поведение корней уравнения на собственные значения оператора. Коэффициенты граничных условий изучаемой краевой задачи подобраны таким образом, что основное приближение уравнения на собственные значения оператора имеет два корня кратности три. Подробно изучена индикаторная диаграмма уравнения на собственные значения. Изучая один из секторов индикаторной диаграммы, выведена асимптотика собственных значений изучаемого оператора. Показано, что кратные в главном приближении собственные значения «расщепляются» на три однократных серии собственных значений. Аналогичные свойства собственных значений наблюдаются и в остальных секторах индикаторной диаграммы.

Ключевые слова: дифференциальный оператор, спектральный параметр, многоточечные граничные условия, суммируемый потенциал, индикаторная диаграмма, асимптотика собственных значений.

DOI: 10.18500/1816-9791-2017-17-1-5-18



НАУЧНЫЙ
ОТДЕЛ





ВВЕДЕНИЕ

Рассмотрим краевую задачу для дифференциального оператора восьмого порядка, задаваемого дифференциальным уравнением вида

$$y^{(8)}(x) + q(x)y(x) = \lambda a^8 y(x), \quad 0 \leq x \leq \pi, \quad a > 0, \quad (1)$$

с многоточечными граничными условиями:

$$\begin{aligned} y'(0) = y^{(3)}(0) = y^{(5)}(0) = y^{(7)}(0) = 0, \\ y^{(2m-1)}(\pi) = \beta_{2m-1,1} y^{(2m-1)}\left(\frac{\pi}{3}\right) + \beta_{2m-1,2} y^{(2m-1)}\left(\frac{2\pi}{3}\right), \quad m = 1, 2, 3, 4, \quad (2) \\ \beta_{2m-1,1} \in \mathbb{C}, \quad \beta_{2m-1,2} \in \mathbb{C}, \end{aligned}$$

с дополнительным условием на коэффициенты граничных условий:

$$\beta_{11} + \beta_{31} + \beta_{51} + \beta_{71} = 12, \quad \beta_{12} + \beta_{32} + \beta_{52} + \beta_{72} = 0. \quad (3)$$

При этом потенциал $q(x)$ предполагается суммируемой функцией на отрезке $[0; \pi]$:

$$q(x) \in L_1[0; \pi] \Leftrightarrow \left(\int_0^x q(t) dt \right)'_x = q(x) \quad (4)$$

почти всюду на отрезке $[0; \pi]$.

1. ИСТОРИЧЕСКИЙ ОБЗОР

Изучение спектральной теории дифференциальных операторов идет в направлении снижения гладкости коэффициентов дифференциальных уравнений, задающих эти операторы. Сначала коэффициенты (а также и потенциалы) были бесконечно гладкими [1–3]. Затем гладкость коэффициентов постепенно снижалась до одного–двух раз дифференцируемости и до непрерывности [4–6]. Потом коэффициенты дифференциальных уравнений стали кусочно-непрерывными функциями. В работе [7] была изучена сходимость разложений по собственным функциям в точках разрыва коэффициентов дифференциального оператора. В работе [8] были получены регуляризованные следы для дифференциального оператора с разрывными коэффициентами. Обратная спектральная задача с кусочно-гладким потенциалом была решена в работе [9]. Спектральные свойства операторов не только с разрывными коэффициентами, но и с разрывной весовой функцией исследованы автором в работе [10]. В работе [11] приведены примеры изоспектральных операторов с разрывными коэффициентами.

Случай суммируемого потенциала для оператора Штурма – Лиувилля впервые изучен в работах [12, 13]. Была получена асимптотика любого порядка собственных значений и собственных функций для оператора Штурма – Лиувилля с суммируемым потенциалом. Аналогичные результаты для дифференциальных операторов четвертого и шестого порядков получены автором в работах [14, 15]. В работе [16] изучены спектральные свойства оператора 2-го порядка с суммируемым потенциалом и гладкой весовой функцией. Отметим, что с возрастанием порядка оператора сложность выкладок возрастает многократно.



2. АСИМПТОТИКА РЕШЕНИЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ (1) ПРИ $\lambda \rightarrow \infty$

Пусть $\lambda = s^8$, $s = \sqrt[8]{\lambda}$, причем зафиксируем ту ветвь арифметического корня 8-й степени, для которой $\sqrt[8]{1} = +1$.

Пусть w_k ($k = 1, 2, \dots, 8$) — различные корни 8-й степени из единицы:

$$\begin{aligned} w_k^8 &= 1, \quad w_k = e^{\frac{2\pi i}{8}(k-1)}, \quad k = 1, 2, \dots, 8, \\ w_1 &= 1, \quad w_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}(1+i), \quad w_3 = i, \quad w_4 = \frac{\sqrt{2}}{2}(-1+i), \\ w_{n+4} &= -w_n, \quad n = 1, 2, 3, 4. \end{aligned} \quad (5)$$

Числа w_k из (5) удовлетворяют следующим соотношениям:

$$\sum_{k=1}^8 w_k^p = 0, \quad p = 1, 2, \dots, 7, \quad \sum_{k=1}^8 w_k^p = 8, \quad p = 0, \quad p = 8. \quad (6)$$

С помощью метода вариации постоянных доказывается следующая теорема.

Теорема 1. *Решение $y(x, s)$ дифференциального уравнения (1) является решением интегрального уравнения Вольтерры:*

$$\begin{aligned} y(x, s) &= \sum_{k=1}^8 C_k e^{aw_k s x} - \frac{1}{8a^7 s^7} \sum_{k=1}^8 w_k e^{aw_k s x} f_k(x, s), \\ f_k(x, s) &= \int_0^x q(t) e^{-aw_k s t} y(t, s) dt, \quad k = 1, 2, \dots, 8. \end{aligned} \quad (7)$$

Проверить справедливость теоремы 1 можно непосредственным образом: по свойству (4) для $f_k(x, s)$ из (7) следует формула

$$(f_k(x, s))'_x = q(x) e^{-aw_k s x} y(x, s).$$

Используя эту формулу, находим $y'(x, s), y''(x, s), \dots, y^{(8)}(x, s)$ (с использованием свойства (6)), подставляем в уравнение (1), убеждаемся в выполнении верного равенства.

Решая интегральное уравнение (7) методом последовательных приближений Пикара, получаем следующее утверждение.

Теорема 2. *Общее решение дифференциального уравнения (1) представляется в виде*

$$y^{(m)}(x, s) = \sum_{k=1}^8 C_k y_k^{(m)}(x, s), \quad y^{(0)}(x, s) = y(x, s), \quad m = 0, 1, 2, \dots, 7, \quad (8)$$

где C_k ($k = 1, 2, \dots, 8$) — произвольные постоянные,

$$y_k(x, s) = e^{aw_k s x} - \frac{A_{7k}^0(x, s)}{8a^7 s^7} + \underline{O}\left(\frac{e^{|\operatorname{Im} s| ax}}{s^{14}}\right), \quad k = \overline{1; 8} \quad (k = 1, 2, \dots, 8); \quad (9)$$

$$y_k^{(m)}(x, s) = (as)^m \left\{ w_k^m e^{aw_k s x} - \frac{A_{7k}^m(x, s)}{8a^7 s^7} + \underline{O}\left(\frac{e^{|\operatorname{Im} s| ax}}{s^{14}}\right) \right\}, \quad k = \overline{1; 8}, \quad m = \overline{1; 7}; \quad (10)$$



$$A_{7k}(x, s) = w_1 e^{aw_1sx} \int_0^x q(t) e^{a(w_k - w_1)st} dt_{ak1} + w_2 e^{aw_2sx} \int_0^x q(t) e^{a(w_k - w_2)st} dt_{ak2} + \dots + w_8 e^{aw_8sx} \int_0^x q(t) e^{a(w_k - w_8)st} dt_{ak8}, \quad k = \overline{1; 8}; \quad (11)$$

$$A_{7k}^m(x, s) = \sum_{p=1}^8 w_p w_p^m e^{aw_psx} \left(\int_0^x \dots \right)_{akp}, \quad k = \overline{1; 8}, \quad m = \overline{1; 7}. \quad (12)$$

При выводе формул (8)–(12) мы считали, что выполняются следующие начальные условия:

$$A_{7k}^0(0, s) = 0, \quad A_{7k}^m(0, s) = 0, \\ y_k(0, s) = 1, \quad y_k^{(m)}(0, s) = a^m w_k^m s^m, \quad y(0, s) = \sum_{k=1}^8 C_k \cdot 1, \\ y^{(m)}(0, s) = \sum_{k=1}^8 C_k w_k^m a^m s^m, \quad k = \overline{1; 8}, \quad m = \overline{1; 7}. \quad (13)$$

Асимптотические оценки формул (9)–(12) получаются аналогично оценкам работ [17, гл. 2; 18, гл. 2; 19].

3. ИССЛЕДОВАНИЕ ГРАНИЧНЫХ УСЛОВИЙ (2)

Применяя формулы (8)–(10), (13), из первых четырех граничных условий (2) находим:

$$y^{(2m-1)}(0) = 0, \quad m = 1, 2, 3, 4 \Leftrightarrow \sum_{k=1}^8 C_k y_k^{(2m-1)}(0, s) = 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \sum_{k=1}^8 C_k w_k^{2m-1} a^{2m-1} s^{2m-1} = 0, \quad m = 1, 2, 3, 4.$$

Применяя свойства (5), (6), из этих равенств получаем: $C_{k+4} = C_k$, $k = 1, 2, 3, 4$. Поэтому формула (8) принимает следующий вид:

$$y^{(m)}(x, s) = \sum_{k=1}^4 C_k [y_k^{(m)}(x, s) + y_{k+4}^{(m)}(x, s)], \quad m = \overline{1; 7}. \quad (14)$$

Подставляя формулы (14) в последние четыре граничные условия (2), имеем:

$$y^{(2m-1)}(\pi, s) = \beta_{2m-1,1} y^{(2m-1)}\left(\frac{\pi}{3}; s\right) + \beta_{2m-1,2} y^{(2m-1)}\left(\frac{2\pi}{3}; s\right), \quad m = 1, 2, 3, 4 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \sum_{k=1}^4 C_k [y_k^{(2m-1)}(\pi, s) + y_{k+4}^{(2m-1)}(\pi, s)] - \beta_{2m-1,1} \left[y_k^{(2m-1)}\left(\frac{\pi}{3}, s\right) + y_{k+4}^{(2m-1)}\left(\frac{\pi}{3}, s\right) \right] - \\ - \beta_{2m-1,2} \left[y_k^{(2m-1)}\left(\frac{2\pi}{3}, s\right) + y_{k+4}^{(2m-1)}\left(\frac{2\pi}{3}, s\right) \right] = 0, \quad m = 1, 2, 3, 4. \quad (15)$$

Однородная система (15) (из четырех уравнений с четырьмя неизвестными C_1, C_2, C_3, C_4) имеет ненулевые решения $\left(\sum_{k=1}^4 C_k^4 \neq 0 \right)$ только тогда, когда ее определитель равен нулю. Поэтому справедлива следующая теорема.



Теорема 3. Уравнение на собственные значения дифференциального оператора (1)–(4) имеет следующий вид:

$$g(s) = \|g_{mn}(s)\|_{m,n=1}^4 = 0, \quad (16)$$

$$g_{mn}(s) = [y_n^{(2m-1)}(\pi, s) + y_{n+4}^{(2m-1)}(\pi, s)] - \beta_{2n-1,1} \left[y_n^{(2m-1)}\left(\frac{\pi}{3}, s\right) + y_{n+4}^{(2m-1)}\left(\frac{\pi}{3}, s\right) \right] - \\ - \beta_{2m-1,2} \left[y_n^{(2m-1)}\left(\frac{2\pi}{3}, s\right) + y_{n+4}^{(2m-1)}\left(\frac{2\pi}{3}, s\right) \right], \quad m, n = 1, 2, 3, 4. \quad (17)$$

Применяя формулы (9), (10), разложим по столбцам определитель $f(s)$ из (16), (17) на сумму определителей, преобразуем $g(s)$ к следующему виду:

$$g(s) = g_0(s) - \frac{g_7(s)}{8a^7 s^7} + O\left(\frac{1}{s^{14}}\right) = 0; \quad (18)$$

$$g_0(s) = \|g_{nm,0}(s)\|_{n,m=1}^4, \\ g_{nm,0}(s) = w_m^{2n-1} \{ [z^{3w_m} - z^{-3w_m}] - \beta_{2n-1,1} [z^{w_m} - z^{-w_m}] - \beta_{2n-1,2} [z^{2w_m} - z^{-2w_m}] \}, \quad (19) \\ n, m = 1, 2, 3, 4, \quad z = e^{a\frac{\pi}{3}s} \neq 0;$$

$$g_7(s) = \sum_{k=1}^4 g_{7,k}(s), \quad (20)$$

при этом определители $g_{7,k}(s)$ ($k = 1, 2, 3, 4$) получаются из определителя $g_0(s)$ из (19) заменой k -го столбца на столбец

$$(g_{7k,1k}(s); g_{7k,2k}(s); g_{7k,3k}(s); g_{7k,4k}(s))^*,$$

где

$$g_{7k,nk}(s) = [A_{7k}^{2n-1}(\pi, s) + A_{7,k+4}^{2n-1}(\pi, s)] - \beta_{2n-1,1} \left[A_{7k}^{2n-1}\left(\frac{\pi}{3}, s\right) + A_{7,k+4}^{2n-1}\left(\frac{\pi}{3}, s\right) \right] - \\ - \beta_{2n-1,2} \left[A_{7k}^{2n-1}\left(\frac{2\pi}{3}, s\right) + A_{7,k+4}^{2n-1}\left(\frac{2\pi}{3}, s\right) \right], \quad k, n = 1, 2, 3, 4. \quad (21)$$

Основное приближение уравнения (18)–(21) имеет вид $g_0(s) = 0$, где $g_0(s)$ — определитель четвертого порядка, поэтому $g_0(s)$ представляется в виде

$$g_0(s) = \sum_k D_k z^{M_k}, \quad z = e^{a\frac{\pi}{3}s} \neq 0, \quad (22)$$

$$M_k = \delta_{1k}w_1 + \delta_{2k}w_2 + \delta_{3k}w_3 + \delta_{4k}w_4, \quad \delta_{nk} \in \{\pm 1, \pm 2, \pm 3\}, \quad n = 1, 2, 3, 4,$$

D_k — некоторые числа.

Индикаторная диаграмма [20, гл. 12] (т. е. выпуклый многоугольник, который образуют показатели экспонент, входящих в (22)) уравнения (22) представляет собой правильный восьмиугольник $R_1 R_2 \dots R_8$, вершины которого имеют координаты $R_1(3w_1 + 3w_2 + 3w_3 + 3w_8)$, $R_2(3w_1 + 3w_2 + 3w_3 + 3w_4)$, $R_3(3w_2 + 3w_3 + 3w_4 + 3w_5)$, \dots , $R_7(3w_6 + 3w_7 + 3w_8 + 3w_1)$, $R_8(3w_7 + 3w_8 + 3w_1 + 3w_2)$, числа w_k заданы формулами (5), (6).

При этом на границах этого восьмиугольника находятся точки, делящие границы отрезков на шесть равных частей. Например, на отрезке $[R_1; R_2]$ находятся точки



$R_{12}(V_1 - 2w_4)$, $R_{13}(V_1 - w_4)$, $R_{15}(V_1 + w_4)$, $R_{16}(V_1 + 2w_4)$, $V_1 = 3w_1 + 3w_2 + 3w_3$, точки $R_{14}(V_1)$ среди показателей экспонент $\{M_k\}$ из (22) нет. На отрезке $[R_8; R_1]$ находятся точки $R_{82}(V_8 - 2w_3)$, $R_{83}(V_8 - w_3)$, $R_{85}(V_8 + w_3)$, $R_{86}(V_8 + 2w_3)$, $V_8 = 3w_8 + 3w_1 + 3w_2$, точки $R_{84}(V_8)$ среди множества $\{M_k\}$ из (22) нет.

Из общей теории нахождения корней квазиполиномов вида (18)–(21), а также (22) (см. [6, 20]), следует, что корни уравнения (18)–(21) находятся в восьми секторах бесконечно малого раствора, биссектрисы которых являются серединными перпендикулярами к сторонам восьмиугольника, т. е. перпендикулярами к отрезкам $[R_1; R_2]$, $[R_2; R_3]$, ..., $[R_8; R_1]$.

4. ИССЛЕДОВАНИЕ СЕКТОРА ИНДИКАТОРНОЙ ДИАГРАММЫ, ПЕРПЕНДИКУЛЯРНОГО ОТРЕЗКУ $[R_1; R_2]$

Чтобы изучить асимптотику корней уравнения (18)–(21) в секторе $[R_1; R_2]$ индикаторной диаграммы, необходимо в этом уравнении (а также и в уравнении $g_0(s) = 0$ из (22)) оставить только те экспоненты, показатели которых соответствуют точкам, находящимся на этом отрезке, т. е. точкам $R_1, R_{12}, R_{13}, R_{15}, R_{16}, R_2$. Подставляя формулы (11), (12) в уравнение (18)–(21), проведем необходимые преобразования и упрощения, в результате докажем следующую теорему.

Теорема 4. Уравнение на собственные значения дифференциального оператора (1)–(4) в секторе $[R_1; R_2]$ имеет вид:

$$g_1(s) = g_{0,1}(s) - \frac{g_{7,1}(s)}{8a^7s^7} + \underline{O}\left(\frac{1}{s^{14}}\right) = 0, \quad (23)$$

$$g_{01}(s) = \begin{vmatrix} w_1 z^{3w_1} & w_2 z^{3w_2} & w_3 z^{3w_3} & h_{14} \\ w_1^3 z^{3w_1} & w_2^3 z^{3w_2} & w_3^3 z^{3w_3} & h_{24} \\ w_1^5 z^{3w_1} & w_2^5 z^{3w_2} & w_3^5 z^{3w_3} & h_{34} \\ w_1^7 z^{3w_1} & w_2^7 z^{3w_2} & w_3^7 z^{3w_3} & h_{44} \end{vmatrix}, \quad (24)$$

$$h_{m4} = w_4^{2m-1} [z^{3w_4} - z^{-3w_4}] - \beta_{2m-1,1} [z^{w_4} - z^{-w_4}] - \beta_{2m-1,2} [z^{2w_4} - z^{-2w_4}], \quad (25)$$

$$m = 1, 2, 3, 4,$$

$$g_{7,1}(s) = \sum_{k=1}^4 g_{7,1,k}(s), \quad (26)$$

определители $g_{7,1,k}(s)$ ($k = 1, 2, 3$) получаются из определителя $g_{0,1}(s)$ из (24), (25) заменой k -го столбца на столбец

$$(u_{k1}; u_{k2}; u_{k3}; u_{k4})^*,$$

$$u_{km} = w_k w_k^{2m-1} z^{3w_k} \left(\int_0^\pi \dots \right)_{ak1} + w_k w_k^{2m-1} z^{3w_k} \left(\int_0^\pi \dots \right)_{a,k+4,1} + \bar{o}(1),$$

$$m = 1, 2, 3, 4;$$

определитель $g_{7,1,4}(s)$ получается из определителя $g_{0,1}(s)$ из (24), (25) заменой



четвертого столбца на столбец

$$\begin{aligned}
 & (p_{14}; p_{24}; p_{34}; p_{44})^*, \\
 & p_{m4} = V_m(\pi) - \beta_{2m-1,1} V_m\left(\frac{\pi}{3}\right) - \beta_{2m-1,1} V_m\left(\frac{2\pi}{3}\right), \\
 & V_m(c) = w_4 w_4^{2m-1} z^{\frac{3c}{\pi} w_4} \left(\int_0^c \dots \right)_{a44} + w_8 w_8^{2m-1} z^{\frac{-3c}{\pi} w_4} \left(\int_0^c \dots \right)_{a48} + \\
 & + w_4 w_4^{2m-1} z^{\frac{3c}{\pi} w_4} \left(\int_0^c \dots \right)_{a84} + w_8 w_8^{2m-1} z^{\frac{-3c}{\pi} w_4} \left(\int_0^c \dots \right)_{a88}, \\
 & w_8 = -w_4, \quad m = 1, 2, 3, 4.
 \end{aligned} \tag{27}$$

Вычисляя необходимые определители, используя формулы (5), (6), (11), (12), сделаем необходимые преобразования, приведем уравнение (23)–(27) к следующему виду:

$$g_1(s) = h_{0,1}(s) - \frac{w_4}{8a^7 s^7} h_{7,1}(s) + \underline{O}\left(\frac{1}{s^{14}}\right) = 0, \tag{28}$$

$$h_{0,1}(s) = 4[z^{3w_4} - z^{-3w_4}] - \sum_{m=1}^4 \beta_{2m-1,1} [z^{w_4} - z^{-w_4}] - \sum_{m=1}^4 \beta_{2m-1,2} [z^{2w_4} - z^{-2w_4}], \tag{29}$$

$$h_{7,1}(s) = 4H(\pi) - \sum_{m=1}^4 \beta_{2m-1,1} H\left(\frac{\pi}{3}\right) - \sum_{m=1}^4 \beta_{2m-1,2} H\left(\frac{2\pi}{3}\right), \tag{30}$$

$$\begin{aligned}
 H(c) = & z^{\frac{3c}{\pi} w_4} \left(\int_0^c \dots \right)_{a44} + z^{\frac{-3c}{\pi} w_4} \left(\int_0^c \dots \right)_{a48} + \\
 & + z^{\frac{3c}{\pi} w_4} \left(\int_0^c \dots \right)_{a84} + z^{\frac{-3c}{\pi} w_4} \left(\int_0^c \dots \right)_{a88},
 \end{aligned} \tag{31}$$

при этом из условия (3) следует, что

$$\sum_{m=1}^4 \beta_{2m-1,1} = 12, \quad \sum_{m=1}^4 \beta_{2m-1,2} = 0.$$

Основное приближение уравнения (28)–(31) имеет вид

$$\begin{aligned}
 h_{0,1}(s) = 0 & \stackrel{(3)}{\Leftrightarrow} 4[z^{3w_4} - z^{-3w_4}] - 12[z^{w_4} - z^{-w_4}] = 0 \Leftrightarrow \\
 \Leftrightarrow z^{6w_4} - 3z^{4w_4} + 3z^{2w_4} - 1 = 0 & \Leftrightarrow (z^{w_4} - 1)^3 (z^{w_4} + 1)^3 = 0.
 \end{aligned} \tag{32}$$

Уравнение (32) имеет два корня: $x_1 = x_2 = x_3 = 1$ (кратности 3) и $x_4 = x_5 = x_6 = -1$ (кратности 3), $x = z^{w_4}$. Таким образом, в случае граничных условий (2), (3) мы изучаем случай так называемых «кратных в главном собственных значений».

В случае $x = 1$ имеем:

$$z^{w_4} = 1 \Leftrightarrow e^{a\frac{\pi}{3}w_4 s} = 1 = e^{2\pi i k} \Leftrightarrow s_{k,1,\text{осн}} = \frac{6ik}{aw_4}, \quad k \in \mathbb{Z}. \tag{33}$$

В формуле (33) индекс 1 означает, что мы рассматриваем сектор 1) индикаторной диаграммы, биссектриса которого перпендикулярна отрезку $[R_1; R_2]$, индекс «осн»



означает, что мы нашли основное приближение корней уравнения (28)–(31), кратность этих корней равна трем, поэтому общее асимптотическое разложение корней уравнения (28)–(31) будет идти по дробным степеням k . Справедлива следующая теорема.

Теорема 5. *Асимптотика собственных значений дифференциального оператора (1)–(4) в секторе 1, соответствующих корням $x_1 = x_2 = x_3 = 1$ (кратности 3) уравнения (32) имеет следующий вид:*

$$s_{k,1,m} = \frac{6i}{aw_4}[k + D_{1m}],$$

$$D_{1m} = \frac{d_{1k,1,m}}{k^{7/3}} + \frac{d_{2k,1,m}}{k^{14/3}} + \frac{d_{3k,1,m}}{k^{21/3}} + \underline{O}\left(\frac{1}{k^{28/3}}\right), \quad m = 1, 2, 3, \quad k \in \mathbb{Z}. \quad (34)$$

Для доказательства теоремы 5 необходимо доказать, что коэффициенты $d_{1k,1,m}$, $d_{2k,1,m}$, $d_{3k,1,m}, \dots$ разложения (34) вычисляются единственным образом.

Применяя формулы Маклорена, находим:

$$z^{\pm nw_4} \Big|_{s_{k,1,m}} = e^{\pm a \frac{\pi}{3} nw_4 s} \Big|_{s_{k,1,m}} \stackrel{(34)}{=} e^{\pm 2\pi i n} e^{\pm 2\pi i n D_{1m}} =$$

$$= 1 \left[1 \pm (2\pi i n) D_{1m} + \frac{(2\pi i n)^2}{2} D_{1m}^2 \pm \frac{(2\pi i n)^3}{6} D_{1m}^3 + \frac{(2\pi i n)^4}{24} D_{1m}^4 \pm \right.$$

$$\left. \pm \frac{(2\pi i n)^5}{120} D_{1m}^5 + \underline{O}(D_{1m}^6) \right], \quad n = 1, 2, 3. \quad (35)$$

Подставляя формулы (34), (35) в уравнение (28)–(31), учтем условие (3) на коэффициенты граничных условий (2), сделаем необходимые преобразования, увидим, что коэффициенты при D_{1m} , D_{2m} , D_{4m} равны нулю, коэффициент при D_{1m}^3 равен $(-256\pi^3 i)$, коэффициент при D_{1m}^5 равен $512\pi^5 i$, в результате получим:

$$(-256\pi^3 i) \left[\frac{d_{1k,1,m}^3}{k^{21/3}} + \frac{3d_{1k,1,m}^2 d_{2k,1,m}}{k^{28/3}} + \frac{3d_{1k,1,m}^2 d_{3k,1,m}}{k^{35/3}} + \frac{3d_{1k,1,m} d_{2k,1,m}^2}{k^{35/3}} + \underline{O}\left(\frac{1}{k^{42/3}}\right) \right] +$$

$$+ 512\pi^5 i \left[\frac{d_{1k,1,m}^5}{k^{35/3}} + \underline{O}\left(\frac{1}{k^{42/3}}\right) \right] - \frac{w_4 a^7 w_4^7 i}{8a^7 6^7} \frac{1}{k^7} \left(1 + \underline{O}\left(\frac{1}{k^{10/3}}\right) \right) h_{7,1}(s) \Big|_{s_{k,1,m}} +$$

$$+ \underline{O}\left(\frac{1}{k^{14}}\right) = 0. \quad (36)$$

Для нахождения асимптотики величины $h_{7,1}(s)|_{s_{k,1,m}}$ из (36), (30), (31) воспользуемся формулами (11), (12), (34):

$$\left[z^{-nw_4} \left(\int_0^{\pi n/3} \dots \right)_{a48} + z^{nw_4} \left(\int_0^{\pi n/3} \dots \right)_{a84} \right] \Big|_{s_{k,1,m}} =$$

$$= \left[e^{-a \frac{\pi}{3} nw_4 s} \int_0^{\pi n/3} q(t) \exp[a(w_4 - w_8)st] dt_{a48} + \right.$$

$$\left. + e^{a \frac{\pi}{4} nw_4 s} \int_0^{\pi n/3} q(t) \exp(-2aw_4 st) dt_{a84} \right] \Big|_{s_{k,1,m}} =$$



$$= 2 \int_0^{\pi n/3} q(t) \cos[12kt + 12tD_{1m} - 2\pi kn - 2\pi D_{1m}n] dt_{mn}, \quad n, m = 1, 2, 3; \quad (37)$$

$$\left(\int_0^b \dots \right)_{a44} = \left(\int_0^b \dots \right)_{a88} = \int_0^b q(t) dt_{a44}, \quad (38)$$

$$\begin{aligned} \cos[12kt + (12t - 2\pi n)M_{1m}] &= \cos(12kt) - \frac{d_{1k,1,m}}{k^{7/3}}(12t - 2\pi n) \sin(12kt) - \\ &- \frac{d_{2k,1,m}}{k^{14/3}}(12t - 2\pi n) \sin(12kt) - \frac{d_{1k,1,m}^2}{2k^{14/3}}(12t - 2\pi n)^2 \cos(12kt) + \\ &+ \underline{O}\left(\frac{1}{k^{21/3}}\right), \quad n = 1, 2, 3. \end{aligned} \quad (39)$$

Подставим формулы (37)–(39) в уравнение (36) и приравняем коэффициенты при одинаковых степенях k . При $k^{-7} = k^{-21/3}$ имеем:

$$\begin{aligned} (-256\pi^3 i) d_{1k,1,m}^3 &= \frac{i}{8 \cdot 6^7} \left\{ \left[8 \left(\int_0^\pi \dots \right)_{a44} - 24 \left(\int_0^{\pi/3} \dots \right)_{a44} \right] + \right. \\ &+ \left. \left[8 \left(\int_0^\pi \dots \right)_{m1} - 24 \left(\int_0^\pi \dots \right)_{m1} \right] \right\}, \\ \left(\int_0^b \dots \right)_{m1} &= \int_0^b q(t) \cos(12kt) dt_{m1}, \quad \left(\int_0^b \dots \right)_{a44} = \int_0^b q(t) dt_{a44}, \quad m = 1, 2, 3, \end{aligned}$$

откуда находим

$$\begin{aligned} d_{1k,1,m} &= -\frac{1}{288\pi} \frac{1}{\sqrt[3]{3}} (\sqrt[3]{1})_m \left[\left(\int_0^\pi \dots \right)_{m2} - 3 \left(\int_0^{\pi/3} \dots \right)_{m2} \right], \\ (\sqrt[3]{1})_m &= e^{\frac{2\pi i}{3}(m-1)}, \quad m = 1, 2, 3, \\ \left(\int_0^b \dots \right)_{m2} &= \int_0^b q(t) [1 - \cos(12kt)] dt_{m2}. \end{aligned} \quad (40)$$

Формула (40) показывает, что произошло «расщепление» кратных в главном собственном значении $s_{k,1,\text{осн}}$ из (33) (кратности 3) на три однократные серии $s_{k,1,m}$ ($m = 1, 2, 3$) из (34), при этом коэффициенты $d_{1k,1,m}$ ($m = 1, 2, 3$) определены в (40).

Приравнивая в (36)–(39) коэффициенты при $k^{-28/3}$, выводим

$$\begin{aligned} d_{2k,1,m} &= \frac{1}{768\pi^3} \frac{1}{6^7} \frac{1}{d_{1k,1,m}} \left[\int_0^\pi q(t) (12t - 6\pi) \sin(12kt) dt - \right. \\ &- \left. 3 \int_0^{\pi/3} q(t) (12t - 2\pi) \sin(12kt) dt \right], \quad d_{1k,1,m} \neq 0. \end{aligned} \quad (41)$$

Приравнивая в (36)–(39) коэффициенты при $k^{-35/3}$, получим уравнение, из которого можно однозначно найти коэффициенты $d_{3k,1,m}$ в случае, если $d_{1k,1,m} \neq 0$.

Получение формул (40), (41) завершает доказательство теоремы 5.

Теорема 6. Асимптотика собственных значений дифференциального оператора (1)–(4) в секторе 1), соответствующих корням $x_4 = x_5 = x_6 = -1$



(кратности 3) уравнения (32), имеет вид

$$\begin{aligned} \tilde{s}_{k,1,m} &= \frac{6i}{aw_4} \left[\tilde{k} + \tilde{D}_{1m} \right], \\ \tilde{D}_{1m} &= \frac{\tilde{d}_{1k,1,m}}{\tilde{k}^{7/3}} + \frac{\tilde{d}_{2k,1,m}}{\tilde{k}^{14/3}} + O\left(\frac{1}{\tilde{k}^{21/3}}\right), \\ \tilde{k} &= k + \frac{1}{2}, \quad k \in \mathbb{Z}, \quad m = 4, 5, 6. \end{aligned} \tag{42}$$

Доказательство теоремы 6 аналогично доказательству теоремы 5:

$$x = -1 \Leftrightarrow e^{a\frac{\pi}{3}w_4s} = -1 = e^{2\pi ik} e^{\pi i} \Leftrightarrow s_{k,1,m,\text{осн}} = \frac{6i\tilde{k}}{aw_4}, \quad \tilde{k} = k + \frac{1}{2}, \quad k \in \mathbb{Z},$$

кратность корня равна трем. Значит (см. [20–22]), асимптотику собственных значений, соответствующих корню $x = -1$, надо искать в виде (42). Проведя вычисления, аналогичные вычислениям при выводе формул (35)–(41), убедимся в том, что коэффициенты $\tilde{d}_{1k,1,m}$ и $\tilde{d}_{2k,1,m}, \dots$ формулы (42) находятся единственным образом, при этом имеем:

$$\begin{aligned} \tilde{d}_{1k,1,m} &= -\frac{1}{288\pi} \frac{1}{\sqrt[3]{3}} (\sqrt[3]{1})_m \left[\left(\int_0^\pi \dots \right)_{m3} - 3 \left(\int_0^{\pi/3} \dots \right)_{m3} \right], \\ (\sqrt[3]{1})_m &= e^{\frac{2\pi i}{3}(m-1)}, \quad m = 4, 5, 6, \end{aligned} \tag{43}$$

$$\begin{aligned} \left(\int_0^b \dots \right)_{m3} &= \int_0^b q(t) [1 - \cos(12\tilde{k}t)] dt_{m3}; \\ \tilde{d}_{2k,1,m} &= -\frac{1}{768\pi^3} \frac{1}{6^7} \frac{1}{\tilde{d}_{1k,1,m}} \left[\int_0^\pi q(t) (12t - 6\pi) \sin(12\tilde{k}t) dt - \right. \\ &\quad \left. - 3 \int_0^{\pi/3} q(t) (12t - 2\pi) \sin(12\tilde{k}t) dt \right], \quad k \in \mathbb{Z}, \quad m = 4, 5, 6. \end{aligned} \tag{44}$$

В секторах 2–8 (биссектрисы которых перпендикулярны отрезкам $[R_2; R_3]$, $[R_3; R_4], \dots, [R_8; R_1]$) индикаторной диаграммы справедливы следующие утверждения.

Теорема 7. Асимптотика собственных значений дифференциального оператора (1)–(4) в секторах 2), 3), ..., 8) индикаторной диаграммы, соответствующих корням $x = 1$ (кратности 3) и $x = -1$ (кратности 3) уравнения (32), удовлетворяет следующему закону:

$$1) \quad s_{k,2,m} = s_{k,1,m} e^{\frac{2\pi i}{8}}, \quad s_{k,3,m} = s_{k,2,m} e^{\frac{2\pi i}{8}} = s_{k,1,m} e^{\frac{4\pi i}{8}}, \quad \dots, \quad s_{k,n,m} = s_{k,1,m} e^{\frac{\pi i}{4}(n-1)}, \\ n = 1, 2, \dots, 8, \quad \tilde{\lambda}_{k,n,m} = \tilde{s}_{k,n,m}^8, \quad k \in \mathbb{Z}, \quad m = 1, 2, 3; \tag{45}$$

$$\tag{46}$$

$s_{1,k,m}$ заданы формулами (34), (40), (41);

$$2) \quad \tilde{s}_{k,2,m} = \tilde{s}_{k,1,m} e^{\frac{2\pi i}{8}}, \quad \tilde{s}_{k,3,m} = \tilde{s}_{k,2,m} e^{\frac{2\pi i}{8}} = \tilde{s}_{k,1,m} e^{\frac{4\pi i}{8}}, \quad \dots, \quad \tilde{s}_{k,n,m} = \tilde{s}_{k,1,m} e^{\frac{\pi i}{4}(n-1)}, \\ n = 1, 2, \dots, 8, \quad \tilde{\lambda}_{k,n,m} = \tilde{s}_{k,n,m}^8, \quad k \in \mathbb{Z}, \quad m = 4, 5, 6, \tag{47}$$

$\tilde{s}_{k,1,m}$ определены формулами (42)–(44).

С помощью формул (45), (47) можно в каждом из секторов индикаторной диаграммы изучить асимптотику собственных функций оператора (1)–(4).

**Библиографический список**

1. *Birkhoff G. D.* On the asymptotic character of the solutions of the certain linear differential equations containing parameter // *Trans. Amer. Math. Soc.* 1908. Vol. 9. P. 219–231.
2. *Тамаркин Я. Д.* О некоторых общих задачах теории обыкновенных линейных дифференциальных уравнений и о разложении произвольных функций в ряды. Петроград : тип. М. П. Фроловой, 1917. 308 с.
3. *Федорюк М. В.* Асимптотика решений обыкновенных линейных дифференциальных уравнений n -го порядка // *Дифференц. уравнения.* 1966. Т. 2, № 4. С. 492–507.
4. *Гелъфанд И. М., Левитан Б. М.* Об одном простом тождестве для собственных значений дифференциального оператора второго порядка // *Докл. АН СССР.* 1953. Т. 88. С. 593–596.
5. *Левитан Б. М., Гасымов М. Г.* Определение дифференциального оператора по двум спектрам // *УМН.* 1964. Т. 19, вып. 2(116). С. 3–63.
6. *Лидский В. Б., Садовничий В. А.* Асимптотические формулы для корней одного класса целых функций // *Матем. сб.* 1968. Т. 75(117), № 4. С. 558–566.
7. *Ильин В. А.* О сходимости разложений по собственным функциям в точках разрыва коэффициентов дифференциального оператора // *Матем. заметки.* 1977. Т. 22, вып. 5. С. 679–698.
8. *Митрохин С. И.* О формулах регуляризованных следов для дифференциальных операторов второго порядка с разрывными коэффициентами // *Вестн. Моск. ун-та. Сер.: матем., мех.* 1986. № 6. С. 3–6.
9. *Hald O. H.* Discontinuous inverse eigenvalue problems // *Commun. Pure Appl. Math.* 1984. Vol. 37, iss. 5. P. 539–577. DOI: 10.1002/cpa.3160370502.
10. *Митрохин С. И.* О некоторых спектральных свойствах дифференциальных операторов второго порядка с разрывной весовой функцией // *Докл. АН.* 1997. Т. 356, № 1. С. 13–15.
11. *Gottlieb H. P. W.* Iso-spectral operators : some model examples with discontinuous coefficients // *J. Math. Anal. and Appl.* 1988. Vol. 132. P. 123–137.
12. *Винокуров В. А., Садовничий В. А.* Асимптотика любого порядка собственных значений и собственных функций краевой задачи Штурма—Лиувилля на отрезке с суммируемым потенциалом // *Дифференц. уравнения.* 1998. Т. 34, № 10. С. 1423–1426.
13. *Винокуров В. А., Садовничий В. А.* Асимптотика любого порядка собственных значений и собственных функций краевой задачи Штурма—Лиувилля на отрезке с суммируемым потенциалом // *Изв. РАН. Сер. матем.* 2000. Т. 64, вып. 4. С. 47–108. DOI: 10.4213/im295.
14. *Митрохин С. И.* Асимптотика собственных значений дифференциального оператора четвёртого порядка с суммируемыми коэффициентами // *Вестн. Моск. ун-та. Сер.: матем., мех.* 2009. № 3. С. 14–17.
15. *Митрохин С. И.* О спектральных свойствах одного дифференциального оператора с суммируемыми коэффициентами с запаздывающим аргументом // *Уфимск. матем. журн.* 2011. Т. 3, № 4. С. 95–115.
16. *Митрохин С. И.* О спектральных свойствах дифференциального оператора с суммируемым потенциалом и гладкой весовой функцией // *Вестн. СамГУ. Естественнонауч. сер.* 2008. № 8/1(67). С. 172–187.
17. *Наймарк М. А.* Линейные дифференциальные операторы. М. : Наука, 1969. 528 с.
18. *Марченко В. А.* Спектральная теория операторов Штурма—Лиувилля. Киев : Наук. думка, 1977. 329 с.



19. Лундина Д. Ш. Точная зависимость между асимптотическими разложениями собственных значений краевых задач Штурма—Лиувилля и гладкостью потенциала // Теория функций, функциональный анализ и их приложения. 1982. № 37. С. 74–101.
20. Беллман Р., Кук К. Л. Дифференциально-разностные уравнения. М. : Мир, 1967. 548 с.
21. Садовничий В. А., Любишкин В. А. О некоторых новых результатах теории регуляризованных следов дифференциальных операторов // Дифференц. уравнения. 1982. Т. 18, № 1. С. 109–116.
22. Митрохин С. И. О «расщеплении» кратных в главном собственных значений многоточечных краевых задач // Изв. вузов. Матем. 1997. № 3(418). С. 38–43.

Образец для цитирования:

Митрохин С. И. Многоточечные дифференциальные операторы: «расщепление» кратных в главном собственных значений // Изв. Саратов. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2017. Т. 17, вып. 1. С. 5–18. DOI: 10.18500/1816-9791-2017-17-1-5-18.

Multipoint Differential Operators: „Splitting“ of the Multiple in Main Eigenvalues

S. I. Mitrokhin

Sergei I. Mitrokhin, Lomonosov Moscow State University, Research Computing Center, 1, building 4, Leninskiye Gory, 119991, Moscow, Russia, mitrokhin-sergey@yandex.ru

We study the boundary value problem for the differential operator of the eighth order with a summable potential. The boundary conditions of the boundary value problem are multipoint. We derived the integral equation for solutions of differential equation which define the studied differential operator. The asymptotic formulas and estimates for the solutions of the corresponding differential equation for large values of the spectral parameter are obtained. By studying the boundary conditions, the equation for the eigenvalues as the determinant of the fourth order is derived. By using the properties of determinants and asymptotic formulas for solutions of differential equation we study the asymptotic behavior of the roots of the equation on eigenvalues of the operator. The coefficients of the boundary conditions of the studied boundary value problem are chosen in such a way that the main approach of the equation for the eigenvalues of the operator has two roots multiplicity three. The indicator diagram of the equation for the eigenvalues is studied in the detail. Studying one of the sectors of the indicator diagram, we derived the asymptotics of the eigenvalues of the studied operator. It is shown that the eigenvalues which are multiple in the main approximation „are split“ into three single series of eigenvalues. Similar properties of eigenvalues are observed in other sectors of the indicator diagram.

Key words: differential operator, spectral parameter, multipoint boundary conditions, summable potential, indicator diagram, asymptotics of the eigenvalues.

References

1. Birkhoff G. D. On the asymptotic character of the solutions of the certain linear differential equations containing parameter. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 1908, vol. 9, pp. 219–231.
2. Tamarkin J. D. *On some general problems in the theory of ordinary linear differential equations and on the expansion in series of arbitrary functions*. Petrograd, typography M. P. Frolova, 1917. 308 p. (in Russian).



3. Fedorjuk M. V. The asymptotics of solutions to ordinary linear differential equations of the n -th order. *Differ. Uravn.*, 1966, vol. 2, no. 4, pp. 492–507 (in Russian).
4. Gel'fand I. M., Levitan B. M. Ob odnom prostom tozhdestve dlia sobstvennykh znachenii differentsial'nogo operatora vtorogo poriadka [On a simple identity for eigenvalues of a differential operator of the second order]. *Dokl. USSR Academy of Sciences*, 1953, vol. 88, pp. 593–596 (in Russian).
5. Levitan B. M., Gasyimov M. G. Determination of a differential equation by two of its spectra. *Russian Math. Surveys*, 1964, vol. 19, iss. 2, pp. 1–63. DOI: 10.1070/RM1964v019n02ABEH001145.
6. Lidskii V. B., Sadovnichii V. A. Asymptotic formulas for the zeros of a class of entire functions. *Math. USSR-Sb.*, 1968, vol. 4, iss. 4, pp. 519–527. DOI: 10.1070/SM1968v004n04ABEH002812.
7. Il'in V. A. Convergence of eigenfunction expansions at points of discontinuity of the coefficients of a differential operator. *Math. Notes*, 1977, vol. 22, iss. 5, pp. 870–882. DOI: 10.1007/BF01098352.
8. Mitrokhin S.I. About formulas of regularized traces for differential operators of the second order with discontinuous coefficients. *Vestnik Moskovskogo universiteta. Ser.: matematika, mehanika* [Vestnik MGU. Ser.: Mathematics, mechanics], 1986, iss. 6, pp. 3–6 (in Russian).
9. Hald O. H. Discontinuous inverse eigenvalue problems. *Commun. Pure Appl. Math.*, 1984, vol. 37, iss. 5, pp. 539–577. DOI: 10.1002/cpa.3160370502.
10. Mitrokhin S. I. About some spectral properties of differential operators of the second order with discontinuous weight function. *Doklady Akademii nauk* [Doklady Math.], 1997, vol. 356, iss. 1, pp. 13–15 (in Russian).
11. Gottlieb H. P. W. Iso-spectral operators : some model examples with discontinuous coefficients. *J. Math. Anal. and Appl.*, 1988, vol. 132, pp. 123–137.
12. Vinokurov V. A., Sadovnichii V. A. Arbitrary-order asymptotics of the eigenvalues and eigenfunctions of the Sturm – Liouville boundary value problem on an interval with integrable potential. *Differ. Equ.*, 1999, vol. 34, no. 10, pp. 1425–1429.
13. Vinokurov V. A., Sadovnichii V. A. Asymptotics of any order for the eigenvalues and eigenfunctions of the Sturm – Liouville boundary-value problem on a segment with a summable potential. *Izv. Math.*, 2000, vol. 64, iss. 4, pp. 695–754. DOI: 10.1070/im2000v064n04ABEH000295.
14. Mitrokhin S.I. Asymptotics of the eigenvalues of the differential operator of the fourth order with summable coefficients. *Vestnik Moskovskogo universiteta. Ser.: matematika, mehanika* [Vestnik MGU. Ser.: Mathematics, mechanics], 2009, iss. 3, pp. 14–17 (in Russian).
15. Mitrokhin S. I. On spectral properties of a differential operator with summable coefficients with a retarded argument. *Ufimsk. Mat. Zh.*, 2011, vol. 3, no. 4, pp. 95–115 (in Russian).
16. Mitrokhin S. I. The spectral properties of a differential operator with summable potential and smooth weight function. *Vestnik of Samara State University. Natural Science Ser.*, 2008, no. 8/1(67), pp. 172–187 (in Russian).
17. Naimark M. A. *Lineynye differentsial'nye operatory* [Linear differential operators]. Moscow, Nauka, 1969. 528 p. (in Russian).
18. Marchenko V. A. *Operatory Shturma – Liuvillya i ikh prilozheniya* [Sturm – Liouville operators and their applications]. Kiev, Naukova Dumka, 1977. 329 p. (in Russian).
19. Lundina D. Sh. Exact relationship between the asymptotic expansions of the eigenvalues of boundary value problems of the Sturm-Liouville problem and the smoothness of the



- potential. *Teoriya funktsiy, funktsional'nyy analiz i ikh prilozheniya* [The theory of functions, functional analysis and their applications], 1982, no. 37, pp. 74–101 (in Russian).
20. Bellman R., Cooke K. L. *Differentsial'no-raznostnye uravneniya* [Differential-difference equations]. Moscow, Mir, 1967. 548 p. (in Russian).
21. Sadovnichii V. A., Lyubishkin V. A. Some new results of the theory of regularized traces of differential operators. *Differ. Uravn.*, 1982, vol. 18, no. 1, pp. 109–116 (in Russian).
22. Mitrokhin S. I. On the "splitting" in the main approximation of multiple eigenvalues of multipoint boundary value problems. *Russian Math. [Iz. VUZ]*, 1997, no. 3, pp. 37–42.

Cite this article as:

Mitrokhin S. I. Multipoint Differential Operators: „Splitting“ of the Multiple in Main Eigenvalues. *Izv. Saratov Univ. (N. S.), Ser. Math. Mech. Inform.*, 2017, vol. 17, iss. 1, pp. 5–18 (in Russian). DOI: 10.18500/1816-9791-2017-17-1-5-18.



УДК 517.986.68

ОПЕРАТОРЫ КМС ТИПА $B(1, 1)$ И СУПЕРАЛГЕБРА ЛИ $\mathfrak{osp}(3, 2)$

Г. С. Мовсисян¹, А. Н. Сергеев²

¹Мовсисян Геворг Суренович, аспирант кафедры геометрии, Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского, Россия, 410012, Саратов, Астраханская, 83, movsisyans@gmail.com

²Сергеев Александр Николаевич, доктор физико-математических наук, профессор кафедры геометрии, Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского, Россия, 410012, Саратов, Астраханская, 83, sergeevAN@info.sgu.ru

Основной целью данной статьи является исследование связей между теорией представлений супералгебры Ли $\mathfrak{osp}(3, 2)$ и дифференциальным оператором Калоджеро – Мозера – Сазерленда (КМС) типа $B(1, 1)$. Этот дифференциальный оператор зависит (полиномиально) от трёх параметров. Соответствующие полиномиальные собственные функции также зависят от трёх параметров, но в общем случае коэффициенты этих собственных функций имеют рациональную зависимость от параметров. Важным является вопрос о специализации собственных функций при заданных значениях параметров. Наиболее интересен случай супералгебр Ли, в котором $k = p = -1$. В этом случае доказывается, что характеры неприводимых конечномерных представлений супералгебр Ли $\mathfrak{osp}(3, 2)$ могут быть получены из собственных функций дифференциального оператора КМС типа $B(1, 1)$ при указанной специализации и условии того, что k, p связаны также некоторым линейным соотношением.

Ключевые слова: супералгебра, представление, характер, квантовая интегрируемая система.

DOI: 10.18500/1816-9791-2017-17-1-19-30

ВВЕДЕНИЕ

Супералгебра Ли $\mathfrak{osp}(3, 2)$ является одним из простейших примеров супералгебр, теория представлений которых не полупроста. В этом случае, как правило, задача описания неприводимых представлений в терминах более простых представлений (в частности, вычисления их характеров) является глубоко нетривиальной. В общем случае для супералгебр $\mathfrak{osp}(n, 2m)$ эта задача была решена В. Сергановой [1]. При этом используются полиномы Каждана – Люстига специального вида, а соответствующий алгоритм дает кратности неприводимых модулей в виртуальных модулях Эйлера, характеры которых известны. В данной работе в частном случае супералгебры $\mathfrak{osp}(3, 2)$ дается другой способ вычисления характеров неприводимых представлений. А именно, используя связь между супералгебрами Ли и деформированными квантовыми интегрируемыми системами [2], вычисляются специализации собственных полиномиальных функций оператора Калоджеро – Мозера – Сазерленда (КМС) типа $B(1, 1)$. Более точно рассматриваемые собственные функции являются полиномами от двух переменных $F_\Lambda(v, u)$ и нумеруются диаграммами Юнга Λ специального вида (крюки). При этом коэффициенты этих полиномов рационально зависят от двух параметров k и p . Случай $k = -1, p = -1$ соответствует супералгебре Ли $\mathfrak{osp}(3, 2)$. Но этот случай является особым, в том смысле, что коэффициенты полиномов $F_\Lambda(v, u)$ имеют полюса в этих точках. Оказывается, что предел при $k \rightarrow -1, p \rightarrow -1$ существует, если параметры p, k связаны линейным соотношением (которое зависит от



диаграммы Λ), и совпадает с характером неприводимого модуля соответствующего диаграмме Λ . Основным новым результатом работы сформулирован в теореме 4.

Для удобства читателя результаты излагаются в виде максимально независимом от других источников, используя все возможные упрощения в случае системы корней $B(1, 1)$.

1. ДЕФОРМИРОВАННЫЙ ОПЕРАТОР КМС ТИПА $B(1, 1)$

Рассмотрим дифференциальный оператор КМС с системой корней типа $B(1, 1)$, который является частным случаем общего КМС оператора типа $B(m, n)$ [3]

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_2 = & (\partial_x)^2 + k(\partial_y)^2 - p \left(\frac{x+1}{x-1} \partial_x + \frac{y+1}{y-1} \partial_y \right) + \\ & + (k-1) \frac{y^2+1}{y^2-1} \partial_y + \frac{y+x}{y-x} (\partial_x - k\partial_y) - \frac{y+x^{-1}}{y-x^{-1}} (\partial_x + k\partial_y), \end{aligned} \quad (1)$$

где $\partial_x = x \frac{\partial}{\partial x}$, $\partial_y = y \frac{\partial}{\partial y}$ и k, p — комплексные параметры. Введём новые переменные $u = \frac{1}{2}(x + x^{-1} - 2)$, $v = \frac{1}{2}(y + y^{-1} - 2)$, тогда оператор (1) примет вид

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_2 = & (\partial_u)^2 + k(\partial_v)^2 - \frac{u+v}{u-v} (\partial_u - k\partial_v) - (1+p)(\partial_u + \partial_v) - \\ & - (1+2p) \left(\frac{\partial}{\partial u} + \frac{\partial}{\partial v} \right) + 2 \frac{\partial}{\partial u} \partial_u + 2k \frac{\partial}{\partial v} \partial_v - \frac{4}{u-v} (\partial_u - k\partial_v), \end{aligned} \quad (2)$$

Мы будем называть параметры k, p общими, если $1, p, k$ являются линейно независимыми над полем рациональных чисел.

2. АЛГЕБРЫ ДЕФОРМИРОВАННЫХ СИММЕТРИЧЕСКИХ ПОЛИНОМОВ И СДВИНУТЫХ ДЕФОРМИРОВАННЫХ СИММЕТРИЧЕСКИХ ПОЛИНОМОВ

Естественной областью действия оператора (2) является следующая алгебра деформированных симметрических полиномов:

$$\mathfrak{A}_{1,1} = \{f \in \mathbb{C}[u, v] \mid (\partial_u - k\partial_v)f \in (u-v)\}, \quad (3)$$

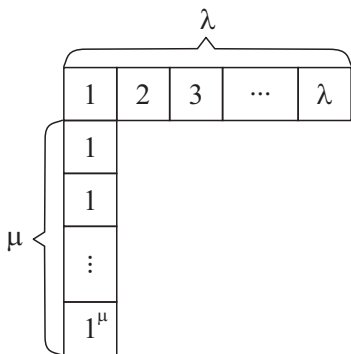


Диаграмма Юнга – Крюк

где $(u-v)$ — это идеал, порождённый многочленом $u-v$ и $\partial_u = u \frac{\partial}{\partial u}$, $\partial_v = v \frac{\partial}{\partial v}$. В качестве линейного базиса в $\mathfrak{A}_{1,1}$ выберем суперполиномы Джека [4], которые в этом случае имеют вид

$$P_\Lambda = v^\lambda u^\mu - \frac{\mu - k\lambda}{\mu + 1 - k(\lambda - 1)} v^{\lambda-1} u^{\mu+1},$$

где $\Lambda = (\lambda, \mu)$ — диаграмма Юнга – Крюк (рисунок). Обозначим через $\Lambda - \delta$ диаграмму $(\lambda - 1, \mu)$, а через $\Lambda - \varepsilon$ — диаграмму $(\lambda, \mu - 1)$.

Лемма ниже является частным случаем теоремы 2 из [2].

Лемма 1. Если k не является рациональным неотрицательным числом, то многочлены P_Λ корректно определены и являются базисом алгебры $\mathfrak{A}_{1,1}$.



Доказательство. Из явной формулы для P_Λ следует, что они корректно определены, если k — не является рациональным неотрицательным числом. Покажем теперь, что P_Λ линейно независимы. Предположим, что $\sum_{\Lambda} C_{\Lambda} P_{\Lambda} = 0$ и не все коэффициенты равны нулю. Среди таких коэффициентов выберем максимальный $C_{\bar{\Lambda}}$, относительно лексикографического порядка на парах (λ, μ) . Рассматривая предыдущее линейное соотношение как многочлен от v, u , мы видим, что его старший коэффициент (относительно лексикографического порядка) тоже равен $C_{\bar{\Lambda}}$. Это дает противоречие и доказывает линейную независимость.

Докажем, теперь, что многочлены P_Λ образуют базис. Из условия (3) следует, что размерность однородной компоненты степени n алгебры $\mathfrak{A}_{1,1}$ равна $n - 1$. Но ровно столько же существует многочленов P_Λ степени n . Это доказывает утверждение о базисе. \square

Лемма 2. Оператор (2) действует на базис P_Λ по следующим формулам:

$$\mathcal{L}_2(P_\Lambda) = a(\Lambda, \Lambda)P_\Lambda + a(\Lambda - \delta, \Lambda)P_{\Lambda-\delta} + a(\Lambda - \varepsilon, \Lambda)P_{\Lambda-\varepsilon},$$

где $a(\Lambda, \Lambda) = \mu(\mu + 1) + k\lambda(\lambda - 1) - (p + 1)(\lambda + \mu)$, $a(\Lambda - \varepsilon, \Lambda) = \mu(2\mu - 2p - 1)$,

$$a(\Lambda - \delta, \Lambda) = (\lambda - 1)(2k\lambda - 2k - 2p - 1) \frac{\mu - k\lambda}{\mu + 1 - k(\lambda - 1)} \frac{\mu + 1 - k(\lambda - 2)}{\mu - k(\lambda - 1)}.$$

В частности, оператор \mathcal{L}_2 отображает алгебру $\mathfrak{A}_{1,1}$ в себя.

Доказательство. Оператор (2) состоит из суммы двух операторов, т. е.

$$\mathcal{L}_2 = \mathcal{L}_2^+ + \mathcal{L}_2^-,$$

где

$$\mathcal{L}_2^+ = (\partial_u)^2 + k(\partial_v)^2 - \frac{u+v}{u-v}(\partial_u - k\partial_v) - (1+p)(\partial_u + \partial_v),$$

$$\mathcal{L}_2^- = -(1+2p) \left(\frac{\partial}{\partial u} + \frac{\partial}{\partial v} \right) + 2\frac{\partial}{\partial u}\partial_u + 2k\frac{\partial}{\partial v}\partial_v - \frac{4}{u-v}(\partial_u - k\partial_v).$$

Легко проверить, что многочлен P_Λ является собственной функцией оператора \mathcal{L}_2^+ с собственным значением $a(\Lambda, \Lambda)$. Далее легко проверить, что

$$\mathcal{L}_2^-(P_\Lambda) = \alpha v^\lambda u^{\mu-1} + \beta v^{\lambda-1} u^\mu + \gamma v^{\lambda-2} u^{\mu+1},$$

где

$$\alpha = 2\mu^2 - (1+2p)\mu, \quad \beta = -\frac{2k(\mu - k\lambda)(\lambda - 1)^2}{\mu + 1 - k(\lambda - 1)} + \frac{(1+2p)(\mu - k\lambda)(\lambda - 1)}{\mu + 1 - k(\lambda - 1)},$$

$$\gamma = -\left(2\frac{(\mu - k\lambda)(\mu + 1)^2}{\mu + 1 - k(\lambda - 1)} + 2k\lambda^2 - (1+2p)\frac{(\mu - k\lambda)(\mu + 1)}{\mu + 1 - k(\lambda - 1)} + (1+2p)\lambda - 4(\mu - k\lambda) \right).$$

В то же время мы предполагаем, что

$$\mathcal{L}_2^-(P_\Lambda) = a(\Lambda - \delta, \Lambda)P_{\Lambda-\delta} + a(\Lambda - \varepsilon, \Lambda)P_{\Lambda-\varepsilon}.$$



Таким образом,

$$a(\Lambda - \delta, \Lambda)P_{\Lambda-\delta} + a(\Lambda - \varepsilon, \Lambda)P_{\Lambda-\varepsilon} = \alpha v^\lambda u^{\mu-1} + \beta v^{\lambda-1} u^\mu + \gamma v^{\lambda-2} u^{\mu+1}.$$

Пользуясь явной формулой для многочленов P_Λ и приравнивая коэффициенты при одинаковых мономах, в результате получим переопределённую систему на $a(\Lambda - \varepsilon, \Lambda)$ и $a(\Lambda - \delta, \Lambda)$. Решая эту систему, получим формулы, указанные в утверждении леммы. Тот факт, что оператор (2) отображает алгебру $\mathfrak{A}_{1,1}$ в себя, сразу следует из предыдущих вычислений. \square

Нам также понадобится алгебра сдвинутых деформированных симметрических полиномов, которая на самом деле изоморфна алгебре интегралов задачи КМС [2]

$$\mathfrak{B}_{1,1} = \left\{ \begin{array}{l} f \in \mathbb{C}[v, u] \mid f \text{ обладает свойствами} \\ 1) f(v, u) \text{ многочлен от } (v - \frac{1}{2} - \frac{1}{2}(p+1)k^{-1})^2 \text{ и } (u - \frac{1}{2}p)^2, \\ 2) f(v+1, u-1) = f(v, u), \text{ если } u = kv \end{array} \right\}.$$

Для общих значений k, p определим многочлены

$$Q_\Lambda(v, u) = (v-1) \dots (v-\lambda+1)u(u-1) \dots (u-\mu+1) \times \\ \times k^{-2\mu}(v-(p+1)k^{-1}) \dots (v+\lambda-2-(p+1)k^{-1})(u+1-(p+1)) \dots (u+\mu-(p+1)) \times \\ \times \left[(v-k^{-1}\mu)(v+k^{-1}\mu-1-(p+1)k^{-1}) - \frac{\lambda-k^{-1}\mu}{\lambda-1-k^{-1}(\mu+1)} k^{-2}(u-\mu)(u+\mu-p) \right].$$

Общий случай следующей леммы рассмотрен в работе [3, предложение 6.3].

Лемма 3. *Полином $Q_\Lambda(v, u)$ обладает следующими свойствами:*

1) $Q_\Lambda(N) = Q_\Lambda(\tilde{\lambda}, \tilde{\mu}) = 0$, если $N = (\tilde{\lambda}, \tilde{\mu})$ не содержит Λ и

$$Q_\Lambda(\Lambda) = Q_\Lambda(\Lambda) = k^{-2\mu}(\lambda-1)!\mu!(\lambda-(p+1)k^{-1}) \dots (2\lambda-2-(p+1)k^{-1}) \times \\ \times (\mu-p) \dots (2\mu-p-1)(\lambda-k^{-1}\mu)(\lambda+k^{-1}\mu-1-(p+1)k^{-1});$$

2) $Q_\Lambda(v, u)$ является полиномом от $(v - \frac{1}{2} - \frac{1}{2}(p+1)k^{-1})^2$ и $(u - \frac{1}{2}p)^2$;

3) $Q_\Lambda(v+1, u-1) = Q_\Lambda(v, u)$, если $u = kv$.

Доказательство. 1. Рассмотрим две диаграммы $\Lambda = (\lambda, \mu)$ и $N = (\tilde{\lambda}, \tilde{\mu})$. Видно, что если $\lambda > \tilde{\lambda}$ или $\mu > \tilde{\mu}$, то полином обращается в нуль.

2. Данное свойство легко доказать, сгруппировав элементы многочлена $Q_\Lambda(v, u)$.

3. Для доказательства этого свойства нужно показать, что

$$\frac{Q_\Lambda(v+1, u-1)}{Q_\Lambda(v, u)} \Big|_{u=kv} = 1,$$

таким образом доказательство сводится к подсчёту левой части последнего равенства

$$\frac{Q_\Lambda(v+1, u-1)}{Q_\Lambda(v, u)} \Big|_{u=kv} = \frac{(v+\lambda-1-k^{-1}(p+1))}{v-\lambda+1} \times \\ \times \frac{\left[(v+1-k^{-1}\mu) - \frac{\lambda-k^{-1}\mu}{\lambda-1-k^{-1}(\mu+1)}(v-k^{-1}-\mu k^{-1}) \right]}{\left[(v-k^{-1}\mu-1-(p+1)k^{-1}) - \frac{\lambda-k^{-1}\mu}{\lambda-1-k^{-1}(\mu+1)}(v+\mu k^{-1}-pk^{-1}) \right]}.$$



Упростим числитель и знаменатель в квадратных скобках:

$$\begin{aligned}
 & (v + 1 - k^{-1}\mu) - \frac{\lambda - k^{-1}\mu}{\lambda - 1 - k^{-1}(\mu + 1)}(v - k^{-1} - \mu k^{-1}) = \\
 & = - \left(\frac{1 + k^{-1}}{\lambda - 1 - k^{-1}(\mu + 1)} \right) (v - \lambda + 1), \\
 & (v - k^{-1}\mu - 1 - (p + 1)k^{-1}) - \frac{\lambda - k^{-1}\mu}{\lambda - 1 - k^{-1}(\mu + 1)}(v + \mu k^{-1} - p k^{-1}) = \\
 & = - \left(\frac{1 + k^{-1}}{\lambda - 1 - k^{-1}(\mu + 1)} \right) (v + \lambda - 1 - k^{-1}(p + 1)). \quad \square
 \end{aligned}$$

Лемма 4. Для общих значений параметров многочлены $Q_\Lambda(v, u)$ являются базисом алгебры $\mathfrak{B}_{1,1}$.

Доказательство. Докажем вначале, что если $f \in \mathfrak{B}_{1,1}$ и $f = \varphi(v^2, k^{-2}u^2) +$ члены меньшей степени, то $\varphi \in \mathfrak{A}_{1,1}$. Действительно, разложим $f(v + 1, u - 1)$ в ряд Тейлора $f(v + 1, u - 1) = f(v, u) + f'_v(v, u) - f'_u(v, u) + \dots$, так как $f \in \mathfrak{B}_{1,1}$, то при $u = kv$ $f(v + 1, u - 1) = f(v, u)$, тогда $f'_v(v, u) - f'_u(v, u) \equiv 0$. Но так как $f = \varphi(v^2, k^{-2}u^2) +$ члены меньшей степени, то отсюда следует что $f'_v = \varphi'_v +$ члены меньшей степени, $f'_u = \varphi'_u +$ члены меньшей степени, отсюда $\varphi'_v - \varphi'_u = 0$. Для удобства введём замены $x = v^2$, $y = k^{-2}u^2$, отсюда при $u = kv$ получаем $y = x$. Тогда $\varphi'_v = \varphi'_x x'_v = 2v\varphi'_x$, $\varphi'_u = \varphi'_y y'_u = 2uk^{-1}\varphi'_y$ и $2v\varphi'_x - 2uk^{-1}\varphi'_y = 0$, при $u = kv$ получаем условие $\varphi'_x - k\varphi'_y = 0$, которое эквивалентно условию $\partial_u - k\partial_v = 0$ из алгебры $\mathfrak{A}_{1,1}$, а это означает, что $\varphi \in \mathfrak{A}_{1,1}$.

Докажем теперь, что $Q_\Lambda(v, u)$ является базисом алгебры $\mathfrak{B}_{1,1}$. Достаточно показать, что их старшие компоненты образуют базис $\mathfrak{A}_{1,1}$. Но, как легко проверить, старшая компонента $Q_\Lambda(v, u)$ равна $P_\Lambda(v^2, k^{-2}u^2)$ и утверждение следует из леммы 1. \square

Общий случай леммы 4 доказан в [2, предложение 3].

Теорема 1. Справедлива формула Пиери для многочленов P_Λ :

$$P_{\square} P_\Lambda = P_{\Lambda+\delta} + k \frac{\mu - k\lambda}{\mu + 1 - k(\lambda - 1)} \frac{\mu + 2 - k(\lambda - 1)}{\mu + 1 - k\lambda} P_{\Lambda+\varepsilon},$$

где $P_{\square} = v + ku$.

Доказательство. Предположим, что

$$P_{\square} P_\Lambda = a P_{\Lambda+\delta} + b P_{\Lambda+\varepsilon}.$$

В то же время легко проверить, что

$$P_{\square} P_\Lambda = v^{\lambda+1} u^\mu - \left(\frac{\mu - k\lambda}{\mu + 1 - k(\lambda - 1)} - k \right) v^\lambda u^{\mu+1} - k \frac{\mu - k\lambda}{\mu + 1 - k(\lambda - 1)} v^{\lambda-1} u^{\mu+2}.$$

Таким образом,

$$a P_{\Lambda+\varepsilon} + b P_{\Lambda+\delta} = a \left(v^{\lambda+1} u^\mu - \frac{\mu - k(\lambda + 1)}{\mu + 1 - k\lambda} v^\lambda u^{\mu+1} \right) +$$



$$+b \left(v^\lambda u^{\mu+1} - \frac{\mu + 1 - k\lambda}{\mu + 2 - k(\lambda - 1)} v^{\lambda-1} u^{\mu+2} \right).$$

Приравняв коэффициенты при одинаковых мономах, в результате получим переопределённую систему, из которой найдем коэффициенты a и b :

$$a = 1, \quad b = k \frac{\mu - k\lambda}{\mu + 1 - k(\lambda - 1)} \frac{\mu + 2 - k(\lambda - 1)}{\mu + 1 - k\lambda}. \quad \square$$

Теорема 2. Для общих значений параметров справедлива следующая формула Пиери для полиномов $Q_\Lambda(v, u)$:

$$\begin{aligned} & \left[(v - \lambda)(v + \lambda - 1) - k^{-1}(p + 1)(u - \mu + v - \lambda) + k^{-1}(u - \mu)(u + \mu + 1) \right] Q_\Lambda(v, u) = \\ & = Q_{\Lambda+\delta}(v, u) + Q_{\Lambda+\varepsilon}(v, u) k \frac{\mu - k\lambda}{\mu + 1 - k(\lambda - 1)} \frac{\mu + 2 - k(\lambda - 1)}{\mu + 1 - k\lambda}. \end{aligned} \quad (4)$$

Доказательство. Пусть f — разность между левой и правой частью равенства формулы (4). Мы хотим показать, что $f = 0$ тождественно. В лемме 4 было доказано, что старшая компонента $Q_\Lambda(v, u)$ — это $P_\Lambda(v^2, k^{-2}u^2)$. Следовательно, $\deg f \leq 2|\Lambda| + 2$, где $|\Lambda| = \lambda + \mu$. Но по теореме 1 P_Λ удовлетворяют формуле Пиери с теми же коэффициентами, поэтому $\deg f \leq 2|\Lambda| + 1$. Докажем теперь, что $f(N) = 0$ для любого разбиения N такого, что $|N| \leq |\Lambda|$. В самом деле, если $|N| \leq |\Lambda|$ и $N \neq \Lambda$, то по лемме 3 $Q_\Lambda(N) = Q_{\Lambda+\varepsilon}(N) = Q_{\Lambda+\delta}(N) = 0$ и, следовательно, $f(N) = 0$. Если $N = \Lambda$, то коэффициент при Q_Λ в левой части равенства (4) равен нулю, и опять по лемме 3 $Q_{\Lambda+\varepsilon}(N) = Q_{\Lambda+\delta}(N) = 0$. Следовательно, $f(\Lambda) = 0$. Разложим многочлен f по базису Q_Λ

$$f = \sum_N c_N Q_N. \quad (5)$$

Сравнивая степени левой и правой частей равенства, мы видим, что $|N| \leq |\Lambda|$. Предположим, что не все коэффициенты в этом разложении равны нулю. Пусть наименьшая (относительно включения) диаграмма такая, что $c_M \neq 0$. Если $N \subset M$, $N \neq M$, то $c_N = 0$ согласно нашему выбору M . Если N не содержится в M , то по лемме 3 $Q_N(M) = 0$. Поэтому, подставляя в обе части равенства (5) $N = M$, получим $f(N) = c_M Q_M$. По предыдущему $f(N) = 0$, а по лемме 3 $Q_M(M) \neq 0$. Следовательно, $c_M = 0$. Полученное противоречие доказывает теорему. \square

3. СОБСТВЕННЫЕ ФУНКЦИИ

В этом параграфе мы предполагаем, что параметры p, k — общие. Определим для каждой диаграммы Λ многочлен F_Λ по следующей формуле:

$$F_\Lambda = \sum_{M \subseteq \Lambda} c(M, \Lambda) P_M, \quad (6)$$

где [3]

$$c(M, \Lambda) = 2^{|\Lambda|} \frac{Q_M(\Lambda) f_\Lambda}{Q_M(M) f_M}, \quad (7)$$

$$f_\Lambda = - \frac{k + 1}{\mu + 1 - k(\lambda - 1)} \frac{2p + 1}{k(\lambda - 1) + \mu - p - 1} \prod_{i=1}^{\lambda-1} \frac{2p + 1 - 2ki}{p + 1 - k(\lambda + i - 1)} \prod_{j=1}^{\mu} \frac{2j - 2p - 1}{j + \mu - p - 1}.$$



Появление множителя $2^{|\Lambda|}$ объясняется тем, что мы хотим, чтобы старший коэффициент многочлена $F_\Lambda(y, x)$ был равен единице.

Теорема 3. *Многочлен (6) является собственной функцией оператора (2).*

Доказательство. Докажем, что условие того, что многочлен (6) является собственной функцией равносильно рекуррентной формуле (8) на коэффициенты (7)

$$\begin{aligned} [a(\Lambda, \Lambda) - a(M, M)]c(M, \Lambda) &= \sum_{M \subseteq N \subseteq \Lambda} a(M, N)c(M, \Lambda) = \\ &= a(M, M + \varepsilon)c(M + \varepsilon, \Lambda) + a(M, M + \delta)c(M + \delta, \Lambda). \end{aligned} \quad (8)$$

По лемме 2 $\mathcal{L}_2 P_M = \sum_{N \subseteq M} a(N, M)P_N$. Поэтому

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_2 F_\Lambda &= \sum_{M \subseteq \Lambda} c(M, \Lambda) \left(\sum_{N \subseteq M} a(N, M)P_N \right) = \sum_{M \subseteq \Lambda} \sum_{N \subseteq M} c(M, \Lambda)a(N, M)P_N = \\ &= \sum_{N \subseteq \Lambda} \sum_{N \subseteq M \subseteq \Lambda} a(N, M)c(M, \Lambda)P_N = \sum_{N \subseteq \Lambda} \left(\sum_{N \subseteq M \subseteq \Lambda} a(N, M)c(M, \Lambda) \right) P_N. \end{aligned}$$

В то же время если F_Λ собственная функция, то $\mathcal{L}_2 F_\Lambda = k_\Lambda F_\Lambda = k_\Lambda \sum_{N \subseteq \Lambda} c(N, \Lambda)P_N$. Таким образом, условие быть собственной функцией равносильно системе уравнений

$$\sum_{N \subseteq M \subseteq \Lambda} a(N, M)c(M, \Lambda) = k_\Lambda c(N, \Lambda). \quad (9)$$

Пусть $N = \Lambda$, тогда $c(\Lambda, \Lambda)k_\Lambda = a(\Lambda, \Lambda)c(\Lambda, \Lambda)$, поэтому $k_\Lambda = a(\Lambda, \Lambda)$ и систему (9) можно переписать в следующем виде:

$$\sum_{N \subseteq M \subseteq \Lambda} a(N, M)c(M, \Lambda) = a(\Lambda, \Lambda)c(N, \Lambda). \quad (10)$$

Из системы (10) по индукции легко вывести следующие формулы для коэффициентов:

$$c(\Lambda - \delta, \Lambda) = \frac{a(\Lambda - \delta, \Lambda)}{a(\Lambda, \Lambda) - a(\Lambda - \delta, \Lambda - \delta)}, \quad c(\Lambda - \varepsilon, \Lambda) = \frac{a(\Lambda - \varepsilon, \Lambda)}{a(\Lambda, \Lambda) - a(\Lambda - \varepsilon, \Lambda - \varepsilon)}.$$

Из леммы 2 следует, что $a(N, M) = 0$, если $M \neq N$, $M \neq N + \varepsilon$, $M \neq N + \delta$, тогда

$$\begin{aligned} c(N, \Lambda)a(\Lambda, \Lambda) &= a(N, N)c(N, \Lambda) + a(N, N + \varepsilon)c(N + \varepsilon, \Lambda) + a(N, N + \delta)c(N + \delta, \Lambda), \\ [a(\Lambda, \Lambda) - a(N, N)]c(N, \Lambda) &= \sum_{N \subseteq M \subseteq \Lambda} a(N, M)c(N, \Lambda) = \\ &= a(N, N + \varepsilon)c(N + \varepsilon, \Lambda) + a(N, N + \delta)c(N + \delta, \Lambda). \end{aligned} \quad (11)$$

Таким образом, равносильность доказана. Поэтому для того чтобы доказать, что (6) является собственной функцией, достаточно проверить, что коэффициенты (7) удовлетворяют равенству (11). Для этого понадобится следующая вспомогательная лемма.



Лемма 5. *Справедливы следующие соотношения:*

$$\begin{aligned} \frac{f_{\Lambda+\delta}}{f_{\Lambda}} &= \frac{Q_{\Lambda}(\Lambda)}{Q_{\Lambda}(\Lambda+\delta)} \frac{a(\Lambda+\delta, \Lambda)}{[a(\Lambda+\delta, \Lambda+\delta) - a(\Lambda, \Lambda)]}, \\ \frac{f_{\Lambda+\varepsilon}}{f_{\Lambda}} &= \frac{Q_{\Lambda}(\Lambda)}{Q_{\Lambda}(\Lambda+\varepsilon)} \frac{a(\Lambda+\varepsilon, \Lambda)}{[a(\Lambda+\varepsilon, \Lambda+\varepsilon) - a(\Lambda, \Lambda)]}. \end{aligned} \tag{12}$$

Доказательство. Так как эти формулы однозначно определяют f_{Λ} через f_N , где $N \subseteq \Lambda$, то достаточно проверить, что f_{Λ} удовлетворяет соотношениям (12). Следовательно, лемма сводится к прямым вычислениям, которые нетрудно проделать. \square

Для завершения доказательства теоремы 3 подставим коэффициенты (7) в рекуррентную формулу (11) и воспользуемся соотношениями (12). В результате получим следующий аналог формулы (4):

$$\begin{aligned} [a(\Lambda, \Lambda) - a(N, N)] Q_N(\Lambda) &= Q_{N+\varepsilon}(\Lambda) \frac{Q_N(N+\varepsilon)}{Q_{N+\varepsilon}(N+\varepsilon)} [a(N+\varepsilon, N+\varepsilon) - a(N, N)] + \\ &+ Q_{N+\delta}(\Lambda) \frac{Q_N(N+\delta)}{Q_{N+\delta}(N+\delta)} [a(N+\delta, N+\delta) - a(N, N)], \end{aligned}$$

которая уже доказана. Это завершает доказательство теоремы 3. \square

4. СПЕЦИАЛИЗАЦИЯ СОБСТВЕННЫХ ФУНКЦИЙ

Пусть $\pm\varepsilon, \pm\delta$ являются ненулевыми весами тождественного представления супералгебры $\mathfrak{osp}(3, 2)$. Тогда соответствие

$$\Lambda = (\lambda, \mu) \longrightarrow \lambda\delta + \mu\varepsilon$$

задает биекцию между диаграммами крюками Λ и старшими весами неприводимых конечномерных модулей над супералгеброй Ли $\mathfrak{osp}(3, 2)$. Если V — конечномерный модуль, на котором подалгебра Картана действует диагонально, то его суперхарактер определяется по формуле $\text{Sch}(V) = \sum_{\mu} (-1)^{p(\mu)} e^{\mu}$, где сумма берется по всем весам модуля V с учетом их четности. Если ввести переменные $x = e^{\varepsilon}, y = e^{\delta}$, то суперхарактер будет полиномом от переменных x, x^{-1}, y, y^{-1} . Например, суперхарактер тождественного представления равен $y + y^{-1} - x - x^{-1} - 1$. Для каждой диаграммы крюка Λ мы будем обозначать через V^{Λ} неприводимый конечномерный модуль со старшим весом $\lambda\delta + \mu\varepsilon$.

Основным результатом этого параграфа и всей работы является следующая теорема.

Теорема 4. *1) если $\Lambda \neq (\lambda, \lambda - 1)$, то существует $\lim_{\substack{p \rightarrow -1 \\ k \rightarrow -1}} F_{\Lambda} = \text{Sch}(V^{\Lambda})$;*

2) если $\Lambda = (\lambda, \lambda - 1)$, то при условии $p + 1 = \lambda(k + 1)$ существует $\lim_{k \rightarrow -1} F_{\Lambda} = \text{Sch}(V^{\Lambda})$;

3) если $\Lambda = (1, 0)$, то при условии $p+1 = 2(k+1)$ существует $\lim_{k \rightarrow -1} F_{\Lambda} = \text{Sch}(V^{\square})$.



Доказательство. Суперхарактер можно разложить по базису из суперполиномов Шура

$$\text{Sch}(V^\Lambda) = \sum_{N \subseteq \Lambda} \chi(N, \Lambda)(v^\tau u^\sigma - v^{\tau-1} u^{\sigma+1}),$$

где $\chi(N, \Lambda)$ — некоторые коэффициенты. Далее, мы знаем, что

$$F_\Lambda(v, u) = \sum_{N \subseteq \Lambda} c(N, \Lambda) P_N(v, u).$$

Поэтому для доказательства теоремы достаточно показать, что

$$\lim_{\substack{p \rightarrow -1 \\ k \rightarrow -1}} P_N(v, u) = (v^\tau u^\sigma - v^{\tau-1} u^{\sigma+1})$$

и предел коэффициентов $c(N, \Lambda)$ при выполнении условий теоремы равен $\chi(N, \Lambda)$. Первое равенство очевидно. Для вычисления предела коэффициентов разберем отдельно три случая.

1. Если $\Lambda \neq (\lambda, \lambda - 1)$, то суперхарактер совпадает с суперхарактером Эйлера, для которого есть явная формула (см. [1]), которая в этом случае имеет вид

$$\text{Sch}(V^\Lambda) = 2(v - u)\varphi_{\lambda-1}(v)\psi_\mu(u), \quad (13)$$

где $\varphi_\lambda(v) = y^\lambda - y^{\lambda-1} + \dots - y^{1-\lambda} + y^{-\lambda}$, $\psi_\mu(u) = x^\mu + x^{\mu-1} + \dots + x^{1-\mu} + x^{-\mu}$, $u = \frac{1}{2}(x + x^{-1} - 2)$, $v = \frac{1}{2}(y + y^{-1} - 2)$.

Вычислим коэффициенты $\chi(N, \Lambda)$ для формулы (13), для этого разложим многочлены $\varphi_\lambda(v)$, $\psi_\mu(u)$ по базисам v^τ , u^σ соответственно

$$\varphi_\lambda(v) = \sum_{\tau=0}^{\lambda} d(\tau, \lambda) v^\tau,$$

где $d(\tau, \lambda) = 2^\tau \frac{(\lambda-\tau+1)\dots(\lambda+\tau)}{(2\tau)!}$, $\lambda > \tau \geq 0$ и $d(\lambda, \lambda) = 2^\lambda$;

$$\psi_\mu(u) = \sum_{\sigma=0}^{\mu} c(\sigma, \mu) u^\sigma,$$

где $c(\sigma, \mu) = 2^\sigma (2\mu + 1) \frac{(\mu-\sigma+1)\dots(\mu+\sigma)}{(2\sigma+1)!}$, $\mu > \sigma \geq 0$ и $c(\mu, \mu) = 2^\mu$.

Отсюда коэффициенты $\chi(N, \Lambda)$ для формулы (13) примут вид

$$\chi(N, \Lambda) = 2d(\tau - 1, \lambda - 1)c(\sigma, \mu). \quad (14)$$

Таким образом, остаётся проверить равенство

$$\chi(N, \Lambda) = 2^{|\Lambda|} \lim_{\substack{p \rightarrow -1 \\ k \rightarrow -1}} \frac{Q_N(\Lambda) f_\Lambda}{Q_N(N) f_N},$$

где $N = (\tau, \sigma)$. Левая часть известна, посчитаем правую

$$\lim_{\substack{p \rightarrow -1 \\ k \rightarrow -1}} \frac{Q_N(\Lambda)}{Q_N(N)} = \frac{(\lambda - \tau + 1) \dots (\lambda + \tau - 2)(\mu - \sigma + 1) \dots (\mu + \sigma)(\lambda + \mu)(\lambda - \mu - 1)}{(2\tau - 2)!(2\sigma)!(\sigma + \tau)(\tau - \sigma - 1)},$$



$$\lim_{\substack{p \rightarrow -1 \\ k \rightarrow -1}} \frac{f_\Lambda}{f_N} = 2^{\tau-\lambda} 2^{\sigma-\mu} \frac{(\sigma + \tau)(\tau - \sigma - 1)}{(\lambda + \mu)(\lambda - \mu - 1)} (2\tau + 1)(2\mu + 1).$$

Отсюда

$$2^{|\Lambda|} \lim_{\substack{p \rightarrow -1 \\ k \rightarrow -1}} \frac{Q_N(\Lambda) f_\Lambda}{Q_N(N) f_N} = 2^\tau \frac{(\lambda - \tau + 1) \dots (\lambda + \tau - 2)}{(2\tau - 2)!} 2^\sigma \frac{(\mu - \sigma + 1) \dots (\mu + \sigma)}{(2\sigma + 1)!} (2\mu + 1)$$

и первое утверждение теоремы доказано.

2. Если $\Lambda = (\lambda, \lambda - 1)$, то известно [5, пример после теоремы 4], что суперхарактер неприводимого представления супералгебры $\mathfrak{osp}(3, 2)$ имеет вид

$$\text{Sch}(V^\Lambda) = \varphi_\lambda(v) \psi_{\lambda-1}(u) - \varphi_{\lambda-1}(v) \psi_\lambda(u). \quad (15)$$

Следовательно, коэффициенты формулы (15) примут вид

$$\chi(N, \Lambda) = d(\lambda, \tau) c(\lambda - 1, \sigma) - d(\lambda - 1, \tau) c(\lambda, \sigma). \quad (16)$$

Таким образом, остаётся проверить равенство

$$\chi(N, \Lambda) = \lim_{k \rightarrow -1} [C(N, \Lambda) - C(N, \Lambda + \delta - \varepsilon)] \Big|_{p+1=\lambda(k+1)}, \quad (17)$$

где $C(N, \Lambda) - C(N, \Lambda + \delta - \varepsilon)$ — старший коэффициент при $v^\lambda u^\mu$, $N = (\tau, \sigma)$. Имеем

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow -1} Q_N(N) f_N &= -(k+1) \frac{(2\sigma+1)! (2\tau-2)!}{2^\sigma 2^{\tau-1}}, & \lim_{k \rightarrow -1} f_\Lambda &= -2^{2-2\lambda}, \\ \lim_{k \rightarrow -1} Q_N(\Lambda) \Big|_{p+1=\lambda(k+1)} &= (k+1) \frac{(\lambda-\tau+1) \dots (\lambda+\tau-1)(\lambda-\sigma) \dots (\lambda+\sigma)}{\tau+\sigma}, \\ C(N, \Lambda) &= 2^{\sigma+\tau} \frac{(\lambda-\tau+1) \dots (\lambda+\tau-1)(\lambda-\sigma) \dots (\lambda+\sigma)}{(2\sigma+1)! (\tau+\sigma) (2\tau-2)!}, \\ C(N, \Lambda + \varepsilon - \delta) &= 2^{\sigma+\tau} \frac{(\lambda-\tau) \dots (\lambda+\tau)(\lambda-\sigma+1) \dots (\lambda+\sigma-1)}{(2\sigma-1)! (\tau+\sigma) (2\tau)!}. \end{aligned}$$

Тогда равенство (17) сводится к проверке равенства (18), которое легко проверить.

$$\begin{aligned} &(\tau + \sigma)[(\lambda + \tau)(\lambda - \sigma)(2\lambda - 1) - (\lambda - \tau)(\lambda + \sigma)(2\lambda + 1)] = \\ &= (\lambda - \sigma)(\lambda + \sigma)(2\tau - 1)2\tau - (\lambda - \tau)(\lambda + \tau)(2\sigma + 1)2\sigma. \end{aligned} \quad (18)$$

3. Если $\Lambda = (1, 0)$ то

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow -1} F_\square \Big|_{p+1=2(k+1)} &= 2 \lim_{k \rightarrow -1} (P_\square + f_\square) \Big|_{p+1=2(k+1)} = \\ &= 2 \lim_{k \rightarrow -1} \left(v + ku + \frac{(k+1)(2p+1)}{(p+1)} \right) \Big|_{p+1=2(k+1)} = \\ &= 2v - 2u - 1 = y + y^{-1} - x - x^{-1} - 1 = \text{Sch}(V^\square). \quad \square \end{aligned}$$

Благодарности. Работа А. Н. Сергеева выполнена при финансовой поддержке Министерства образования и науки РФ (проект № 1.492.2016/ФПМ).



Библиографический список

1. *Serganova V.* Characters of irreducible representations of simple Lie superalgebras // Proc. Intern. Congress of Math. Berlin, 1998. Doc. Math. Extra. Vol. II. P. 583–593.
2. *Sergeev A. N., Veselov A. P.* Deformed quantum Calogero – Moser systems and Lie superalgebras // Commun. Math. Phys. 2004. Vol. 245, № 2. P. 249–248. DOI: 10.1007/s00220-003-1012-4.
3. *Sergeev A. N., Veselov A. P.* BC_∞ Calogero – Moser operator and super Jacobi polynomials // Advances in Mathematics. 2009. Vol. 222, iss. 5. P. 1687–1726. DOI: 10.1016/j.aim.2009.06.014.
4. *Sergeev A. N., Veselov A. P.* Generalised discriminant, deformed quantum Calogero – Moser – Sutherland problem and super-Jack polynomials // Advances in Math. 2005. Vol. 192, iss. 2. P. 341–375. DOI: 10.1016/j.aim.2004.04.009.
5. *Gruson C., Serganova V.* Cohomology of generalized supergrassmanians and character formulae for basic classical Lie superalgebras // Proc. London Math. Soc. 2010. Vol. 101, № 3. P. 852–892.

Образец для цитирования:

Мовсисян Г. С., Сергеев А. Н. Операторы КМС типа $B(1, 1)$ и супералгебра Ли $\mathfrak{osp}(3, 2)$ // Изв. Саратов. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2017. Т. 17, вып. 1. С. 19–30. DOI: 10.18500/1816-9791-2017-17-1-19-30.

CMS Operators Type $B(1, 1)$ and Lie Superalgebra $\mathfrak{osp}(3, 2)$

G. S. Movsisyan¹, A. N. Sergeev²

¹Gevorg S. Movsisyan, Saratov State University, 83, Astrakhanskaya str., 410012, Saratov, Russia, movsisyangs@gmail.com,

²Alexander N. Sergeev, Saratov State University, 83, Astrakhanskaya str., 410012, Saratov, Russia, sergeevAN@info.sgu.ru

The main purpose of this article is to study the relation between the representations theory of Lie superalgebras $\mathfrak{osp}(3, 2)$ and the Calogero – Moser – Sutherland (CMS) $B(1, 1)$ type differential operator. The differential operator depends polynomially on three parameters. The corresponding polynomial eigenfunctions also depend on three parameters; but in the general case, the coefficients of these eigenfunctions have a rational dependence on the parameters. The issue of specialization of eigenfunctions with given parameter values is an important and interesting question, especially in case of Lie superalgebras for which $k = p = -1$. In this case, we prove that the character of irreducible finite-dimensional representations of Lie superalgebras $\mathfrak{osp}(3, 2)$ can be obtained from the eigenfunctions of the CMS $B(1, 1)$ type differential operator in case of the specializations mentioned above, considering that k, p are also connected by some linear ratio.

Key words: superalgebra, representations, character, quantum integrable system.

Acknowledgements: This work by A. N. Sergeev was supported by the Ministry of Education and Science of the Russian Federation (project no. 1.492.2016/FPM).



References

1. Serganova V. Characters of irreducible representations of simple Lie superalgebras. *Proc. Intern. Congress of Math.*, Berlin, 1998, Doc. Math. Extra, vol. II, pp. 583–593.
2. Sergeev A. N., Veselov A. P. Deformed quantum Calogero – Moser systems and Lie superalgebras. *Commun. Math. Phys.*, 2004, vol. 245. no. 2, pp. 249–248. DOI: 10.1007/s00220-003-1012-4.
3. Sergeev A. N., Veselov A. P. BC_∞ Calogero – Moser operator and super Jacobi polynomials. *Advances in Mathematics*, 2009, vol. 222, iss. 5, pp. 1687–1726. DOI: 10.1016/j.aim.2009.06.014.
4. Sergeev A. N., Veselov A. P. Generalised discriminant, deformed quantum Calogero – Moser – Sutherland problem and super-Jack polynomials. *Advances in Math.*, 2005, vol. 192, iss. 2, pp. 341–375. DOI: 10.1016/j.aim.2004.04.009.
5. Gruson C., Serganova V. Cohomology of generalized supergrassmanians and character formulae for basic classical Lie superalgebras. *Proc. London Math. Soc.*, 2010, vol. 101, no. 3, pp. 852–892.

Cite this article as:

Movsisyan G. S., Sergeev A. N. CMS Operators Type $B(1,1)$ and Lie Superalgebra $\mathfrak{osp}(3,2)$. *Izv. Saratov Univ. (N. S.), Ser. Math. Mech. Inform.*, 2017, vol. 17, iss. 1, pp. 19–30 (in Russian). DOI: 10.18500/1816-9791-2017-17-1-19-30.



УДК 512.53

МИНИМАЛЬНАЯ НЕПРОДОЛЖАЕМАЯ ЧАСТИЧНАЯ ПОЛУГРУППА

А. О. Петриков

Петриков Александр Олегович, аспирант, Национальный исследовательский университет Московский институт электронной техники, Россия, 124498, Москва, Зеленоград, площадь Шокина, 1
petrikov.alexander@gmail.com

В статье рассматриваются частичные полугруппы с конечным числом элементов. Любая частичная полугруппа может быть продолжена до полной полугруппы с помощью добавления элементов — внешним полугрупповым образом, например нуля полугруппы. Интересен вопрос продолжения частичной полугруппы без добавления к ней элементов — внутренним полугрупповым образом. Целью данной работы является нахождение непродолжаемой внутренним образом частичной полугруппы с минимальным количеством элементов. С увеличением количества элементов в множестве количество частичных группоидов на этом множестве растёт экспоненциально, а количество частичных полугрупп среди этих частичных группоидов заранее не известно. Поэтому для нахождения частичных полугрупп необходимо воспользоваться помощью компьютера или Интернета. В сети Интернет (пакет GAP) уже есть все полугруппы с точностью до изоморфизма и антиизоморфизма на множестве, состоящем не более чем из 8 элементов, поэтому достаточно получить из полугрупп с нулем частичные полугруппы путём удаления нуля. Проверка на возможность продолжить частичную полугруппу внутренним полугрупповым образом проводилась с помощью компьютера. В результате было установлено, что все частичные полугруппы на множестве, состоящем не более чем из 4 элементов, могут быть продолжены внутренним полугрупповым образом до полных. На 5-элементном множестве существует только одна частичная полугруппа с точностью до изоморфизма и антиизоморфизма, которая не может быть продолжена до полной полугруппы.

Ключевые слова: частичная полугруппа, продолжение частичной полугруппы, слабая ассоциативность, сильная ассоциативность.

DOI: 10.18500/1816-9791-2017-17-1-31-39

ВВЕДЕНИЕ

Частичные операции, т. е. операции, определённые, возможно, не для всех значений аргументов, в последнее время привлекают всё большее внимание специалистов [1–3]. Интересен и важен вопрос: может ли частичная операция быть продолженной до полной (т. е. всюду определённой) с сохранением тех или иных свойств, например ассоциативности [4]? Понятие ассоциативности частичной операции было введено В. В. Розеном в [5] двумя неэквивалентными способами: сильная и слабая ассоциативности. Частичная бинарная операция [6] называется *сильноассоциативной*, если для любых элементов a, b, c произведения $(ab)c$ и $a(bc)$ либо оба не существуют, либо оба существуют и равны друг другу, и *слабоассоциативной*, если для любых элементов a, b, c произведения $(ab)c$ и $a(bc)$ равны друг другу либо хотя бы одна из них не определена. Очевидно, что сильная ассоциативная частичная бинарная операция является также слабоассоциативной. Множество с ассоциативной операцией называется полугруппой [7]. Множество с сильноассоциативной частичной бинарной операцией назовём *частичной полугруппой*. Нетрудно видеть, что частичная полугруппа — это в точности множество ненулевых элементов полугруппы с



нулём. Е. С. Ляпин и А. Е. Евсеев [8, гл. 1, § 6] вводят два типа продолжения частичной операции: внутреннее и внешнее продолжение. Продолжение частичной операции \cdot на множестве A называется *внешним*, если существуют множество $B \supseteq A$ и операция « \star » на B такие, что для любых $a_1, a_2 \in A$ из того, что $a_1 \cdot a_2$ существует следует равенство $a_1 \star a_2 = a_1 \cdot a_2$. Продолжение называется *внутренним*, если существует операция « \star » на A такая, что для любых $a_1, a_2 \in A$ из того, что $a_1 \cdot a_2$ существует следует равенство $a_1 \star a_2 = a_1 \cdot a_2$). В данной статье ставится цель найти непродолжаемую внутренним полугрупповым образом частичную полугруппу с минимальным количеством элементов.

1. ПОИСК НЕПРОДОЛЖАЕМЫХ ЧАСТИЧНЫХ ПОЛУГРУПП

Для достижения поставленной цели мы написали компьютерную программу на языке C++, с помощью которой можно определить, продолжается ли внутренним образом операция на n -элементной частичной полугруппе, заданной таблицей Кэли [9], до полной. В качестве неопределённых произведений в данной программе будем использовать обозначение **UNDEF_ELEM**, которое равно -1 , все элементы полугруппы на n -элементном множестве обозначим в программе числами от 0 до $n - 1$.

Для нахождения минимальной непродолжаемой частичной полугруппы на k -элементном множестве необходимо найти непродолжаемую частичную полугруппу на k -элементном множестве и показать, что все возможные частичные полугруппы на n -элементном множестве, где $n < k$, продолжают до полной.

Поскольку количество всевозможных частичных группоидов на n -элементном множестве равно $(n + 1)^{n^2}$, и при этом сложно определить, какие из них являются частичными полугруппами, то мы воспользовались уже готовым пакетом *GAP* [10], включающим в себя все возможные полугруппы с точностью до изоморфизма и антиизоморфизма на 1–8-элементных множествах.

Из всевозможных полугрупп из *GAP* рассматривались только полугруппы с нулем и записывались в текстовые файлы для дальнейшего использования (листинг 1):

```
1 | n in [2..6] do
2 |   list:=AllSmallSemigroups(n, IsSemigroupWithZero, true);;
3 |   filename:=Concatenation("ZeroSemigroupsN", String(n-1), ".txt");
4 |   PrintTo(filename, String(Length(list)), "\n\n");
5 |   for k in [1..Length(list)] do
6 |     AppendTo(filename,
7 |       JoinStringsWithSeparator(List(MultiplicationTable(list[k]),
8 |         row -> JoinStringsWithSeparator(row, " ")), "\n"), "\n\n");
9 |   od;
10| od;
```

Листинг 1: Полугруппы с нулем из системы GAP

Как уже отмечалась выше, для получения частичной полугруппы S нам необходимо удалить из полугруппы с нулём элемент нуль, это можно сделать с помощью функции **deleteZero**, которая использует вспомогательную функцию **copyTable** (листинг 2):

```
1 | void copyTable(const int* zero_sem, int* S, const int& N,
2 |               int a_left, int a_right, int b_left, int b_right,
3 |               int a_offs, int b_offs, int ind) {
```



```

4   int prod;
5   for (int i = a_left; i < a_right; i++)
6       for (int j = b_left; j < b_right; j++) {
7           prod = zero_sem[i * (N + 1) + j];
8           if (prod == ind)
9               prod = UNDEF_ELEM;
10          else
11              if (prod > ind)
12                  prod--;
13              S[(i - a_offs) * N + (j - b_offs)] = prod;
14          }
15  }
16
17  bool deleteZero(const int* zero_sem, int* S, const int& N) {
18      int ind = 0;
19      bool hasZero = false;
20      for (int i = 0; i < N + 1; i++) {
21          bool flag = true;
22          for (int j = 0; j < N + 1; j++) {
23              if (zero_sem[i * (N + 1) + j] != i ||
24                  zero_sem[j * (N + 1) + i] != i) {
25                  flag = false;
26                  break;
27              }
28          }
29          if (flag) {
30              ind = i;
31              hasZero = true;
32              break;
33          }
34      }
35      if (hasZero) {
36          copyTable(zero_sem, S, N, 0, ind, 0, ind, 0, 0, ind);
37          copyTable(zero_sem, S, N, 0, ind, ind + 1, N + 1, 0, 1, ind);
38          copyTable(zero_sem, S, N, ind + 1, N + 1, 0, ind, 1, 0, ind);
39          copyTable(zero_sem, S, N, ind + 1, N + 1, ind + 1, N + 1, 1, 1, ind);
40      }
41      return hasZero;
42  }

```

Листинг 2: Функция удаления нуля из полугруппы

После удаления нуля из полугрупп будут рассматриваться только частичные полугруппы с не всюду определённой операцией. Для реализации этого требования была написана функция **findNotDefined**, которая определяет расположение неопределённого произведения в частичной полугруппе, и **isPartial**, которая определяет, есть ли вообще хотя бы одно неопределённое произведение (листинг 3):

```

1  int* S, const int& N) {
2      for (int ind = 0; ind < N * N; ind++)
3          if (S[ind] == UNDEF_ELEM)
4              return ind;

```



```
5 |     return N * N;
6 | }
7 |
8 | bool isPartial(const int* S, const int& N) {
9 |     return findNotDefined(S, N) != N * N;
10| }
```

Листинг 3: Функции для выяснения, существует ли неопределённое произведение и нахождения его в случае существования

Каждую частичную полугруппу будем пытаться продолжить следующим образом. Каждое неопределённое произведение будем доопределять перебором всех элементов частичной полугруппы и проверять на выполнение слабой ассоциативности. В случае невыполнения слабой ассоциативности будем убирать из рассмотрения ветки перебора (листинг 4):

```
1 | typedef struct {
2 |     int a;
3 |     int b;
4 |     int prod;
5 | } triple;
6 |
7 | triple initTriple(const int _a, const int _b, const int _prod) {
8 |     triple tr;
9 |     tr.a = _a;
10|     tr.b = _b;
11|     tr.prod = _prod;
12|     return tr;
13| }
14|
15| bool checkWeakAssoc(const int* S, const int& N) {
16|     for (int a = 0; a < N; a++)
17|         for (int b = 0; b < N; b++)
18|             for (int c = 0; c < N; c++) {
19|                 int ab = S[a * N + b];
20|                 int bc = S[b * N + c];
21|                 if (ab == UNDEF_ELEM || bc == UNDEF_ELEM)
22|                     continue;
23|                 int ab_c = S[ab * N + c];
24|                 int a_bc = S[a * N + bc];
25|                 if (ab_c != UNDEF_ELEM && a_bc != UNDEF_ELEM && ab_c != a_bc)
26|                     return false;
27|             }
28|     return true;
29| }
30|
31| bool extendSem(int* S, const int& N) {
32|     triple* tr = new triple[N * N];
33|     int tr_count = 0;
34|     int num;
35|     while(1) {
36|         num = findNotDefined(S, N);
```




```

37     if (num != N * N) {
38         tr[tr_count++] = initTriple(num / N, num % N, 0);
39         S[num] = 0;
40     }
41     while (!(checkWeakAssoc(S, N) || (tr_count == 0))) {
42         while ((tr_count > 0) && (tr[tr_count - 1].prod == N - 1)) {
43             triple t = tr[tr_count-- - 1];
44             S[t.a * N + t.b] = UNDEF_ELEM;
45         }
46         if (tr_count == 0) {
47             delete[] tr;
48             return false;
49         }
50
51         tr[tr_count - 1].prod++;
52         S[tr[tr_count - 1].a * N + tr[tr_count - 1].b]++;
53     }
54     if (!isPartial(S, N) && checkWeakAssoc(S, N)) {
55         delete[] tr;
56         return true;
57     }
58 }
59 }

```

Листинг 4: Функция продолжения частичной полугруппы с проверкой на слабую частичную ассоциативность

В случае, когда частичная полугруппа не может быть продолжена, будем её выводить на экран с помощью функции **printSem** (листинг 5):

```

1 void printSem(const int* S, const int& N) {
2     for (int a = 0; a < N; a++) {
3         for (int b = 0; b < N; b++)
4             if (S[a * N + b] != UNDEF_ELEM)
5                 cout << S[a * N + b] << " ";
6         else
7             cout << "- ";
8         cout << endl;
9     }
10    cout << endl;
11 }

```

Листинг 5: Функция вывода на экран частичной полугруппы

Для запуска перебора всех частичных полугрупп на выявление минимальных непродолжаемых была использована следующая функция (листинг 6):

```

1 int main(int argc, char * argv[]) {
2     for (int N = 2; N < 6; N++) {
3         int* zero_sem = new int[(N + 1) * (N + 1)];
4         int* S = new int[N * N];
5         char infilePath[80];
6         sprintf(infilePath, "ZeroSemigroupsN%d.txt", N);
7         ifstream in;

```



```

8   in.open(infilePath);
9   int sem_count;
10  in >> sem_count;
11  for (int i = 0; i < sem_count; i++) {
12      for (int a = 0; a < N + 1; a++)
13          for (int b = 0; b < N + 1; b++) {
14              int prod;
15              in >> prod;
16              zero_sem[a * (N + 1) + b] = prod - 1;
17          }
18      if (deleteZero(zero_sem, S, N) && isPartial(S, N) && !extendSem(S, N))
19          printSem(S, N);
20  }
21  in.close();
22  delete[] zero_sem;
23  delete[] S;
24  }
25  return 0;
26  }

```

Листинг 6: Функция для нахождения минимальной частичной полугруппы

2. ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

С помощью данной программы были получены следующие результаты:

Предложение 1. Все частичные полугруппы на n -элементном множестве, где $n \leq 4$, внутренним образом продолжаются до полных.

Предложение 2. Частичная полугруппа на 5-элементном множестве, приведенная в таблице Кэли (табл. 1), не продолжается до полной.

Таблица 1

| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | - | - | - | 1 | 1 |
| 2 | - | - | - | 1 | 3 |
| 3 | - | - | - | 3 | 3 |
| 4 | 3 | 3 | 3 | 4 | 4 |
| 5 | 1 | 1 | 1 | 5 | 5 |

Доказательство. Покажем, что данная частичная полугруппа не продолжается.

Допустим, что полугруппа продолжается.

1. Положим $a = 1 \cdot 1$.

1.1. Рассмотрим произведение $1 \cdot 5 \cdot 2$. Расставляя скобки так: $(1 \cdot 5) \cdot 2$, получим $(1 \cdot 5) \cdot 2 = 1 \cdot 2$. При расстановке скобок другим образом: $1 \cdot (5 \cdot 2)$, получим $1 \cdot (5 \cdot 2) = 1 \cdot 1 = a$. Следовательно, $1 \cdot 2 = a$.

1.2. Имеем: $(1 \cdot 5) \cdot 2 = 1 \cdot 3$, $1 \cdot (5 \cdot 3) = 1 \cdot 1 = a$. Следовательно, $1 \cdot 3 = a$.

1.3. Имеем: $(2 \cdot 4) \cdot 1 = 1 \cdot 1 = a$, $2 \cdot (4 \cdot 1) = 2 \cdot 3$. Следовательно, $2 \cdot 3 = a$.

После данных доопределений таблица Кэли имеет вид табл. 2.

2. Положим $b = 2 \cdot 1$.

2.1. Имеем: $(2 \cdot 5) \cdot 1 = 3 \cdot 1$, $2 \cdot (5 \cdot 1) = 2 \cdot 1 = b$. Следовательно, $3 \cdot 1 = b$.

2.2. Имеем: $(3 \cdot 5) \cdot 2 = 3 \cdot 2$, $3 \cdot (5 \cdot 2) = 3 \cdot 1 = b$ (из п. 2.1). Следовательно, $3 \cdot 2 = b$.

2.3. Имеем: $(3 \cdot 5) \cdot 3 = 3 \cdot 3$, $3 \cdot (5 \cdot 3) = 3 \cdot 1 = b$. Следовательно, $3 \cdot 3 = b$.

Для оставшегося произведения положим $c = 2 \cdot 2$. Полученная таблица Кэли имеет вид табл. 3.



Таблица 2

| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|-----|-----|-----|---|---|
| 1 | a | a | a | 1 | 1 |
| 2 | - | - | a | 1 | 3 |
| 3 | - | - | - | 3 | 3 |
| 4 | 3 | 3 | 3 | 4 | 4 |
| 5 | 1 | 1 | 1 | 5 | 5 |

Таблица 3

| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|-----|-----|-----|---|---|
| 1 | a | a | a | 1 | 1 |
| 2 | b | c | a | 1 | 3 |
| 3 | b | b | b | 3 | 3 |
| 4 | 3 | 3 | 3 | 4 | 4 |
| 5 | 1 | 1 | 1 | 5 | 5 |

3. Имеем: $(5 \cdot 3) \cdot 1 = 1 \cdot 3 = a$, $5 \cdot (3 \cdot 1) = 5 \cdot b$. Следовательно, $5 \cdot b = a$. Из табл. 3 можно видеть, что для любого t : $5 \cdot t \in \{1, 5\}$, а значит, $a \in \{1, 5\}$.

4. Имеем: $(4 \cdot 1) \cdot 1 = 3 \cdot 1 = b$, $4 \cdot (1 \cdot 1) = 4 \cdot a$. Следовательно, $4 \cdot a = b$. Из табл. 3 можно заключить, что для любого t $4 \cdot t \in \{3, 4\}$, а значит, $b \in \{3, 4\}$. Причём либо $a = 1$ и $b = 3$, либо $a = 5$ и $b = 4$.

5. Пусть $a = 1$ и $b = 3$. Тогда таблица Кэли будет иметь вид табл. 4.

5.1. Имеем: $(2 \cdot 2) \cdot 1 = c \cdot 1$, $2 \cdot (2 \cdot 1) = 2 \cdot 3 = 1$. Следовательно, $c \cdot 1 = 1$. Из табл. 4 заключаем, что $c \cdot 1 = 1$ при $c \in \{1, 5\}$.

5.2. Имеем: $(2 \cdot 2) \cdot 3 = c \cdot 3$, $2 \cdot (2 \cdot 3) = 2 \cdot 1 = 3$. Следовательно, $c \cdot 3 = 3$. Из табл. 4 видим, что $c \cdot 3 = 3$ при $c \in \{3, 4\}$. Но в п. 5.1 мы получили, что $c \in \{1, 5\}$, следовательно, случай, когда $a = 1$ и $b = 3$, невозможен.

6. Пусть $a = 5$ и $b = 4$. В этом случае таблица Кэли имеет вид табл. 5.

Таблица 4

| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|-----|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 2 | 3 | c | 1 | 1 | 3 |
| 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 |
| 4 | 3 | 3 | 3 | 4 | 4 |
| 5 | 1 | 1 | 1 | 5 | 5 |

Таблица 5

| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|-----|---|---|---|
| 1 | 5 | 5 | 5 | 1 | 1 |
| 2 | 4 | c | 5 | 1 | 3 |
| 3 | 4 | 4 | 4 | 3 | 3 |
| 4 | 3 | 3 | 3 | 4 | 4 |
| 5 | 1 | 1 | 1 | 5 | 5 |

6.1. Имеем: $(2 \cdot 2) \cdot 1 = c \cdot 1$, $2 \cdot (2 \cdot 1) = 2 \cdot 4 = 1$. Следовательно, $c \cdot 1 = 1$. Из табл. 5 заключаем, что $c \cdot 1 = 1$ при $c = 5$.

6.2. Наконец, $2 \cdot 2 \cdot 3$. Имеем: $(2 \cdot 2) \cdot 3 = c \cdot 3$, $2 \cdot (2 \cdot 3) = 2 \cdot 5 = 3$. Следовательно, $c \cdot 3 = 3$. Из табл. 5 заключаем, что $c \cdot 3 = 3$ при $c = 4$. Но в п. 6.1 мы получили, что $c = 5$, следовательно, случай, когда $a = 5$ и $b = 4$, также невозможен.

Так как оба случая невозможны, то данную частичную полугруппу нельзя продолжить до полной полугруппы без добавления элементов. \square

Предложение 3. Частичная полугруппа из предложения 2 — единственная непродолжаемая частичная полугруппа на 5-элементном множестве с точностью до изоморфизма и антиизоморфизма.

Предложение 4. Добавление единицы к непродолжаемой частичной полугруппе на n -элементном множестве не сохраняет непродолжаемость частичной полугруппы на $(n + 1)$ -элементном множестве.

Доказательство. Добавим к непродолжаемой частичной полугруппе на 5-элементном множестве единицу, тогда таблица Кэли полученной полугруппы примет вид табл. 6.

Данная частичная полугруппа может быть продолжена, например, как показано на табл. 7.



Таблица 6

| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | - | - | - | 1 | 1 | 1 |
| 2 | - | - | - | 1 | 3 | 2 |
| 3 | - | - | - | 3 | 3 | 3 |
| 4 | 3 | 3 | 3 | 4 | 4 | 4 |
| 5 | 1 | 1 | 1 | 5 | 5 | 5 |
| 6 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |

Таблица 7

| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 5 | 5 | 5 | 1 | 1 | 1 |
| 2 | 4 | 6 | 5 | 1 | 3 | 2 |
| 3 | 4 | 4 | 4 | 3 | 3 | 3 |
| 4 | 3 | 3 | 3 | 4 | 4 | 4 |
| 5 | 1 | 1 | 1 | 5 | 5 | 5 |
| 6 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |

Библиографический список

1. *Ляпин Е. С.* О возможности полугруппового продолжения частичного группоида // Изв. вузов. Матем. 1989. № 12. С. 68–70.
2. *Ляпин Е. С.* Внутреннее полугрупповое продолжение некоторых полугрупповых амальгам // Изв. вузов. Матем. 1993. № 11. С. 20–26.
3. *Goralcik P., Koubek V.* On completing partial groupoids to semigroups // Intern. J. Algebra Comput., 2006. Vol. 16, № 3. P. 551–562. DOI: 10.1142/S0218196706003086.
4. *Петриков А. О.* Частичные полугруппы и отношения Грина // Электронные информационные системы. 2014. № 3(3). С. 65–72.
5. *Розен В. В.* Частичные операции в упорядоченных множествах. Саратов : Изд-во Сарат. ун-та, 1973. 123 с.
6. *Курош А.Г.* Лекции по общей алгебре. М. : Наука, 1973. 400 С.
7. *Клиффорд А., Престон Г.* Алгебраическая теория полугрупп : в 2 т. Т. 1. М. : Мир, 1972. 286 с.
8. *Ляпин Е. С., Евсеев А. Е.* Частичные алгебраические действия. СПб. : Образование, 1991. 163 с.
9. *Sayley A.* On the Theory of Groups // American Journal of Mathematics. 1889. Vol. 11, № 2. P. 139–157.
10. The GAP Group. URL: <http://www.gap-system.org> (дата обращения : 14.08.2016).

Образец для цитирования:

Петриков А. О. Минимальная непродолжаемая частичная полугруппа // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2017. Т. 17, вып. 1. С. 31–39. DOI: 10.18500/1816-9791-2017-17-1-31-39.

A Minimal Non-extendable Partial Semigroup

A. O. Petrikov

Alexander O. Petrikov, National Research University of Electronic Technology, 1, Shokina Square, 124498, Zelenograd, Moscow, Russia, petrikov.alexander@gmail.com

This article discusses partial semigroups with a finite number of elements. Any partial semigroup can be extended to a full semigroup by adding elements to it, for example, a zero semigroup, in an external semigroup way. The author of the article is interested in the question of continuation of a partial semigroup without adding any elements to it in an internal semigroup way. The aim of this work is to find an internally non-extendable partial semigroup with a minimal number of elements. With increasing the number of elements in the set the number of partial groupoids on this set increases exponentially, and the number of partial semigroups among these partial groupoids is not known in advance. In order to find such partial semigroups it is necessary to use a computer or the Internet. In the Internet (GAP package) there are stored all the semigroups up to isomor-



phism and antiisomorphism on the set consisting of no more than 8 elements; that is why it will be enough to get partial semigroups out of semigroups with zero by deleting zero. The possibility of continuation of a partial semigroup in an internal semigroup way was checked out by a computer. As a result, it was revealed that all the partial semigroups on the set consisting of no more than 4 elements can be extended in an internal semigroup way to full ones. On the 5-element set, there is only one partial semigroup up to isomorphism and antiisomorphism, which can not be extended to a full semigroup.

Key words: partial semigroup, extension of a partial operation, weak associativity, strong associativity.

References

1. Lyapin E. S. The possibility of semigroup continuation of a partial groupoid. *Soviet Math. (Iz. VUZ)*, 1989, vol. 33, iss. 12, pp. 82–85.
2. Lyapin E. S. Inner semigroup continuation of some semigroup amalgams. *Soviet Math. (Iz. VUZ)*, 1993, vol. 37, iss. 11, pp. 18–24.
3. Goralcik P., Koubek V. On completing partial groupoids to semigroups. *Intern. J. Algebra Comput*, 2006, vol. 16, no. 3, pp. 551–562. DOI: 10.1142/S0218196706003086.
4. Petrikov A. O. Partial Semigroups and Green's Relations. *Electronic Information Systems*, 2014, no. 3(3), pp. 65–72 (in Russian).
5. Rozen V. V. *Chastichnye operatsii v uporiadochennykh mnozhestvakh* [Partial operations in ordered sets]. Saratov, Saratov Univ. Press, 1973. 123 p. (in Russian).
6. Kurosh A.G. *Lekcii po obshhej algebre* [Lectures on general algebra]. Moscow, Nauka, 1973. 400 p. (in Russian).
7. Clifford A., Preston G. *The algebraic theory of semigroups*, Vol. 1. Providence, R.I., American Mathematical Society, 1964, vol. 1, 224 p. (Russ. ed.: Clifford A., Preston G. *Algebraicheskaia teoriia polugrupp* : v 2 t. T. 1. Moscow, Mir, 1972. 286 p.)
8. Lyapin E. S., Evseev A. E. *Chastichnye algebraicheskie deistviia* [Partial algebraic operations]. S. Petersburg, Obrazovanie, 1991. 163 p. (in Russian).
9. Cayley A. On the Theory of Groups. *American Journal of Mathematics*, 1889, vol. 11, no. 2, pp. 139–157.
10. *The GAP Group*. Available at: [http:// www.gap-system.org](http://www.gap-system.org) (accessed 14 August 2016).

Cite this article as:

Petrikov A. O. A Minimal Non-extendable Partial Semigroup. *Izv. Saratov Univ. (N. S.), Ser. Math. Mech. Inform.*, 2017, vol. 17, iss. 1, pp. 31–39 (in Russian). DOI: 10.18500/1816-9791-2017-17-1-31-39.



УДК 517.968

О РАЗРЕШИМОСТИ ОДНОГО КЛАССА НЕЛИНЕЙНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ТИПА УРЫСОНА НА ВСЕЙ ПРЯМОЙ

Х. А. Хачатрян¹, Т. Г. Сардарян²

¹Хачатрян Хачатур Агавардович, доктор физико-математических наук, ведущий научный сотрудник отдела методов математической физики, Институт математики НАН Армении, Республика Армения, 0019, Ереван, просп. Маршала Баграмяна, 24/5, Khach82@rambler.ru, Khach82@mail.ru

²Сардарян Тигран Грачяевич, кандидат физико-математических наук, ассистент кафедры высшей математики и теоретической механики, Национальный аграрный университет Армении, Республика Армения, 0009, Ереван, Теряна, 73, Sardaryan.tigran@gmail.com

В настоящей статье исследуется один класс нелинейных интегральных уравнений типа Урысона на всей оси. Рассматриваемые уравнения имеют применение в различных областях математической физики. Предполагается, что нелинейный интегральный оператор типа Гаммерштейна с разностным ядром служит локальной минорантой в смысле М. А. Красносельского для исходного оператора Урысона. Сочетание методов построения инвариантных конусных отрезков для соответствующего нелинейного оператора Урысона с методами теории монотонных операторов и консервативных интегральных уравнений типа свертки при определенных ограничениях на нелинейность позволяет доказать конструктивные теоремы существования однопараметрических семейств положительных решений. Описывается множество параметров и изучается асимптотическое поведение построенных решений в бесконечности. В конце приведены частные примеры указанных уравнений, для которых выполняются все условия сформулированных теорем.

Ключевые слова: интегральное уравнение Урысона, монотонность, последовательные приближения, однопараметрическое семейство положительных решений, условие Каратеодори, множество параметров.

DOI: 10.18500/1816-9791-2017-17-1-40-50

ВВЕДЕНИЕ

Нелинейные интегральные уравнения вида

$$\varphi(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} U(x, t, \varphi(t)) dt, \quad x \in \mathbb{R} \equiv (-\infty, +\infty), \quad (0.1)$$

возникают в современном естествознании, в частности, в кинетической теории газов, в биологии, в теории переноса излучения в спектральных линиях, в p -адической математической физике [1–5]. В уравнении (0.1) $\varphi(x)$ — искомая измеримая функция.

Уравнение Урысона вида

$$f(x) = g(x) + \int_a^b U(x, t, f(t)) dt, \quad x \in (a, b), \quad -\infty < a < b < +\infty, \quad (0.2)$$

появилось в начале прошлого столетия [6]. В работе [6] при следующих условиях на функции U и g :



- 1) функции $U(x, t, y)$ и $g(x)$ определены для $(x, t, y) \in (a, b) \times (a, b) \times (0, +\infty)$;
- 2а) $U(x, t, 0) = 0$;
- 2б) $U(x, t, y)$ обладает непрерывной производной $U'_y(x, t, y)$ относительно y , причем эта непрерывность является равномерной по отношению к x и t ;
- 2в) $U'_y(x, t, y)$ положительна и убывает с возрастанием y , при этом если $y_1 < y_2$, то $U'_y(x, t, y_1) - U'_y(x, t, y_2)$ имеет (относительно x и t) минимум, отличный от нуля;
- 2г) при безграничном возрастании y функция $U'_y(x, t, y)$ равномерно стремится к функции $Q(x, t)$, либо тождественно равной нулю, либо с положительным минимумом.
- 3) $0 \leq g(x) \leq N$, где N — некоторое положительное число, исследованы вопросы построения непрерывных решений на отрезке $[a, b]$.

В дальнейшем начиная с 1950-х годов в работах М. А. Красносельского и его научной школы были начаты систематические исследования нелинейных уравнений вида (0.2) с условиями, обеспечивающими компактность интегрального оператора [7–9].

Статья Х. А. Хачатряна [10] посвящена изучению уравнения

$$\varphi(x) = \int_0^{\infty} U(x, t, \varphi(t)) dt, \quad x \in \mathbb{R}^+ \tag{0.3}$$

относительно искомой функции $\varphi(x)$.

В [10] доказано, что если существуют число $\eta > 0$ и неотрицательная функция $K: K \in L_1(\mathbb{R})$, $\nu(K) = \int_{-\infty}^{+\infty} xK(x) dx < 0$, $\int_{-\infty}^{+\infty} K(x) dx = 1$, такие что

- 1) $U(x, t, z) \geq K(x - t)z$, $(x, t, z) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \times [0, \eta]$;
- 2) при всяком фиксированном $(x, t) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$, функция $U(x, t, z)$ монотонно не убывает по z на $[0, \eta]$;
- 3) удовлетворяет условию Каратеодори по аргументу z на $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \times [0, \eta]$;
- 4) $\int_0^{\infty} U(x, t, \eta) dt \leq \eta$, $x \in \mathbb{R}^+$,

то уравнение (0.3) обладает положительным и ограниченным решением $\varphi(x)$, причем $\lim_{x \rightarrow \infty} \varphi(x) = \eta$.

Если существует несколько различных констант η , для которых выполняются условия 1)–4), то тогда уравнение 0.3 обладает таким же количеством решений, предел каждого из которых в бесконечности равен соответствующей константе [10].

В настоящей работе при существенно других ограничениях на функцию U доказывается существование однопараметрического семейства положительных решений уравнения (0.1).

1. ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ ФАКТЫ

1.1. О решениях неоднородных интегральных уравнений на всей прямой

Рассмотрим следующее неоднородное уравнение свертки:

$$\psi(x) = g(x) + \int_{-\infty}^{+\infty} K(x - t)\psi(t) dt, \quad x \in \mathbb{R}, \tag{1.4}$$



где

$$0 \leq K \in L_1(\mathbb{R}) \cap M(\mathbb{R}), \quad \int_{-\infty}^{+\infty} K(t) dt = 1, \quad (1.5)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 K(x) dx < +\infty, \quad (1.6)$$

$$\nu(K) \equiv \int_{-\infty}^{+\infty} xK(x) dx \neq 0. \quad (1.7)$$

Свободный член $g(x)$ обладает следующими свойствами:

$$g(x) \geq 0, \quad x \in \mathbb{R}, \quad (1.8)$$

причем

$$g \in L_1^0(\mathbb{R}^-) \cap M(\mathbb{R}) \quad \text{при } \nu > 0, \quad (1.9)$$

$$g \in L_1^0(\mathbb{R}^+) \cap M(\mathbb{R}) \quad \text{при } \nu < 0, \quad (1.10)$$

где $L_1^0(\mathbb{R}^\pm)$ — пространства суммируемых функций на \mathbb{R}^\pm , имеющих нулевой предел в $\pm\infty$ соответственно, а $M(\mathbb{R})$ — пространство измеримых и существенно ограниченных на \mathbb{R} функций.

Из результатов работы [11] следует, что при выполнении условий (1.5)–(1.7) уравнение (1.4) имеет не отрицательное решение $\psi \in L_1^{loc}(\mathbb{R})$ с асимптотическими свойствами

$$\int_0^x \psi(t) dt = o(x) \quad \text{при } x \rightarrow -\infty \quad (\nu > 0), \quad (1.11)$$

$$\int_0^x \psi(t) dt = o(x) \quad \text{при } x \rightarrow +\infty \quad (\nu < 0). \quad (1.12)$$

1.2. Об одном вспомогательном интегральном уравнении типа Гаммерштейна на всей оси

Рассмотрим следующее нелинейное интегральное уравнение типа Гаммерштейна:

$$F(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} K(x-t)(F(t) + \omega(t, F(t))) dt, \quad x \in \mathbb{R}, \quad (1.13)$$

относительно искомой измеримой функции $F(x)$, определенной на \mathbb{R} , где ядерная функция $K(x)$ удовлетворяет условиям (1.5)–(1.7), а функция $\omega(t, z)$, описывающая нелинейность уравнения (1.13), обладает следующими свойствами:

а) существует число $A > 0$ такое, что $\omega(t, z) \geq 0$ при $t \in \mathbb{R}$, $z \geq A$;

б) функция $\omega(t, z)$ удовлетворяет условию Каратеодори по аргументу z на множестве $(\mathbb{R} \times [A, +\infty))$: $\omega \in Car_z(\mathbb{R} \times [A, +\infty))$, т.е. при всяком $z \in [A, +\infty)$ $\omega(t, z)$ измерима по t на \mathbb{R} и почти при всех $t \in \mathbb{R}$ функция $\omega(t, z)$ непрерывна по z на $[A, +\infty)$;



в) существует

$$\sup_{z \geq A} \omega(t, z) \equiv \beta(t), \quad \text{причем } \beta \in L_1(\mathbb{R}) \cap M(\mathbb{R}); \quad (1.14)$$

г) при каждом фиксированном $t \in \mathbb{R}$ функция $\omega(t, z)$ неубывает по z на $[A, +\infty)$.

Для уравнения (1.13) введем в рассмотрение следующее семейство последовательных приближений:

$$F_{n+1}^\gamma(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} K(x-t)(F_n^\gamma(t) + \omega(t, F_n^\gamma(t))) dt, \quad x \in \mathbb{R}, \quad (1.15)$$

$$F_0^\gamma(x) = \gamma, \quad \gamma \in [A, +\infty) \text{ — произвольное число, } n = 0, 1, 2, \dots$$

Индукцией по n можно убедиться, что

д) $F_n^\gamma(x)$ неубывает по n при каждом фиксированном $\gamma \in [A, +\infty)$;

е) если $\gamma_1, \gamma_2 \in [A, +\infty)$ — произвольные числа и $\gamma_1 > \gamma_2$, то

$$F_n^{\gamma_1}(x) - F_n^{\gamma_2}(x) \geq \gamma_1 - \gamma_2, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad x \in \mathbb{R}. \quad (1.16)$$

Докажем, например, неравенство (1.16). В случае $n = 0$ неравенство (1.16) превращается в равенство (см. (1.15)). Пусть (1.16) имеет место при некотором $n \in \mathbb{N}$. Тогда, используя монотонность функции $\omega(t, z)$ по z (см. условие г), неотрицательность ядра K и индукционное предположение из (1.15) будем иметь

$$\begin{aligned} F_{n+1}^{\gamma_1}(x) - F_{n+1}^{\gamma_2}(x) &= \int_{-\infty}^{+\infty} K(x-t)(F_n^{\gamma_1}(t) - F_n^{\gamma_2}(t) + \omega(t, F_n^{\gamma_1}(t)) - \omega(t, F_n^{\gamma_2}(t))) dt \geq \\ &\geq (\gamma_1 - \gamma_2) \int_{-\infty}^{+\infty} K(x-t) dt + \int_{-\infty}^{+\infty} K(x-t)(\omega(t, F_n^{\gamma_1}(t)) - \omega(t, F_n^{\gamma_2}(t))) dt \geq \\ &\geq (\gamma_1 - \gamma_2) \int_{-\infty}^{+\infty} K(t) dt = \gamma_1 - \gamma_2, \end{aligned}$$

так как $\int_{-\infty}^{+\infty} K(t) dt = 1$.

Теперь рассмотрим линейное интегральное уравнение (1.4) со специальным свободным членом вида

$$g(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} K(x-t)\beta(t) dt, \quad x \in \mathbb{R}. \quad (1.17)$$

Так как $\omega(t, z) \geq 0$, $t \in \mathbb{R}$, $z \in [A, +\infty)$, и ядро K удовлетворяет условию (1.5), то из (1.17) следует (1.8).

Поскольку $K, \beta \in L_1(\mathbb{R}) \cap M(\mathbb{R})$, то из результатов работы [11] следует, что $g \in L_1(\mathbb{R}) \cap M(\mathbb{R})$, причем $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} g(x) = 0$. Следовательно, введенная нами функция $g(x)$ удовлетворяет всем требованиям (1.8)–(1.10). Таким образом, используя вышесказанное, можно утверждать, что уравнение (1.4) со свободным членом (1.17)



обладает неотрицательным решением $\psi(x)$, причем имеют место асимптотические формулы (1.11) и (1.12).

Теперь докажем, что для любого $\gamma \in [A, +\infty)$

$$F_n^\gamma(x) \leq \gamma + \psi(x), \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (1.18)$$

При $n = 0$ неравенство выполняется очевидным образом, ибо $\psi \geq 0$, $x \in \mathbb{R}$. Пусть (1.18) выполняется при некотором $n \in \mathbb{N}$. Тогда с учетом условий в), г) из (1.15) получим:

$$\begin{aligned} F_{n+1}^\gamma(x) &\leq \int_{-\infty}^{+\infty} K(x-t)(\gamma + \psi(t) + \omega(t, \gamma + \psi(t))) dt \leq \\ &\leq \int_{-\infty}^{+\infty} K(x-t)(\gamma + \psi(t) + \beta(t)) dt = \gamma + g(x) + \int_{-\infty}^{+\infty} K(x-t)\psi(t) dt = \gamma + \psi(x). \end{aligned}$$

Итак, из д), е) и (1.18) следует, что последовательность функций $\{F_n^\gamma(x)\}_{n=0}^\infty$ при каждом фиксированном $\gamma \in [A, +\infty)$ имеет поточечный предел при $n \rightarrow +\infty$:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F_n^\gamma(x) = F^\gamma(x).$$

Используя предельную теорему Б. Леви [12], можно непосредственным образом проверить, что $F^\gamma(x)$ удовлетворяет уравнению (1.13).

Из е) следует, что

$$F^{\gamma_1}(x) - F^{\gamma_2}(x) \geq \gamma_1 - \gamma_2, \quad x \in \mathbb{R}, \quad (1.19)$$

а из д) и (1.18) получим:

$$\gamma \leq F^\gamma(x) \leq \gamma + \psi(x), \quad x \in \mathbb{R}, \quad \gamma \in [A, +\infty). \quad (1.20)$$

Пусть $\nu > 0$. Тогда, используя формулу (1.11), из (1.20) можно утверждать, что

$$\int_0^x F^\gamma(t) dt = \gamma x + o(x) \quad \text{при} \quad x \rightarrow -\infty. \quad (1.21)$$

Аналогичным образом, если $\nu < 0$, то

$$\int_0^x F^\gamma(t) dt = \gamma x + o(x) \quad \text{при} \quad x \rightarrow +\infty. \quad (1.22)$$

Итак, нами доказана следующая

Теорема 1. При условиях (1.5)–(1.7), а)–г) уравнение (1.13) обладает однопараметрическим семейством положительных решений $\{F^\gamma(x)\}_{\gamma \in [A, +\infty)}$ со свойствами (1.19)–(1.20), причем

- 1) если $\nu > 0$, то справедлива асимптотическая формула (1.21);
- 2) если $\nu < 0$, то имеет место (1.22).



2. ОСНОВНОЙ РЕЗУЛЬТАТ

Используя теорему 1 займемся построением однопараметрического семейства положительных решений для уравнения (0.1).

Теорема 2. Пусть существует число $A > 0$ такое, что

1) $U(x, t, y) \geq K(x-t)(y + \omega(t, y))$, $(x, t, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times [A, +\infty)$, где удовлетворяет условиям (1.5)–(1.7);

2) $U(x, t, y)$ не убывает по y на $[A, +\infty)$ при каждом фиксированном $(x, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$;

3) $U \in \text{Car}_y(\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times [A, +\infty))$ и для каждой измеримой и ограниченной функции $\varphi(x) : \varphi(x) \geq A$, $x \in \mathbb{R}$, функции $U(x, t, \varphi(t))$ и $\int_{-\infty}^{+\infty} U(x, t, \varphi(t)) dt$ измеримы соответственно по t и по x на \mathbb{R} ;

4) существует $\sup_{y \geq A - \infty} \int_{-\infty}^{+\infty} [U(x, t, y) - K(x-t)y] dt \equiv g_0(x)$, $x \in \mathbb{R}$, $g_0 \in L_1^0(\mathbb{R}) \cap L_\infty(\mathbb{R})$, и $\nu(g_0) < +\infty$.

Тогда уравнение (0.1) имеет однопараметрическое семейство положительных и ограниченных решений $\{\psi^\gamma(x)\}_{\gamma \in \Pi}$, где $\Pi \equiv [A, +\infty)$. Более того, имеют место следующие асимптотические формулы:

А) если $\nu(K) < 0$, то $\int_0^x \varphi^\gamma(x) dx = \gamma x + o(x)$ при $x \rightarrow +\infty$;

В) если $\nu(K) > 0$, то $\int_0^x \varphi^\gamma(x) dx = \gamma x + o(x)$ при $x \rightarrow -\infty$.

Доказательство. Сначала рассмотрим следующее неоднородное уравнение Винера – Хопфа:

$$F^*(x) = g_0(x) + \int_{-\infty}^{+\infty} K(x-t)F^*(t) dt, \quad (2.23)$$

где $g_0(x)$ определяется из условия 4) теоремы 2. Используя результаты работ [13–15] получаем, что уравнение (2.23) имеет положительное локально суммируемое и ограниченное решение.

Введем следующие итерации:

$$\varphi_{n+1}^\gamma(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} U(x, t, \varphi_n^\gamma(t)) dt, \quad x \in \mathbb{R}, \quad (2.24)$$

$$\varphi_0^\gamma(x) = F^\gamma(x), \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad \gamma \in \Pi, \quad (2.25)$$

где $F^\gamma(x)$ — решение уравнения (1.13).

Индукцией по n убедимся, что

а) функции $\varphi_n^\gamma(x)$ измеримы по x на \mathbb{R} , $n = 0, 1, 2, \dots$, $\gamma \in \Pi$;

б) при каждом фиксированном $\gamma \in \Pi$ $\varphi_n^\gamma(x)$ неубывает по n на \mathbb{R} ;

в) имеет место следующее неравенство:

$$\varphi_n^\gamma(x) \leq F^\gamma(x) + F^*(x), \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad x \in \mathbb{R}, \quad \gamma \in \Pi. \quad (2.26)$$



Утверждение а) следует из условия 3) теоремы. Докажем утверждение б). Для этого сперва заметим, что при каждом $\gamma \in \Pi$ имеет место неравенство

$$\varphi_1^\gamma(x) \geq \varphi_0^\gamma(x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Из условия 1) теоремы следует, что

$$\begin{aligned} \varphi_1^\gamma(x) &= \int_{-\infty}^{+\infty} U(x, t, F^\gamma(t)) dt \geq \int_{-\infty}^{+\infty} K(x-t)(F^\gamma(t) + \omega(t, F^\gamma(t))) dt = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} K(x-t)F^\gamma(t) dt + \int_{-\infty}^{+\infty} K(x-t)\omega(t, F^\gamma(t)) dt = F^\gamma(x) = \varphi_0^\gamma(x). \end{aligned}$$

Предполагая, что $\varphi_n^\gamma(x) \geq \varphi_{n-1}^\gamma(x)$ при некотором $n \in \mathbb{N}$ в силу монотонности функции $U(x, t, y)$ по y , получим $\varphi_{n+1}^\gamma(x) \geq \varphi_n^\gamma(x)$.

Теперь докажем неравенство в). Заметим, что при $n = 0$ неравенство в) очевидно, так как $F^*(x) \geq 0, x \in \mathbb{R}$. Пусть в) выполняется при некотором $n \in \mathbb{N}$. Тогда, учитывая условия 2), 4) теоремы, будем иметь:

$$\begin{aligned} \varphi_{n+1}^\gamma(x) &\leq \int_{-\infty}^{+\infty} U(x, t, F^\gamma(t) + F^*(t)) dt = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} U(x, t, F^\gamma(t) + F^*(t)) - K(x-t)(F^\gamma(t) + F^*(t)) dt + \int_{-\infty}^{+\infty} K(x-t)F^\gamma(t) dt + \\ &+ \int_{-\infty}^{+\infty} K(x-t)F^*(t) dt \leq g_0(x) + \int_{-\infty}^{+\infty} K(x-t)F^\gamma(t) dt + \int_{-\infty}^{+\infty} K(x-t)F^*(t) dt \leq \\ &\leq g_0(x) + \int_{-\infty}^{+\infty} K(x-t)(F^\gamma(t) + \omega(t, F^\gamma(t))) dt + \int_{-\infty}^{+\infty} K(x-t)F^*(t) dt = \\ &= F^\gamma(x) + F^*(x). \end{aligned}$$

Таким образом, из утверждений а), б) и в) следует, что последовательность функций $\{\varphi_n^\gamma(x)\}_{n=0}^\infty$ имеет поточечный предел при

$$n \rightarrow \infty : \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n^\gamma(x) = \varphi^\gamma(x),$$

причем предельная функция $\varphi^\gamma(x)$ удовлетворяет уравнению (0.1). Ограниченность каждого решения $\{\varphi^\gamma(x)\}_{\gamma \in \Pi}$ следует из того, что

$$F^\gamma \in L_\infty(\mathbb{R}), \quad \gamma \in \Pi, \quad F^* \in L_1(\mathbb{R}) \cap L_\infty(\mathbb{R}).$$

Теперь докажем утверждение А) теоремы. Имеем

$$F^\gamma(t) \leq \varphi^\gamma(t) \leq F^\gamma(t) + F^*(t), \quad t \in \mathbb{R}. \tag{2.27}$$



Интегрируя обе части неравенства (2.27) по t от 0 до x и учитывая (1.21), получим

$$\gamma x + o(x) \leq \int_0^x \varphi^\gamma(t) dt \leq \gamma x + o(x) + \int_0^x F^*(t) dt. \quad (2.28)$$

Так как $\int_0^x F^*(t) dt = o(x)$ (при $x \rightarrow +\infty$ в случае $\nu(K) < 0$ и при $x \rightarrow -\infty$ в случае $\nu(K) > 0$), то получим

$$\int_0^x \varphi^\gamma(t) dt = \gamma x + o(x), \quad \text{при } x \rightarrow \pm\infty. \quad \square$$

3. ПРИМЕРЫ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ ВИДА (0.1)

Приведем примеры нелинейных уравнений вида (0.1), для которых выполняются все условия теоремы 2.

Пусть $G(t, y)$ — определенная на $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ вещественная функция, причем имеет место следующие условия:

- 1) $G(t, y) \geq y$, $(t, y) \in \mathbb{R} \times [A, +\infty)$;
- 2) $G(t, y)$ неубывает по y на $[A, +\infty)$;
- 3) $G \in Car_y(\mathbb{R} \times [A, +\infty))$;
- 4) $\sup_{y \geq A} (G(t, y) - y) \in L_1(\mathbb{R}) \cap L_\infty(\mathbb{R})$, $\int_{-\infty}^{+\infty} t \left(\sup_{y \geq A} (G(t, y) - y) \right) dt < +\infty$.

В качестве $G(t, y)$ можно выбрать следующие функции:

- $G(t, y) = y + e^{-y} e^{-t^2}$ при $A = 0$;
- $G(t, y) = y + \frac{y}{y+1} e^{-|t|}$ при $A = 0$;
- $G(t, y) = y + e^{-|t| \sin^2 y}$ при $A = 0$;
- $G(t, y) = y + \ln \left(e - \frac{1}{y^2} \right) e^{-t^2}$ при $A = \sqrt{\frac{1}{e-1}}$;
- $G(t, y) = y + (\sqrt{y^2 + 1} - y) e^{-t^2}$ при $A = 0$;
- $G(t, y) = y + \ln \left(1 - \frac{y}{y^2 + 1} \right) e^{-|t|}$ при $A = 0$.

В качестве частного примера уравнения (0.1) можно выбрать следующий класс нелинейных интегральных уравнений типа Гаммерштейна:

$$\varphi(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} K(x-t)(G(t, \varphi(t)) + \omega(t, \varphi(t))) dt, \quad x \geq 0,$$

где функции G и ω удовлетворяют соответственно условиям 1)–4) этого параграфа и условиям а)–г) из п. 1.2.

Авторы выражают благодарность рецензенту за полезные замечания.

Благодарности. Работа выполнена при финансовой поддержке ГКН МОН РА (проект № SCS 16YR-1A002).



Библиографический список

1. *Хачатрян А. Х., Хачатрян Х. А.* Качественное различие решений для стационарных модельных уравнений Больцмана в линейном и нелинейном случаях // ТМФ. 2014. Т. 180, № 2. С. 272–288. DOI: 10.4213/tmf8623.
2. *Khachatryan Kh. A.* On solvability of some classes of Urysohn nonlinear integral equations with noncompact operators // Уфимск. матем. журн. 2010. Т. 2, № 2. С. 103–117.
3. *Хачатрян А. Х., Хачатрян Х. А.* Об одном нелинейном интегральном уравнении типа уравнения Гаммерштейна с некомпактным оператором // Матем. сб. 2010. Т. 201, № 4. С. 125–136. DOI: 10.4213/sm7310.
4. *Diekmann O.* Thresholds and travelling waves for the geographical spread of infection // J. Math. Biol. 1978. Vol. 6, № 2. P. 109–130. DOI: 10.1007/BF02450783.
5. *Vladimirov V. S., Volovich Y. I.* Nonlinear Dynamics equation in p -adic string theory // Theoret. and Math. Phys. 2004. Vol. 138, № 3. P. 297–309. DOI: 10.1023/B:TAMP.0000018447.02723.29.
6. *Урысон П. С.* Об одном типе нелинейных интегральных уравнений // Матем. сб. 1923. Т. 31, № 2. С. 236–255.
7. *Забрейко П. П., Пустыльник Е. И.* О непрерывности и полной непрерывности нелинейных интегральных операторов в пространствах L_p // УМН. 1964. Т. 19, вып. 2(116). С. 204–505.
8. *Бобылев Н. А., Исмаилов И. Г.* Итерационные процедуры в задачах управления и оптимизации // Приборы и системы управления. 1997. № 1. С. 15–18.
9. *Забрейко П. П., Красносельский М. А.* О разрешимости нелинейных операторных уравнений // Функц. анализ и его прилож. 1971. Т. 5, вып. 3. С. 42–44.
10. *Хачатрян Х. А.* Достаточные условия разрешимости интегрального уравнения Урысона на полуоси // Докл. АН. 2009. Т. 425, № 4. С. 462–465.
11. *Арабаджян Л. Г., Хачатрян А. С.* Об одном классе интегральных уравнений типа свертки // Матем. сб. 2007. Т. 198, № 7. С. 45–62. DOI: 10.4213/sm1483.
12. *Колмогоров А. Н., Фомин В. С.* Элементы теории функций и функционального анализа. М. : Наука, 1981. 544 с.
13. *Yengibarjan N. B.* Renewal equation on the whole line // Stochastic Process. Appl. 2000. Vol. 85, iss. 2. P. 237–247. DOI: 10.1016/S0304-4149(99)00076-9.
14. *Енгибарян Н. Б.* Консервативные системы интегральных уравнений свертки на полупрямой и всей прямой // Матем. сб. 2002. Т. 193, № 6. С. 61–82. DOI: 10.4213/sm660.
15. *Рудин У.* Функциональный анализ. М. : Мир, 1975. 449 с.

Образец для цитирования:

Хачатрян Х. А., Сардарян Т. Г. О разрешимости одного класса нелинейных интегральных уравнений типа Урысона на всей прямой // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2017. Т. 17, вып. 1. С. 40–50. DOI: 10.18500/1816-9791-2017-17-1-40-50.



On Solvability of One Class of Urysohn Type Nonlinear Integral Equation on the Whole Line

Kh. A. Khachatryan¹, T. H. Sardaryan²

¹Khachatur A. Khachatryan, Institute of Mathematics, National Academy of Sciences of Armenia, 24/5, Marshal Baghramyan Avenue, 0019, Yerevan, Republic of Armenia, Khach82@rambler.ru, Khach82@mail.ru
²Tigran H. Sardaryan, Armenian National Agrarian University, 74, Teryan str., 0009, Yerevan, Republic of Armenia, Sardaryan.tigran@gmail.com

In present work one class of Urysohn type nonlinear integral equation on whole line is studied. Equations observed have applications in various fields of mathematical physics. It is assumed that Hammerstein type nonlinear integral operator with a difference kernel serves local minorant in terms of M. A. Krasnoselskii for the Urysohn initial operator. Combination of construction methods of invariant cone segments for initial Urysohn nonlinear operator with the methods of monotone operator theory and convolution type conservative integral equations in the case of some restrictions on nonlinearity allows us to prove constructive existence theorems about one parametric positive solutions. A set of parameters is described and the behavior of constructed solutions at infinity is examined. At the end of the work specific examples are given for which conditions of formulated theorems are satisfied.

Key words: Urysohn integral equation, monotonicity, successive approximations, one-parameter family of positive solutions, Caratheodory's condition, set of parameters.

Acknowledgements: This work was supported by State Committee Science MES RA (project no. SCS 16YR-1A002).

References

1. Khachatryan A. Kh., Khachatryan Kh. A. Qualitative difference between solutions of stationary model Boltzmann equations in the linear and nonlinear cases. *Theoret. and Math. Phys.*, 2014, vol. 180, no. 2, pp. 990–1004. DOI: 10.1007/s11232-014-0194-6.
2. Khachatryan Kh. A. On solvability of some classes of Urysohn nonlinear integral equations with noncompact operators. *Ufimsk. Mat. Zh.*, 2010, vol. 2, no. 2, pp. 103–117.
3. Khachatryan A. Kh., Khachatryan Kh. A. A nonlinear integral equation of Hammerstein type with a noncompact operator. *Sb. Math.*, 2010, vol. 201, no. 4, pp. 595–606. DOI: 10.1070/SM2010v201n04ABEH004083.
4. Diekmann O. Thresholds and travelling waves for the geographical spread of infection. *J. Math. Biol.*, 1978, vol.6, no. 2, pp. 109–130. DOI: 10.1007/BF02450783.
5. Vladimirov V. S., Volovich Ya. I. Nonlinear Dynamics equation in p -adic string theory. *Theoret. and Math. Phys.*, 2004, vol. 138, no. 3, pp. 297–309. DOI: 10.1023/B:TAMP.0000018447.02723.29.
6. Urysohn P. Ob odnom tipe nelineynix integralnix uravnenij [One type of nonlinear integral equations]. *Mat. Sb. [Sbornik: Mathematics]*, 1923, vol. 31, no. 2, pp. 236–255 (in Russian).
7. Zabreiko P. P., Pustyl'nik E. I. On continuity and complete continuity of nonlinear integral operators in L_p spaces. *Uspekhi Mat. Nauk*, 1964, vol. 19, iss. 2(116), pp. 204–205 (in Russian).
8. Bobylev N. A., Ismailov I. G. Iterationnie proceduri v zadachax upravleniyai optimizacii [Itertive control problems in the procedures and optimization]. *Pribory i sistemi upravleniya [Devices and control systems]*, 1997, no. 1, pp. 15–18 (in Russian).



9. Krasnoselskii M. A., Zabreiko P. P. Solvability of nonlinear operator equations. *Funct. Anal. Appl.*, 1971, vol. 5, iss. 3, pp. 206–208. DOI: 10.1007/BF0107 8126.
10. Khachatryan Kh. A. Sufficient conditions for the solvability of the Uryshon integral equation on a half-axis. *Dokl. Math.*, 2009, vol. 79, iss. 2, pp. 246–249. DOI: 10.1134/S1064562409020264.
11. Arabadzhyan L. G., Khachatryan A. S. A class of integral equations of convolution type. *Sb. Math.*, 2007, vol. 198, no. 7, pp. 949–966. DOI: 10.1070/ SM2007v198n07ABEH003868.
12. Kolmogorov A. N., Fomin S. V. *Elements of the Theory of Functions and Functional Analysis*. Moscow, Nauka, 1981. 544 p. (in Russian).
13. Yengibarjan N. B. Renewal equation on the whole line. *Stochastic Process. Appl.*, 2000, vol. 85, iss. 2, pp. 237–247. DOI: 10.1016/S0304-4149(99)00076-9.
14. Engibaryan N. B. Conservative systems of integral convolution equations on the half-line and the entire line. *Sb. Math.*, 2002, vol. 193, no. 6, pp. 847–867. DOI: 10.1070/SM2002v193n06ABEH000660.
15. Rudin W. *Functional analysis*. McGraw-Hill, 1973. 397 p. (Russ. ed.: Rudin W. *Funktional'nyi analiz*. Moscow, Mir, 1975. 449 p.)

Cite this article as:

Khachatryan Kh. A., Sardaryan T. H. On Solvability of One Class of Urysohn Type Nonlinear Integral Equation on the Whole Line. *Izv. Saratov Univ. (N. S.), Ser. Math. Mech. Inform.*, 2017, vol. 17, iss. 1, pp. 40–50 (in Russian). DOI: 10.18500/1816-9791-2017-17-1-40-50.



УДК 517.984

О ВОССТАНОВЛЕНИИ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ПУЧКОВ НА ГРАФЕ-КУСТЕ

В. А. Юрко

Юрко Вячеслав Анатольевич, доктор физико-математических наук, заведующий кафедрой математической физики и вычислительной математики, Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского, Россия, 410012, Саратов, Астраханская, 83, YurkoVA@info.sgu.ru

Исследуется обратная задача спектрального анализа для дифференциальных пучков второго порядка на графе-кусте, который является произвольным компактным графом с одним циклом. Основное внимание уделяется наиболее важной нелинейной обратной задаче восстановления коэффициентов дифференциальных уравнений при условии, что структура графа известна априори. Используются стандартные условия склейки во внутренних вершинах и краевые условия Дирихле и Неймана в граничных вершинах. Для данного класса пучков установлены свойства спектральных характеристик, получена конструктивная процедура решения обратной задачи восстановления коэффициентов дифференциальных операторов по спектрам и доказана единственность решения. Для решения этой обратной задачи используется метод спектральных отображений, который позволяет строить потенциал на каждом фиксированном ребре. Для перехода к следующему ребру используется специальное представление характеристических функций.

Ключевые слова: дифференциальные пучки, геометрический граф, обратные спектральные задачи.

DOI: 10.18500/1816-9791-2017-17-1-51-61

ВВЕДЕНИЕ

Исследуется обратная спектральная задача для несамосопряженных дифференциальных пучков второго порядка на компактном графе-кусте (произвольный граф с одним циклом) при стандартных условиях склейки во внутренних вершинах и краевых условиях в граничных вершинах. Основное внимание уделяется наиболее важной нелинейной обратной задаче восстановления коэффициентов дифференциальных уравнений (потенциалов) при условии, что структура графа известна априори. Для этой обратной задачи доказана теорема единственности и получена процедура построения решения. Для решения этой обратной задачи используется метод спектральных отображений [1].

Отметим, что обратные спектральные задачи для дифференциальных операторов на интервале изучены достаточно полно (см. [1–5] и библиографию к ним). Обратные задачи на графах исследовались в работах [6–13] и других работах.

Рассмотрим компактный граф G в \mathbf{R}^l с множеством ребер $\mathcal{E} = \{e_0, \dots, e_r\}$ и множеством вершин $W = V \cup U$, где $V = \{v_1, \dots, v_r\}$, $U = \{v_{r+1}, \dots, v_{r+N}\}$. Граф имеет вид $G = e_0 \cup T$, где e_0 — цикл, $v_i \in e_0$, $i = r+1, r+N$, $v_j \notin e_0$, $j = \overline{1, r}$, $T \cap e_0 = U$, $T = T_1 \cup \dots \cup T_m$, и T_j — дерево с корнем из U и с одним корневым ребром из \mathcal{E} . Множество T состоит из N групп деревьев: $T = R_1 \cup \dots \cup R_N$, $R_i \cap e_0 = v_{r+i}$,



т.е. все деревья из R_i имеют общий корень v_{r+i} . Пусть m_i — число деревьев в блоке R_i ; $m_1 + \dots + m_N = m$. Обозначим $s_0 = 1$, $s_i = m_1 + \dots + m_i$, $i = \overline{1, N}$. Тогда

$$R_i = \bigcup_{j=s_{i-1}+1}^{s_i} T_j, \quad \bigcap_{j=s_{i-1}+1}^{s_i} T_j = v_{r+i}, \quad i = \overline{1, N}.$$

Фиксируем $i = \overline{1, N}$, $j = \overline{1, m}$, и рассмотрим дерево $T_j \in R_i$. Для двух точек $a, b \in T_j$ будем писать $a \leq b$, если a лежит на единственном простом пути, соединяющем корень v_0 с b . Будем писать $a < b$, если $a \leq b$ и $a \neq b$. Если $a < b$, то обозначим $[a, b] := \{z \in T : a \leq z \leq b\}$. В частности, если $e = [v, w]$ — ребро, то v называется его начальной точкой, а w — его конечной точкой; будем говорить, что e выходит из v и заканчивается в w . Для каждой вершины $v \in T_j$ обозначим $R(v) := \{e \in T_j : e = [v, w], w \in T_j\}$ — множество ребер, выходящих из v . Для $v \in T_j$ через $|v|$ обозначим число ребер между v и v ; число $|v|$ называется порядком v . Для каждого ребра $e \in T$ его порядок определяется как порядок его конечной точки. Число $\sigma := \max_{j=\overline{1, r}} |v_j|$ называется высотой T . Пусть $V^{(\mu)} := \{v \in V : |v| = \mu\}$, $\mu = \overline{0, \sigma}$ — множество вершин порядка μ , а $\mathcal{E}^{(\mu)} := \{e \in T : e = [v, w], v \in V^{(\mu-1)}, w \in V^{(\mu)}\}$, $\mu = \overline{1, \sigma}$, — множество ребер порядка μ . Цикл e_0 состоит из N частей:

$$e_0 = e_{r+1} \cup \dots \cup e_{r+N}, \quad e_{r+k} = [v_{r+k}, v_{r+k+1}], \quad k = \overline{1, N}, \quad v_{r+N+1} := v_{r+1}.$$

Для определенности занумеруем вершины $v_j \in V$ следующим образом: $\Gamma := \{v_1, \dots, v_p\}$ — граничные вершины графа G , а v_j при $j > p$ занумерованы в порядке возрастания $|v_j|$. Аналогично занумеруем ребра, а именно $e_j = [v_{j_k}, v_j]$, $j = \overline{1, r}$, $j_k < j$. В частности, $E := \{e_1, \dots, e_p\}$ — множество граничных ребер графа G . Ясно, что $e_j \in \mathcal{E}^{(\mu)}$ тогда и только тогда, когда $v_j \in V^{(\mu)}$. Положим $\mathcal{E}_i := \{e_k \in R_i : v_{r+i} \in e_k\}$, $\mathcal{E}_{N+1} := \mathcal{E}_1$.

Пусть d_j — длина ребра e_j , $j = \overline{1, r+N}$, а $d_0 = d_{r+1} + \dots + d_{r+N}$ — длина e_0 . Положим $b_0 = 0$, $b_k = d_{r+1} + \dots + d_{r+k}$, $k = \overline{1, N}$. Тогда $b_N = d_0$. Каждое ребро e_j , $j = \overline{1, r+N}$ параметризуется параметром $x_j \in [0, d_j]$, причем $x_j = 0$ соответствует вершине v_j . Весь цикл e_0 параметризуется параметром $x \in [0, d_0]$, где $x = x_{r+j} + b_{j-1}$ при $x_{r+j} \in [0, d_{r+j}]$, $j = \overline{1, N}$.

Функция Y на G представима в виде $Y = \{y_j\}_{j=\overline{1, r+N}}$, где функция $y_j(x_j)$, $x_j \in [0, d_j]$, определена на ребре e_j . Функция $y(x)$, $x \in [0, d_0]$, на цикле e_0 имеет вид $y(x) = y_{r+j}(x_{r+j})$, $j = \overline{1, N}$. Пусть $Q = \{q_j\}_{j=\overline{1, r+N}}$ и $P = \{p_j\}_{j=\overline{1, r+N}}$ — комплекснозначные функции на G , они называются потенциалами. Предположим, что $q_j(x_j) \in L(0, d_j)$, $p_j(x_j) \in AC[0, d_j]$. Потенциалы $p(x)$, $q(x)$, $x \in [0, d_0]$ на всем цикле e_0 имеют вид $p_0(x) = p_{r+j}(x_{r+j})$, $q_0(x) = q_{r+j}(x_{r+j})$, $j = \overline{1, N}$. Рассмотрим дифференциальное уравнение на графе G :

$$y_j''(x_j) + (\rho^2 + \rho p_j(x) + q_j(x))y_j(x_j) = 0, \quad x_j \in [0, d_j], \quad (1)$$

где $j = \overline{1, r+N}$, ρ — спектральный параметр, функции $y_j(x_j)$, $y_j'(x_j)$ абсолютно непрерывны на $[0, d_j]$ и удовлетворяют следующим условиям склейки во внутренних вершинах: для v_k , $k = \overline{p+1, r}$:

$$y_j(d_j) = y_k(0) \quad \text{for all } e_j \in R(v_k), \quad \sum_{e_j \in R(v_k)} y_j'(d_j) = y_k'(0), \quad (2)$$



для $v_{\mu+1}$, $\mu = \overline{r+1, r+N}$:

$$\left. \begin{aligned} y_{\mu+1}(0) &= y_{\mu}(d_{\mu}) = y_j(d_j) \quad \forall e_j \in \mathcal{E}_{\mu-r+1}, \\ y'_{\mu+1}(0) &= y'_{\mu}(d_{\mu}) + \sum_{e_j \in \mathcal{E}_{\mu-r+1}} y'_j(d_j), \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

где $y_{r+N+1} = y_{r+1}$, $d_{r+N+1} = d_{r+1}$. Условия (2), (3) называются стандартными условиями склейки. В электрических сетях они выражают закон Кирхгофа; при колебаниях упругих сетей — баланс напряжений и т.д. Рассмотрим краевую задачу $B_0(G)$ для уравнения (1) с условиями склейки (2), (3) и с краевыми условиями Дирихле в граничных вершинах v_1, \dots, v_p : $y_j(0) = 0$, $j = \overline{1, p}$. Пусть $\Lambda_0 = \{\rho_{n0}\}$ — собственные значения (с учетом кратностей) задачи $B_0(G)$. Рассмотрим также краевые задачи $B_{\nu_1, \dots, \nu_{\gamma}}(G)$, $\gamma = \overline{1, p}$, $1 \leq \nu_1 < \dots < \nu_{\gamma} \leq p$, для уравнения (1) с условиями склейки (2), (3) и с краевыми условиями:

$$y'_k(0) = 0, \quad k = \nu_1, \dots, \nu_{\gamma}, \quad y_j(0) = 0, \quad j = \overline{1, p}, \quad j \neq \nu_1, \dots, \nu_{\gamma}.$$

Через $\Lambda_{\nu_1, \dots, \nu_{\gamma}} := \{\rho_{n, \nu_1, \dots, \nu_{\gamma}}\}$ обозначим собственные значения (с учетом кратностей) задачи $B_{\nu_1, \dots, \nu_{\gamma}}(G)$. Пусть $C(x, \rho), S(x, \rho)$ — решения уравнения

$$y''(x) + (\rho^2 + \rho p_0(x) + q_0(x))y(x) = 0, \quad x \in [0, d_0] \quad (4)$$

на цикле e_0 с начальными условиями $C(0, \rho) = S'(0, \rho) = 1$, $C'(0, \rho) = S(0, \rho) = 0$. Обозначим $H(\rho) := C(d_0, \rho) - S'(d_0, \rho)$, $h(\rho) := S(d_0, \rho)$. Пусть $\mathcal{V} = \{\nu_n\}$ — нули целой функции $h(\rho)$. Тогда $\{\nu_n\}$ являются собственными значениями краевой задачи \mathcal{B} для уравнения (4) при граничных условиях $y(0) = y(d_0) = 0$. Через $\Omega = \{\omega_n\}$ обозначим Ω — последовательность для \mathcal{B} [14].

Выберем и зафиксируем по одной граничной вершине $v_{\xi_i} \in R_i$ из каждого блока R_i , $i = \overline{1, N}$. Обозначим $\xi := \{k : k = \xi_1, \dots, \xi_N\}$ — множество индексов ξ_i , $i = \overline{1, N}$.

Обратная задача 1. Даны $2^N + p - N$ спектров Λ_j , $j = \overline{0, p}$, $\Lambda_{\nu_1, \dots, \nu_{\gamma}}$, $\gamma = \overline{2, N}$, $1 \leq \nu_1 < \dots < \nu_{\gamma} \leq p$, $\nu_j \in \xi$, Ω , построить потенциалы P, Q на графе G .

Сформулируем теорему единственности решения этой обратной задачи. Для этого наряду с (P, Q) рассмотрим потенциалы (\tilde{P}, \tilde{Q}) . Условимся, что если некоторый символ μ обозначает объект, относящийся к (P, Q) , то $\tilde{\mu}$ будет обозначать аналогичный объект, относящийся к (\tilde{P}, \tilde{Q}) .

Теорема 1. Если $\Lambda_j = \tilde{\Lambda}_j$, $j = \overline{0, p}$, $\Lambda_{\nu_1, \dots, \nu_{\gamma}} = \tilde{\Lambda}_{\nu_1, \dots, \nu_{\gamma}}$, $\gamma = \overline{2, N}$, $1 \leq \nu_1 < \dots < \nu_{\gamma} \leq p$, $\nu_j \in \xi$, и $\Omega = \tilde{\Omega}$, то $Q = \tilde{Q}$, $P = \tilde{P}$ на графе G .

Эта теорема будет доказана в параграфе 2. Кроме того, мы дадим там конструктивную процедуру решения обратной задачи 1. В параграфе 1 вводятся основные понятия и доказываются вспомогательные утверждения.

1. СВОЙСТВА СПЕКТРАЛЬНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК

Пусть $S_j(x_j, \rho)$, $C_j(x_j, \rho)$, $j = \overline{1, r+N}$, $x_j \in [0, d_j]$ — решения уравнения (1) на ребре e_j при начальных условиях $S_j(0, \rho) = C'_j(0, \rho) = 0$, $S'_j(0, \rho) = C_j(0, \rho) = 1$.



При каждом фиксированном $x_j \in [0, d_j]$ функции $S_j^{(\nu)}(x_j, \rho)$, $C_j^{(\nu)}(x_j, \rho)$, $j = \overline{1, r + N}$, $\nu = 0, 1$, являются целыми по ρ экспоненциального типа. Кроме того, $\langle C_j(x_j, \rho), S_j(x_j, \rho) \rangle \equiv 1$, где $\langle y, z \rangle := yz' - y'z$ — вронсиан функций y и z . Зафиксируем $k = \overline{p + 1, r}$. Обозначим $Q_k := \{z \in T : v_k < z\}$, $G_k := G \setminus Q_k$. Тогда

$$Q_k = \bigcup_{e_i \in R(v_k)} T_{ki},$$

где T_{ki} — дерево с корнем v_k и с корневым ребром e_i .

Обозначения. Если $D \subset G$ — граф, то через $B_0(D)$ обозначим краевую задачу для уравнения (1) на D со стандартными условиями склейки во внутренних вершинах и с краевыми условиями Дирихле в граничных вершинах. Пусть $\{Y\}_D := \{y_j\}_{e_j \in D}$. Если v_j — граничная вершина для D , то через $B_j(D)$ обозначим краевую задачу для уравнения (1) на D со стандартными условиями склейки во внутренних вершинах, с условием Неймана $Y'_{|v_j} = 0$ в вершине v_j и с краевыми условиями Дирихле в остальных граничных вершинах. Например, $B_0(G_k)$ — краевая задача на G_k с краевыми условиями $y_k(0) = 0$, $y_m(0) = 0$, $e_m \in E \cap G_k$, а $B_k(G_k)$ — краевая задача на G_k с краевыми условиями $y'_k(0) = 0$, $y_m(0) = 0$, $e_m \in (E \cap G_k) \setminus e_k$. Рассмотрим также краевую задачу $B^1(T_j)$ для уравнения (1) на $T_j \in R_i$ с краевыми условиями $Y'_{|u_i} = 0$, $Y_{|v_j} = 0$, $j = \Gamma \cap T_j$.

Зафиксируем граничную вершину $v_k \in \Gamma$. Пусть $\Phi_k = \{\Phi_{kj}\}_{j=\overline{1, r+N}}$ — решение уравнения (1) на G , удовлетворяющее условиям склейки (2), (3) и краевым условиям

$$\Phi_{kj}(0, \rho) = \delta_{kj}, \quad j = \overline{1, p}, \tag{5}$$

где δ_{kj} — символ Кронекера. Положим $M_k(\rho) := \Phi'_{kk}(0, \rho)$, $k = \overline{1, p}$. Функция $M_k(\rho, G) := M_k(\rho)$ называется функцией Вейля относительно граничной вершины v_k .

Обозначим $M_{kj}^0(\rho) = \Phi'_{kj}(0, \rho)$, $M_{kj}^1(\rho) = \Phi_{kj}(0, \rho)$, $j = \overline{1, r + N}$. Тогда

$$\Phi_{kj}(x_j, \rho) = M_{kj}^1(\rho)C_j(x_j, \rho) + M_{kj}^0(\rho)S_j(x_j, \rho), \quad j = \overline{1, r + N}. \tag{6}$$

В частности, $M_{kk}^0(\rho) = M_k(\rho, G)$, $M_{kk}^1(\rho) = 1$, $M_{kj}^1(\rho) = 0$ при $j = \overline{1, p} \setminus k$. Имеем

$$\Phi_{kk}(x_k, \rho) = C_k(x_k, \rho) + M_k(\rho, G)S_k(x_k, \rho) \tag{7}$$

и, следовательно,

$$\langle \Phi_{kk}(x_k, \rho), S_k(x_k, \rho) \rangle \equiv 1. \tag{8}$$

Подставляя (6) в (2), (3) и (5), получаем линейную алгебраическую систему D_k относительно $M_{kj}^0(\rho)$, $M_{kj}^1(\rho)$, $j = \overline{1, r + N}$. Определитель $\Delta_0(\rho, G)$ этой системы не зависит от k и имеет вид

$$\Delta_0(\rho, G) = \sigma(\rho) \left(a(\rho) + \sum_{k=1}^N \sum_{1 \leq \mu_1 < \dots < \mu_k \leq N} a_{\mu_1 \dots \mu_k}(\rho) \eta_{\mu_1}(\rho) \dots \eta_{\mu_k}(\rho) \right), \tag{9}$$

где

$$\sigma(\rho) = \prod_{k=1}^m \Delta_0(\rho, T_k), \quad \eta_i(\rho) = \sum_{j=s_{i-1}+1}^{s_i} \frac{\Delta^1(\rho, T_j)}{\Delta_0(\rho, T_j)}, \tag{10}$$



$$a(\rho) := C(d_0, \rho) + S'(d_0, \rho) - 2, \quad a_1(\rho) := h(\rho) = S(d_0, \rho), \quad (11)$$

а $\Delta_0(\rho, T_j)$, $\Delta^1(\rho, T_j)$ — характеристические функции краевых задач $B_0(T_j)$, $B^1(T_j)$ соответственно. Нам не нужны конкретные формулы для других коэффициентов $a_{\mu_1 \dots \mu_k}(\rho)$. Функция $\Delta_0(\rho, G)$ является целой по ρ экспоненциального типа, и ее нули (с учетом кратностей) совпадают с собственными значениями краевой задачи $B_0(G)$. Функция $\Delta_0(\rho, G)$ называется характеристической функцией для $B_0(G)$. Пусть $\Delta_{\nu_1, \dots, \nu_\gamma}(\rho, G)$, $\gamma = \overline{1, p}$, $1 \leq \nu_1 < \dots < \nu_\gamma \leq p$ — функция, получающаяся из $\Delta_0(\rho, G)$ заменой $S_j^{(\nu)}(d_j, \rho)$ на $C_j^{(\nu)}(d_j, \rho)$ для $j = \nu_1, \dots, \nu_\gamma$, $\nu = 0, 1$. Функция $\Delta_{\nu_1, \dots, \nu_\gamma}(\rho, G)$ является целой по ρ экспоненциального типа, и ее нули совпадают с собственными значениями краевой задачи $B_{\nu_1, \dots, \nu_\gamma}(G)$. Функция $\Delta_{\nu_1, \dots, \nu_\gamma}(\rho, G)$ называется характеристической функцией для $B_{\nu_1, \dots, \nu_\gamma}(G)$. Имеем

$$\begin{aligned} \Delta_{\nu_1, \dots, \nu_\gamma}(\rho, G) = & \sigma_{(\nu_1, \dots, \nu_\gamma)}(\rho) \left(a(\rho) + \right. \\ & \left. + \sum_{k=1}^N \sum_{1 \leq \mu_1 < \dots < \mu_k \leq N} a_{\mu_1 \dots \mu_k}(\rho) \eta_{\mu_1, (\nu_1, \dots, \nu_\gamma)}(\rho) \dots \eta_{\mu_k, (\nu_1, \dots, \nu_\gamma)}(\rho) \right), \end{aligned} \quad (12)$$

где функции $\sigma_{(\nu_1, \dots, \nu_\gamma)}(\rho)$ и $\eta_{i, (\nu_1, \dots, \nu_\gamma)}(\rho)$ получаются из $\sigma(\rho)$ и $\eta_i(\rho)$ заменой $S_j^{(\nu)}(d_j, \rho)$ на $C_j^{(\nu)}(d_j, \rho)$ для $j = \nu_1, \dots, \nu_\gamma$, $\nu = 0, 1$.

Решая алгебраическую систему D_k , получаем $M_{kj}^s(\rho) = \Delta_{kj}^s(\rho, G) / \Delta_0(\rho, G)$, $s = 0, 1$, $j = \overline{1, r + N}$, где определитель $\Delta_{kj}^s(\rho, G)$ получается из $\Delta_0(\rho, G)$ заменой столбца, соответствующего $M_{kj}^s(\rho)$, на столбец свободных членов. В частности,

$$M_k(\rho, G) = -\Delta_k(\rho, G) / \Delta_0(\rho, G), \quad k = \overline{1, p}. \quad (13)$$

Из (13) вытекает, что функции Вейля $M_k(\rho, G)$ являются мероморфными по ρ с множеством полюсов Λ_0 множеством нулей Λ_k .

Зафиксируем $k = \overline{p + 1, r}$. Пусть $\Delta_0(\rho, G_k)$ и $\Delta_k(\rho, G_k)$ — характеристические функции задач $B_0(G_k)$ и $B_k(G_k)$ соответственно. Используя (9)–(11), вычисляем

$$\Delta_0(\rho, G) = \Delta_0(\rho, Q_k) \Delta_0(\rho, G_k) + \left(\prod_{e_i \in R(v_k)} \Delta_0(\rho, T_{ki}) \right) \Delta_k(\rho, G_k), \quad (14)$$

где $\Delta_0(\rho, Q_k)$ и $\Delta_0(\rho, T_{ki})$ — характеристические функции для $B_0(Q_k)$ и $B_0(T_{ki})$ соответственно. Аналогично для $e_j \in E \cap T_{ks}$ имеем

$$\Delta_j(\rho, G) = \Delta_j(\rho, Q_k) \Delta_0(\rho, G_k) + \left(\Delta_j(\rho, T_{ks}) \prod_{e_i \in R(v_k), i \neq s} \Delta_0(\rho, T_{ki}) \right) \Delta_k(\rho, G_k), \quad (15)$$

где $\Delta_j(\rho, Q_k)$ и $\Delta_j(\rho, T_{ki})$ строятся из $\Delta_0(\rho, Q_k)$ и $\Delta_0(\rho, T_{ki})$ заменой $S_j^{(\nu)}(d_j, \rho)$, $\nu = 0, 1$ на $C_j^{(\nu)}(d_j, \rho)$. Обозначим

$$\mathcal{E}_k(x_k) = \frac{1}{2} \int_0^{x_k} p_k(t) dt, \quad \theta_k = \frac{1}{2d_k} \int_0^{d_k} p_k(t) dt, \quad E^\pm(\rho) = \prod_{j=1}^{r+N} \exp(\mp i(\rho + \theta_j)d_j),$$



$$d := \sum_{j=1}^{r+N} \theta_j d_j = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{r+N} \int_0^{d_j} p_j(t) dt, \quad \tau = \text{Im } \rho,$$

$$\Pi^\pm = \{\rho : \pm \tau \geq 0\}, \quad \Pi_\delta^+ = \{\rho : \arg \rho \in [\delta, \pi - \delta]\}, \quad \Pi_\delta^- = \{\rho : \arg \rho \in [\pi + \delta, 2\pi - \delta]\}.$$

Без ограничения общности считаем, что $d = 0$. При каждом $x_k \in [0, d_k)$ имеем

$$\Phi_{kk}^{(\nu)}(x_k, \rho) = (\pm i\rho)^\nu \exp(\pm i(\rho x_k + \mathcal{E}_k(x_k)))[1], \quad \rho \in \Pi_\delta^\pm, \quad |\rho| \rightarrow \infty. \quad (16)$$

В частности,

$$M_k(\rho) = (\pm i\rho)[1], \quad \rho \in \Pi_\delta^\pm, \quad |\rho| \rightarrow \infty. \quad (17)$$

Кроме того, при $|\rho| \rightarrow \infty$, $k = \overline{1, r+N}$, равномерно по $x_k \in [0, d_k]$,

$$S_k^{(\nu)}(x_k, \rho) = \frac{1}{2(-i\rho)^{1-\nu}} \exp(-i(\rho x_k + \mathcal{E}_k(x_k)))[1] + \frac{1}{2(i\rho)^{1-\nu}} \exp(i(\rho x_k + \mathcal{E}_k(x_k)))[1]. \quad (18)$$

Аналогично получаем при $\rho \in \Pi_\delta^\pm$, $|\rho| \rightarrow \infty$:

$$\Delta_0(\rho, G) = \Delta_0^\pm \rho^{-p} E^\pm(\rho)[1], \quad \Delta_0^\pm \neq 0, \quad (19)$$

$$\Delta_k(\rho, G) = (\mp i\rho) \Delta_0^\pm \rho^{-p} E^\pm(\rho)[1], \quad k = \overline{1, p}, \quad (20)$$

$$\Delta_{\nu_1, \dots, \nu_\gamma}(\rho, G) = (\mp i\rho)^\gamma \Delta_0^\pm \rho^{-p} E^\pm(\rho)[1], \quad \gamma = \overline{1, N}, \quad 1 \leq \nu_1 < \dots < \nu_\gamma \leq p. \quad (21)$$

2. РЕШЕНИЕ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ 1

В этом параграфе мы опишем конструктивную процедуру решения обратной задачи 1 и докажем его единственность. Сначала рассмотрим вспомогательные обратные задачи. Фиксируем граничную вершину $v_k \in \Gamma$, $k = \overline{1, p}$, и рассмотрим следующую обратную задачу на ребре e_k , которую будем обозначать $\text{IP}(k)$.

IP(k). Дана $M_k(\rho, G)$, построить $q_k(x_k)$, $p_k(x_k)$, $x_k \in [0, d_k]$.

Теорема 2. Если $M_k(\rho, G) = \tilde{M}_k(\rho, G)$, то $p_k(x_k) = \tilde{p}_k(x_k)$ и $q_k(x_k) = \tilde{q}_k(x_k)$ п.в. на $[0, d_k]$. Таким образом, задание функции Вейля M_k однозначно определяет потенциалы p_k и q_k на ребре e_k .

Доказательство. Введем функции

$$P_{1s}^k(x_k, \rho) = (-1)^s \left(\Phi_{kk}(x_k, \rho) \tilde{S}_k^{(2-s)}(x_k, \rho) - \tilde{\Phi}_{kk}^{(2-s)}(x_k, \rho) S_k(x_k, \rho) \right), \quad s = 1, 2. \quad (22)$$

Из (8) выводим

$$S_k(x_k, \rho) = P_{11}^k(x_k, \rho) \tilde{S}_k(x_k, \rho) + P_{12}^k(x_k, \rho) \tilde{S}_k'(x_k, \rho). \quad (23)$$

Обозначим $\Omega_k(x_k) = \cos \hat{\mathcal{E}}_k(x_k)$, где $\hat{\mathcal{E}}_k(x_k) = \mathcal{E}_k(x_k) - \tilde{\mathcal{E}}_k(x_k)$. Учтывая (16), (18) и (22), получаем

$$P_{1s}^k(x_k, \rho) = \delta_{1s} \Omega_k(x_k) + O(\rho^{-1}), \quad \rho \in \Pi_\delta^\pm, \quad |\rho| \rightarrow \infty, \quad x_k \in (0, d_k), \quad s = 1, 2. \quad (24)$$



Используя (22) и (7), получаем, что при каждом фиксированном x_k функции $P_{1s}^k(x_k, \rho)$ являются целыми по ρ экспоненциального типа. Вместе с (24) это дает $P_{11}^k(x_k, \rho) \equiv \Omega_k(x_k)$, $P_{12}^k(x_k, \rho) \equiv 0$. Подставляя эти соотношения в (22) и (23), находим

$$(\tilde{S}_k(x_k, \rho))^{-1} S_k(x_k, \rho) = (\tilde{\Phi}_{kk}(x_k, \rho))^{-1} \Phi_{kk}(x_k, \rho), \quad (25)$$

при всех x_k и ρ . Используя (16) и (18), получаем при $|\rho| \rightarrow \infty$, $\rho \in \Pi_\delta^\pm$,

$$(\tilde{S}_k(x_k, \rho))^{-1} S_k(x_k, \rho) = \exp(\mp \hat{\mathcal{E}}_k(x_k))[1], \quad (\tilde{\Phi}_{kk}(x_k, \rho))^{-1} \Phi_{kk}(x_k, \rho) = \exp(\pm \hat{\mathcal{E}}_k(x_k))[1].$$

Отсюда и из (25) выводим $\exp(2\hat{\mathcal{E}}_k(x_k)) \equiv 1$. Так как $\hat{\mathcal{E}}_k(0) = 0$, то $\hat{\mathcal{E}}_k(x_k) \equiv 0$, т.е. $P_{11}(x_k, \rho) \equiv 1$, $S_k(x_k, \rho) \equiv \tilde{S}_k(x_k, \rho)$, $\Phi_{kk}(x_k, \rho) \equiv \tilde{\Phi}_{kk}(x_k, \rho)$ и, следовательно, $q_k(x_k) = \tilde{q}_k(x_k)$, $p_k(x_k) = \tilde{p}_k(x_k)$ на $[0, d_k]$. \square

Используя метод спектральных отображений [1] для оператора Штурма–Лиувилля на ребре e_k , получаем конструктивную процедуру решения обратной задачи IP(k).

Лемма 1. Фиксируем $k = \overline{1, p}$. Задание двух спектров Λ_0 и Λ_k однозначно определяет функцию Вейля $M_k(\rho, G)$.

Доказательство. Характеристические функции $\Delta_k(\rho, G)$, $k = \overline{0, p}$, являются целыми по ρ экспоненциального типа. По теореме Адамара

$$\Delta_k(\rho, G) = B_k \exp(A_k \rho) \Delta_k^*(\rho, G), \quad k = \overline{0, p}, \quad (26)$$

$$\Delta_k^*(\rho, G) = \rho^{\xi_k} \prod_{n \in \Lambda'_k} \left(1 - \frac{\rho}{\rho_{nk}}\right) \exp(\rho/\rho_{nk}), \quad k = \overline{0, p}, \quad (27)$$

$\Lambda'_k = \{n : \rho_{nk} \neq 0\}$, и $\xi_k \geq 0$ — кратность нулевого собственного значения. В силу (13) и (26) заключаем

$$M_k(\rho, G) = -b_k \exp(a_k \rho) \frac{\Delta_k^*(\rho, G)}{\Delta_0^*(\rho, G)}, \quad k = \overline{1, p}, \quad (28)$$

где $b_k = B_k/B_0$, $a_k = A_k - A_0$. Используя (17), вычисляем

$$a_k = \lim_{|\rho| \rightarrow \infty} \frac{1}{\rho} \ln \left(\frac{\Delta_0^*(\rho, G)}{\Delta_k^*(\rho, G)} \right), \quad \rho \in \Pi_\delta^\pm, \quad k = \overline{1, p}, \quad (29)$$

$$b_k = \lim_{|\rho| \rightarrow \infty} \frac{(\mp i \rho) \Delta_0^*(\rho, G) \exp(-a_k \rho)}{\Delta_k^*(\rho, G)}, \quad \rho \in \Pi_\delta^\pm, \quad k = \overline{1, p}. \quad (30)$$

Итак, мы однозначно построили $M_k(\rho, G)$ по формулам (27)–(30). \square

Теперь рассмотрим вспомогательную обратную задачу IP(0) на цикле e_0 .

IP(0). Даны $a(\rho)$, $h(\rho)$ и Ω , построить $p_0(x)$, $q_0(x)$, $x \in [0, d_0]$.

Эта задача является классической периодической обратной задачей на интервале $[0, d_0]$; она была решена в [15], где доказана единственность решения и получен алгоритм построения решения задачи IP(0).

Зафиксируем $k = \overline{0, p}$. Пусть задан спектр Λ_k краевой задачи $L_k(G)$. Тогда мы можем построить характеристическую функцию $\Delta_k(\rho, G)$ следующим образом.



Используя (26), (27) и асимптотику (19), (20), получаем при $\rho \in \Pi_\delta^\pm$, $|\rho| \rightarrow \infty$:

$$B_0 \exp(A_0 \rho) \Delta_0^*(\rho, G) = \Delta_0^\pm \rho^{-p} E^\pm(\rho)[1],$$

$$B_k \exp(A_k \rho) \Delta_k^*(\rho, G) = (\mp i \rho) \rho^{-p} \Delta_0^\pm E^\pm(\rho)[1], \quad k = \overline{1, p}$$

и, следовательно,

$$A_k = -\kappa_k^\pm \mp i \sum_{j=1}^{r+N} d_j, \quad k = \overline{0, p}, \quad \kappa_k^\pm := \lim_{|\rho| \rightarrow \infty} \frac{\ln \Delta_k^*(\rho, G)}{\rho}, \quad \rho \in \Pi_\delta^\pm. \quad (31)$$

Далее,

$$B_k = \Delta_0^\pm \sigma_k^\pm, \quad k = \overline{0, p}, \quad (32)$$

$$\sigma_0^\pm = \lim_{|\rho| \rightarrow \infty} \frac{\exp(\kappa_0^\pm \rho)}{\rho^p \Delta_0^*(\rho, G)}, \quad \sigma_k^\pm = \lim_{|\rho| \rightarrow \infty} \frac{(\mp i \rho) \exp(\kappa_k^\pm \rho)}{\rho^p \Delta_k^*(\rho, G)}, \quad k = \overline{1, p}.$$

Аналогично, используя (21), получаем

$$\Delta_{\nu_1, \dots, \nu_\gamma}(\rho, G) = B_{\nu_1, \dots, \nu_\gamma} \exp(A_{\nu_1, \dots, \nu_\gamma} \rho) \Delta_{\nu_1, \dots, \nu_\gamma}^*(\rho, G), \quad \gamma = \overline{1, p}, \quad 1 \leq \nu_1 < \dots < \nu_\gamma \leq p, \quad (33)$$

$$\Delta_{\nu_1, \dots, \nu_\gamma}^*(\rho, G) = \rho^{\xi_{\nu_1, \dots, \nu_\gamma}} \prod_{n \in \Lambda_{\nu_1, \dots, \nu_\gamma}} \left(1 - \frac{\rho}{\rho_{n, \nu_1, \dots, \nu_\gamma}} \right) \exp(\rho / \rho_{n, \nu_1, \dots, \nu_\gamma}), \quad (34)$$

$$A_{\nu_1, \dots, \nu_\gamma} = -\kappa_{\nu_1, \dots, \nu_\gamma}^\pm \mp i \sum_{j=1}^{r+N} d_j, \quad \kappa_{\nu_1, \dots, \nu_\gamma}^\pm := \lim_{|\rho| \rightarrow \infty} \frac{\ln \Delta_{\nu_1, \dots, \nu_\gamma}^*(\rho, G)}{\rho}, \quad \rho \in \Pi_\delta^\pm, \quad (35)$$

$$B_{\nu_1, \dots, \nu_\gamma} = \Delta_0^\pm \sigma_{\nu_1, \dots, \nu_\gamma}^\pm, \quad \sigma_{\nu_1, \dots, \nu_\gamma}^\pm = \lim_{|\rho| \rightarrow \infty} \frac{(\mp i \rho)^\gamma \exp(\kappa_{\nu_1, \dots, \nu_\gamma}^\pm \rho)}{\rho^p \Delta_{\nu_1, \dots, \nu_\gamma}^*(\rho, G)}, \quad (36)$$

$\Lambda_{\nu_1, \dots, \nu_\gamma}' = \{n : \rho_{n, \nu_1, \dots, \nu_\gamma} \neq 0\}$, и $\xi_{\nu_1, \dots, \nu_\gamma} \geq 0$ — кратность нулевого собственного значения.

Теперь мы готовы описать конструктивную процедуру решения обратной задачи 1 и доказать его единственность. Пусть даны Λ_j , $j = \overline{0, p}$, $\Lambda_{\nu_1, \dots, \nu_\gamma}$, $\gamma = \overline{2, N}$, $1 \leq \nu_1 < \dots < \nu_\gamma \leq p$, $\nu_j \in \xi$, и Ω . Процедура построения решения обратной задачи 1 состоит в реализации так называемых D_μ -процедур последовательно для $\mu = \sigma, \sigma - 1, \dots, 1, 0$, где σ — высота T . Опишем D_μ -процедуры.

D_σ -процедура

1. При каждом $k = \overline{1, p}$ строим функцию Вейля $M_k(\rho, G)$, используя (27)–(30).
2. При каждом фиксированном $k = \overline{1, p}$ решаем обратную задачу IP(k) и находим потенциалы $p_k(x_k)$, $q_k(x_k)$, $x_k \in [0, d_k]$, на ребре e_k .
3. При каждом фиксированном $k = \overline{1, p}$ вычисляем $C_k^{(\nu)}(d_k, \rho)$, $S_k^{(\nu)}(d_k, \rho)$, $\nu = 0, 1$.
4. Строим $\Delta_0(\rho, G)$ и $\Delta_{\nu_1, \dots, \nu_\gamma}(\rho, G)$, $\gamma = \overline{1, N}$, $1 \leq \nu_1 < \dots < \nu_\gamma \leq p$, $\nu_j \in \xi$, используя (26), (27) и (31)–(36).
5. Для каждой вершины $v_k \in V^{(\sigma-1)} \setminus \Gamma$ выбираем и фиксируем s и j так, что $e_j \in E \cap T_{ks}$. Решая линейную алгебраическую систему (14), (15), находим $\Delta_0(\rho, G_k)$ и $\Delta_k(\rho, G_k)$.



6. Для каждой $v_k \in V^{(\sigma-1)} \setminus \Gamma$ строим функцию Вейля $M_k(\rho, G_k)$ для G_k по формуле

$$M_k(\rho, G_k) = -\Delta_k(\rho, G_k)/\Delta_0(\rho, G_k). \quad (37)$$

Выполним теперь D_μ -процедуры последовательно при $\mu = \overline{2, \sigma - 1}$ по индукции. Фиксируем $\mu = \overline{2, \sigma - 1}$ и предположим, что $D_\sigma, \dots, D_{\mu+1}$ -процедуры уже выполнены. Выполним D_μ -процедуру.

D_μ -процедура

1. При каждом фиксированном $e_k \in \mathcal{E}^{(\mu)}$ решаем обратную задачу IP(k) на G_k и находим потенциалы $p_k(x_k), q_k(x_k), x_k \in [0, d_k]$, на ребре e_k .

2. Для каждого $e_k \in \mathcal{E}^{(\mu)}$ вычисляем $C_k^{(\nu)}(d_k, \rho), S_k^{(\nu)}(d_k, \rho), \nu = 0, 1$.

3. Для каждой вершины $v_k \in V^{(\mu-1)} \setminus \Gamma$ выбираем и фиксируем s и j так, что $e_j \in E \cap T_{ks}$. Решая линейную алгебраическую систему (14), (15), находим $\Delta_0(\rho, G_k)$ и $\Delta_k(\rho, G_k)$.

4. Для каждой вершины $v_k \in V^{(\mu-1)} \setminus \Gamma$ вычисляем $M_k(\rho, G_k)$ для G_k по формуле (37).

D_1 -процедура

1. Для каждого ребра $e_k \in \mathcal{E}^{(1)}$ решаем обратную задачу IP(k) на G_k и находим потенциалы $p_k(x_k), q_k(x_k), x_k \in [0, d_k]$ на ребре e_k .

2. Для каждого $e_k \in \mathcal{E}^{(1)}$ вычисляем $C_k^{(\nu)}(d_k, \rho), S_k^{(\nu)}(d_k, \rho), \nu = 0, 1$.

3. Строим $a(\rho)$ и $a_1(\rho)$, используя (9) и (12).

D_0 -процедура

По $a(\rho), h(\rho), \Omega$ строим $q_0(x), p_0(x), x \in [0, d_0]$ на e_0 , решая задачу IP(0).

Таким образом, выполняя последовательно $D_\sigma, D_{\sigma-1}, \dots, D_0$ -процедуры, мы получили решение обратной задачи 1 и доказали его единственность.

Благодарности. Работа выполнена при поддержке Минобрнауки РФ (проект № 1.1660.2017/ПЧ) и РФФИ (проекты № 16-01-00015, 17-51-53180).

Библиографический список

1. Yurko V. A. Method of Spectral Mappings in the Inverse Problem Theory. Inverse and Ill-posed Problems Series. Utrecht : VSP, 2002. 316 p.
2. Marchenko V. A. Sturm – Liouville Operators and Applications. Basel ; Switzerland : Birkhäuser Verlag, 1986. 393 p.
3. Levitan B. M. Inverse Sturm – Liouville problems. Utrecht : VNU Science Press, 1987. 246 p.
4. Freiling G., Yurko V. A. Inverse Sturm – Liouville Problems and their Applications. N. Y. : Nova Science Publ., 2001. 305 p.
5. Beals R., Deift P., Tomei C. Direct and Inverse Scattering on the Line // Math. Surveys and Monographs. Vol. 28. Providence, RI : Amer. Math. Soc., 1988. 209 p.
6. Belishev M. I. Boundary spectral Inverse Problem on a class of graphs (trees) by the BC method // Inverse Problems. 2004. Vol. 20, № 3. P. 647–672.
7. Yurko V. A. Inverse spectral problems for Sturm – Liouville operators on graphs // Inverse Problems. 2005. Vol. 21, № 3. P. 1075–1086.
8. Brown B. M., Weikard R. A Borg – Levinson theorem for trees // Proc. Royal Soc. Ser. A : Math. Phys. Eng. Sci. 2005. Vol. 461, № 2062. P. 3231–3243. DOI: 10.1098/rspa.2005.1513.



9. Yang C.-Fu, Yang X.-P. Uniqueness theorems from partial information of the potential on a graph // J. Inverse and Ill-Posed Problems. 2011. Vol. 19, № 4–5. P. 631–639. DOI: 10.1515/jiip.2011.059.
10. Bondarenko N. P. Inverse problems for the differential operator on the graph with a cycle with different orders on different edges // Tamkang J. Math. 2015. Vol. 46, № 3. P. 229–243. DOI: 10.5556/j.tkjm.46.2015.1694.
11. Ignatyev M. Yu., Freiling G. Spectral analysis for the Sturm – Liouville operator on sun-type graphs // Inverse Problems. 2011. Vol. 27, № 9, 095003. 17 p.
12. Ignatyev M. Yu. Inverse scattering problem for Sturm – Liouville operator on one-vertex noncompact graph with a cycle // Tamkang J. Math. 2011. Vol. 42, № 3. P. 365–384. DOI: 10.5556/j.tkjm.42.2011.913.
13. Buterin S. A., Freiling G. Inverse spectral-scattering problem for the Sturm – Liouville operator on a noncompact star-type graph // Tamkang J. Math. 2013. Vol. 44, № 3. P. 327–349. DOI: 10.5556/j.tkjm.44.2013.1422.
14. Yurko V. A. Inverse problems for non-selfadjoint quasi-periodic differential pencils // Anal. Math. Phys. 2012. Vol. 2, № 3. P. 215–230. DOI: 10.1007/s13324-012-0030-9.
15. Марченко В. А., Островский И. В. Характеристика спектра оператора Хилла // Матем. сб. 1975. Т. 97(139), № 4(8). С. 540–606.

Образец для цитирования:

Юрко В. А. О восстановлении дифференциальных пучков на графе-кусте // Изв. Саратов. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2017. Т. 17, вып. 1. С. 51–61. DOI: 10.18500/1816-9791-2017-17-1-51-61.

On Recovering Differential Pencils on a Bush-type Graph

V. A. Yurko

Vjacheslav A. Yurko, Saratov State University, 83, Astrakhanskaya str., 410012, Saratov, Russia, Yurko-VA@info.sgu.ru

We study the inverse problem of spectral analysis for differential pencils on a bush-type graph, which is an arbitrary compact graph with one cycle. We pay the main attention to the most important nonlinear inverse problem of recovering coefficients of differential equations provided that the structure of the graph is known a priori. We use the standard matching conditions in the interior vertices and Dirichlet and Neumann boundary conditions in the boundary vertices. For this class of pencils properties of spectral characteristics are established, a constructive procedure is obtained for the solution of the inverse problem of recovering coefficients of differential operators from spectra, and the uniqueness of the solution is proved. For solving this inverse problem we use the method of spectral mappings, which allows one to construct the potential on each fixed edge. For transition to the next edge we use a special representation of the characteristic functions.

Key words: differential pencils, geometrical graph, inverse spectral problems.

Acknowledgements: This work was supported by the Ministry of Education and Science of Russian Federation (project no. 1.1660.2017/PCh) and by the Russian Foundation for Basic Research (projects no. 16-01-00015, no. 17-51-53180).



References

1. Yurko V. A. *Method of Spectral Mappings in the Inverse Problem Theory*. Inverse and Ill-posed Problems Series. Utrecht, VSP, 2002. 316 p.
2. Marchenko V. A. *Sturm–Liouville Operators and Applications*. Basel, Switzerland, Birkhäuser Verlag, 1986. 393 p.
3. Levitan B. M. *Inverse Sturm–Liouville problems*. Utrecht, VNU Science Press, 1987. 246 p.
4. Freiling G., Yurko V. A. *Inverse Sturm–Liouville Problems and their Applications*. New York, Nova Science Publ., 2001. 305 p.
5. Beals R., Deift P., Tomei C. *Direct and Inverse Scattering on the Line*. Math. Surveys and Monographs, vol. 28. Providence, RI, Amer. Math. Soc., 1988. 209 p.
6. Belishev M. I. Boundary spectral Inverse Problem on a class of graphs (trees) by the BC method. *Inverse Problems*, 2004, vol. 20, no. 3, pp. 647–672.
7. Yurko V. A. Inverse spectral problems for Sturm–Liouville operators on graphs. *Inverse Problems*, 2005, vol. 21, no. 3, pp. 1075–1086.
8. Brown B. M., Weikard R. A Borg–Levinson theorem for trees. *Proc. Royal Soc. Ser. A : Math. Phys. Eng. Sci.*, 2005, vol. 461, no. 2062, pp. 3231–3243. DOI: 10.1098/rspa.2005.1513.
9. Yang C-Fu, Yang X-P. Uniqueness theorems from partial information of the potential on a graph. *J. Inverse and Ill-Posed Problems*, 2011, vol. 19, no. 4–5, pp. 631–639. DOI: 10.1515/jiip.2011.059.
10. Bondarenko N. P. Inverse problems for the differential operator on the graph with a cycle with different orders on different edges. *Tamkang J. Math.*, 2015, vol. 46, no. 3, pp. 229–243. DOI: 10.5556/j.tkjm.46.2015.1694.
11. Ignatyev M. Yu., Freiling G. Spectral analysis for the Sturm–Liouville operator on sun-type graphs. *Inverse Problems*, 2011, vol. 27, no. 9, 095003, 17 p.
12. Ignatyev M. Yu. Inverse scattering problem for Sturm–Liouville operator on one-vertex noncompact graph with a cycle. *Tamkang J. Math.*, 2011, vol. 42, no. 3, pp. 365–384. DOI: 10.5556/j.tkjm.42.2011.913.
13. Buterin S. A., Freiling G. Inverse spectral-scattering problem for the Sturm–Liouville operator on a noncompact star-type graph. *Tamkang J. Math.*, 2013, vol. 44, no. 3, pp. 327–349. DOI: 10.5556/j.tkjm.44.2013.1422.
14. Yurko V. A. Inverse problems for non-selfadjoint quasi-periodic differential pencils. *Anal. Math. Phys.*, 2012, vol. 2, no. 3, pp. 215–230. DOI: 10.1007/s13324-012-0030-9.
15. Marchenko V. A., Ostrovskii I. V. A characterization of the spectrum of the Hill operator. *Math. USSR-Sb.*, 1975, vol. 26, iss. 4, pp. 493–554. DOI: 10.1070/SM1975v026n04ABEH002493.

Cite this article as:

Yurko V. A. On Recovering Differential Pencils on a Bush-type Graph. *Izv. Saratov Univ. (N. S.), Ser. Math. Mech. Inform.*, 2017, vol. 17, iss. 1, pp. 51–61 (in Russian). DOI: 10.18500/1816-9791-2017-17-1-51-61.

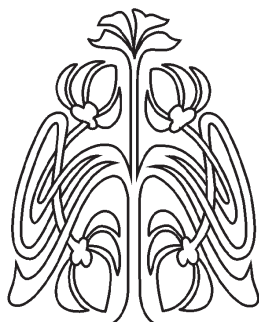


МЕХАНИКА

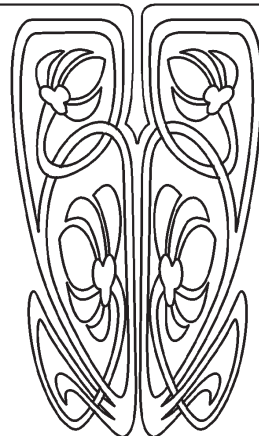
УДК 517.958:53

ТОЧНЫЕ УЕДИНЕННО-ВОЛНОВЫЕ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ БЮРГЕРСА – ХАКСЛИ И БРЕДЛИ – ХАРПЕРА

А. И. Землянухин¹, А. В. Бочкарев²



НАУЧНЫЙ
ОТДЕЛ



¹Землянухин Александр Исаевич, доктор физико-математических наук, заведующий кафедрой прикладной математики и системного анализа, Саратовский государственный технический университет имени Гагарина Ю. А., Россия, 410054, Саратов, Политехническая, 77, zemlyanukhinai@sstu.ru

²Бочкарев Андрей Владимирович, кандидат технических наук, доцент кафедры прикладной математики и системного анализа, Саратовский государственный технический университет имени Гагарина Ю. А., Россия, 410054, Саратов, Политехническая, 77, ab2009sar@list.ru

В статье показано, что точные солитоноподобные решения эволюционных уравнений нелинейной волновой механики можно получать прямым методом возмущений на основе решения линеаризованного уравнения. Сами решения представляют собой суммы рядов метода возмущений, найденные при помощи требования об их геометричности. Указанное требование приводит к условиям для коэффициентов уравнений и параметров искомых решений. Получены точные уединенно-волновые решения нелинейных неинтегрируемых уравнения Бюргерса – Хаксли и обобщенного уравнения Бредли – Харпера. Найдены условия, при которых эти решения имеют форму волнового фронта. Показано, что данные решения также могут быть найдены из систем уравнений Риккати, эквивалентных исходному уравнению. При помощи преобразования Коула – Хопфа обобщенное уравнение Бредли – Харпера сведено к линейному дифференциальному уравнению второго порядка с постоянными коэффициентами.

Ключевые слова: точные уединенно-волновые решения, метод возмущений, уравнение Риккати.

DOI: 10.18500/1816-9791-2017-17-1-62-70

ВВЕДЕНИЕ

Метод возмущений и его вариации [1] широко применяются для приближенного решения нелинейных уравнений, моделирующих, в частности, процессы распростра-



нения волн в деформируемых средах. Тем не менее среди большого количества методов нахождения точных уединенно-волновых решений неинтегрируемых эволюционных уравнений [2] практически ни один не основан на методе возмущений. Это объясняется тем, что солитон как существенно нелинейное явление не может быть получен ни в каком конечном порядке метода возмущений, сводящего исходное нелинейное уравнение к последовательности линеаризованных задач [3]. В первой части статьи на примере уравнения Бюргерса – Хаксли [4] показано, что ряды метода возмущений для неинтегрируемых уравнений при выполнении определенных условий для их коэффициентов могут стать геометрическими, при этом суммы рядов дают точные решения уравнений [5]. Во второй части продемонстрировано, что суммы упомянутых рядов и условия, при которых они становятся геометрическими, могут быть получены из решения пары уравнений Риккати, эквивалентных исходному уравнению. В третьей, четвертой и пятой частях рассмотрено обобщенное пространственно-одномерное уравнение Бредли – Харпера [6, 7]. Построено точное уединенно-волновое решение, установлена связь с парой уравнений Риккати, продемонстрирована возможность его неявной линеаризации на основе преобразования Коула – Хопфа.

1. ТОЧНЫЕ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ БЮРГЕРСА – ХАКСЛИ

Уравнение Бюргерса – Хаксли

$$u_t - u_{xx} - u - u^2 + \alpha u^3 + \beta uu_x = 0 \quad (1)$$

используется для моделирования многих нелинейных волновых явлений, например, процесса движения доменной стенки сегнетоэлектрика в электрическом поле, возмущения среднего уровня поверхности неглубокой жидкости, задач нелинейной акустики и т. п. [4].

В соответствии с методом возмущений будем искать решение уравнения (1) в форме ряда с параметром ε :

$$u = \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon^n u_n(x, t). \quad (2)$$

Подставляя (2) в (1), сгруппируем слагаемые по степеням ε . В первом порядке получим линейное уравнение для функции $u_1(x, t)$, имеющее частное решение $u_1(x, t) = \exp(kx - \omega t)$ при условии $\omega = -k^2 - 1$, являющемся дисперсионным соотношением линеаризованной задачи. Последовательно, решая уравнения в старших порядках, находим выражения для функций $u_n(x, t)$ в виде $u_n(x, t) = K_n u_1^n$. Заменой $z = \varepsilon u_1$ разложение (2) сводится к степенному ряду по z :

$$u = z + \frac{\beta k - 1}{2k^2 - 1} z^2 + \frac{3\beta^2 k^2 + 2\alpha k^2 - 5\beta k - \alpha + 2}{2(2k^2 - 1)(3k^2 - 1)} z^3 + \dots \quad (3)$$

При выполнении условия

$$\alpha = \frac{k(\beta k - 1)(\beta - 2k)}{(2k^2 - 1)^2} \quad (4)$$

ряд (3) становится геометрическим:

$$u = z + \frac{(\beta k - 1) z^2}{2k^2 - 1} + \frac{(\beta k - 1)^2 z^3}{(2k^2 - 1)^2} + \frac{(\beta k - 1)^3 z^4}{(2k^2 - 1)^3} + \dots$$



и имеет сумму

$$u = \frac{z}{1 + \frac{1-\beta k}{2k^2-1}z} = \left(\frac{1}{z} + \frac{1-\beta k}{2k^2-1} \right)^{-1}. \quad (5)$$

Выражение (5) после возвращения к переменным x, t дает точное решение уравнения (1)

$$u = \left(\frac{1}{\varepsilon e^{kx+(k^2+1)t}} + \frac{1-\beta k}{2k^2-1} \right)^{-1}, \quad (6)$$

зависящее от трех произвольных параметров ε, k, β и имеющее форму волнового фронта при $\frac{1-\beta k}{2k^2-1}\varepsilon > 0$.

Заметив, что произвольная постоянная E является решением уравнения (1) при условии $\alpha = \frac{E+1}{E^2}$, будем искать другие решения (1) в окрестности этой постоянной в форме

$$u = E + \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon^n u_n(x, t). \quad (7)$$

Подставляя (7) в (1) и повторяя шаги, описанные выше, получим

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon^n u_n(x, t) = & z + \frac{(E\beta k + 2E + 3)z^2}{E(2k^2 + E + 2)} + \\ & + \frac{(3E^2\beta^2 k^2 + 10E^2\beta k + 15E\beta k + 2Ek^2 + 9E^2 + 2k^2 + 27E + 20)z^3}{2E^2(2k^2 + E + 2)(3k^2 + E + 2)} + \dots \end{aligned} \quad (8)$$

Ряд (8) становится геометрическим при выполнении любого из двух условий:

$$\beta = \frac{2k^2 - E - 1}{Ek}, \quad \beta = \frac{2Ek^2 - E^2 + 2k^2 - 4E - 4}{(E + 2)Ek}.$$

В первом случае сумма ряда (8) равна $\frac{z}{1-z/E}$ и точное решение имеет вид

$$u = \left(-\frac{\varepsilon}{E^2} e^{kx-(k^2+1)t} + \frac{1}{E} \right)^{-1}. \quad (9)$$

Во втором случае сумма ряда равна $\frac{z}{1-(E+1)z/(E^2+2E)}$ и дает точное решение

$$u = E + \left(\frac{1}{\varepsilon} e^{-kx + \frac{k^2 E}{E+2}t} - \frac{E+1}{E(E+2)} \right)^{-1}. \quad (10)$$

Каждое из решений (9), (10) зависит от трех произвольных постоянных ε, k, E и имеет форму волнового фронта при условии $\varepsilon E < 0$ для (9) и $\frac{\varepsilon(E+1)}{E(E+2)} < 0$ — для (10).

2. ПОЛУЧЕНИЕ УРАВНЕНИЙ РИККАТИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ БЮРГЕРСА – ХАКСЛИ

Покажем, что, используя ряд метода возмущений, можно свести уравнение (1) к паре уравнений Риккати. Заменив в разложении (3) z на $\varepsilon \exp(kx - \omega t)$, подставим полученное выражение в уравнение Риккати:

$$u_x = Au^2 + Bu + C. \quad (11)$$



Для того чтобы (11) удовлетворялось тождественно, необходимо выполнение условий

$$A = \frac{(\beta k - 1)k}{2k^2 - 1}, \quad B = k, \quad C = 0, \quad (12)$$

а также равенства (4).

Диссипативное слагаемое u_{xx} в уравнении Бюргерса – Хаксли (1) с учетом (11) принимает вид

$$u_{xx} = 2A^2u^3 + 3ABu^2 + (2AC + B^2)u + BC. \quad (13)$$

Подставляя (11), (12) и (13) в (1), получаем уравнение Риккати вида

$$u_t = \frac{(\beta k - 1)(k^2 + 1)}{2k^2 - 1}u^2 + (k^2 + 1)u. \quad (14)$$

Таким образом, при выполнении (11) уравнение (1) переходит в уравнение (14). Другими словами, уравнение Бюргерса – Хаксли эквивалентно уравнению Риккати (14) при условии (11). Заметим, что в уравнениях Риккати (11), (14) искомая функция u зависит от переменных x и t .

Общее решение уравнения в частных производных (11) с коэффициентами (12) содержит произвольную функцию времени $F(t)$:

$$u = \left(F(t)e^{-kx} + \frac{1 - \beta k}{2k^2 - 1} \right)^{-1}. \quad (15)$$

Подставляя (15) в (14), получаем обыкновенное дифференциальное уравнение для определения $F(t)$:

$$F_t + (k^2 + 1)F = 0,$$

откуда $F = C_0 e^{-(k^2 + 1)t}$, и общее решение уравнения (11) имеет вид (6), если положить $C_0 = 1/\varepsilon$. Можно показать, что решение (9) получается из системы уравнений Риккати вида

$$u_x = \frac{k}{E}u^2 + ku, \quad u_t = -\frac{k^2 + 1}{E}u^2 - (k^2 + 1)u,$$

а решение (10) — из системы

$$u_x = \frac{k(E + 1)}{E(E + 2)}u^2 + ku, \quad u_t = -\frac{k^2(E + 1)}{(E + 2)^2}u^2 - \frac{Ek^2}{E + 2}u.$$

Известно, что уравнение Риккати линеаризуется при помощи преобразования Коула – Хопфа [2], в результате чего получается линейное обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами. В этом смысле эквивалентность неинтегрируемого уравнения Бюргерса – Хаксли паре уравнений Риккати аналогична существованию пар Лакса для интегрируемых уравнений [8].

3. ТОЧНОЕ РЕШЕНИЕ ОБОБЩЕННОГО УРАВНЕНИЯ БРЕДЛИ – ХАРПЕРА

Пространственно-одномерное уравнение Бредли – Харпера, которое часто называют обобщенным уравнением Курамото – Сивашинского, используется при математическом моделировании формирования неоднородного рельефа на поверхности пластинки при воздействии потока ионов [6] и имеет вид

$$u_t = u_x + \alpha u_{xx} + u_{xxx} + \beta u_{xxxx} + \lambda u_x^2 + \mu u_x u_{xx}. \quad (16)$$



Рассмотрим обобщение уравнения (16), содержащее в правой части произвольный полином 5-го порядка по нечетным степеням зависимой переменной

$$u_t = u_x + \alpha u_{xx} + u_{xxx} + \beta u_{xxxx} + \lambda u_x^2 + \mu u_x u_{xx} + a_1 u + a_3 u^3 + a_5 u^5. \quad (17)$$

Подставляя (2) в (17) и группируя по степеням ε , в первом порядке получаем однородное уравнение, имеющее частное решение $u_1(x, t) = \exp(kx - \omega t)$ при условии

$$\omega = -(\beta k^4 + k^3 + \alpha k^2 + a_1 + k). \quad (18)$$

Последовательно решая уравнения, возникающие в старших порядках по ε , находим выражения для функций $u_n(x, t)$ в виде $u_n(x, t) = K_n u_1^n$. Заменой $z = \varepsilon u_1$ разложение (2) сводится к степенному ряду по z :

$$u = z + \frac{k^2(k\mu + \lambda)}{-14\beta k^4 - 6k^3 - 2\alpha k^2 + a_1} z^2 + \frac{6k^6\mu^2 + 10k^5\lambda\mu + (4\lambda^2 - 14a_3\beta)k^4 - 6a_3k^3 - 2a_3\alpha k^2 + a_1a_3}{2(-14\beta k^4 - 6k^3 - 2\alpha k^2 + a_1)(-39\beta k^4 - 12k^3 - 3\alpha k^2 + a_1)} z^3 + \dots \quad (19)$$

При выполнении условий

$$\lambda = -\frac{k\mu}{D}(-10\beta k^4 - 24k^3 - 10\alpha k^2 + 5a_1), \quad (20)$$

$$a_3 = -\frac{8k^6\mu^2}{D^2}(-2\beta k^4 - 2\alpha k^2 + 3a_1), \quad a_5 = \frac{128k^{12}\mu^4}{D^4}(-2\beta k^4 - 2\alpha k^2 + a_1),$$

где $D = 46\beta k^4 - 2\alpha k^2 + a_1$, ряд (19) становится геометрическим

$$u = z - \frac{4k^3\mu}{D} z^2 + \frac{16k^6\mu^2}{D^2} z^3 - \dots$$

и имеет сумму

$$u = \frac{z}{1 + \frac{4k^3\mu}{D} z}. \quad (21)$$

Выражение (21) после возвращения к переменным x, t дает точное решение уравнения (17):

$$u = \left(\frac{1}{\varepsilon} e^{-kx - (\beta k^4 + k^3 + \alpha k^2 + a_1 + k)t} + \frac{4k^3\mu}{D} \right)^{-1}, \quad (22)$$

содержащее шесть произвольных постоянных $\varepsilon, k, \alpha, \beta, a_1, \mu$ и имеющее форму волнового фронта при $\varepsilon k^3 \mu D > 0$.

4. ПОЛУЧЕНИЕ УРАВНЕНИЙ РИККАТИ ДЛЯ ОБОБЩЕННОГО УРАВНЕНИЯ БРЕДЛИ – ХАРПЕРА

Действуя, как и ранее в параграфе 1, заменим в разложении (19) z на $\varepsilon \exp(kx - \omega t)$, где ω определяется равенством (18) и подставим полученное выражение в уравнение Риккати (11). Сгруппировав слагаемые по степеням экспоненциальной функции, потребуем равенства нулю коэффициентов перед ними — получим бесконечную систему уравнений. Из первых трех уравнений системы найдем

$$A = \frac{(k\mu + \lambda) k^3}{-14\beta k^4 - 6k^3 - 2\alpha k^2 + a_1}, \quad B = k, \quad C = 0. \quad (23)$$



Следующие три уравнения приводят к равенствам (20). При выполнении (23) и (20) все последующие уравнения системы удовлетворяются тождественно.

Используя равенство (11), получим выражения для частных производных по x высших порядков:

$$u_{xx} = 2A^2u^3 + 3ABu^2 + (2AC + B^2)u + BC, \quad (24)$$

$$u_{xxx} = 6A^3u^4 + 12A^2Bu^3 + (8A^2C + 7AB^2)u^2 + (8ABC + B^3)u + 2AC^2 + B^2C, \quad (25)$$

$$u_{xxxx} = 24A^4u^5 + 60A^3Bu^4 + (40A^3C + 50A^2B^2)u^3 + (60A^2BC + 15AB^3)u^2 + (16A^2C^2 + 22AB^2C + B^4)u + 8ABC^2 + B^3C, \quad (26)$$

Подставив (11) и (24)–(26) в обобщенное уравнение Бредли – Харпера (17), учтем равенства (23) и (20). В результате получаем уравнение Риккати вида

$$u_t = -\frac{4k^3\mu(\beta k^4 + k^3 + \alpha k^2 + a_1 + k)}{D}u^2 + (\beta k^4 + k^3 + \alpha k^2 + a_1 + k)u. \quad (27)$$

Подставляя λ из (20) в (23), полученные в (11) выражения для постоянных A , B , C , имеем второе уравнение Риккати:

$$u_x = -\frac{4k^4\mu}{D}u^2 + ku. \quad (28)$$

Заметим, что из пропорциональности правых частей (27) и (28) следует

$$u_t = \frac{\beta k^4 + k^3 + \alpha k^2 + a_1 + k}{k}u_x = -\frac{\omega}{k}u_x. \quad (29)$$

Аналогично параграфу 2 можно показать, что решение системы уравнений (28), (29) совпадает с решением (22) уравнения (17) при соответствующем выборе постоянных интегрирования.

5. НЕЯВНАЯ ЛИНЕАРИЗАЦИЯ ОБОБЩЕННОГО УРАВНЕНИЯ БРЕДЛИ – ХАРПЕРА

Известно, что уравнение Риккати (11) при помощи преобразования Коула – Хопфа

$$u = \gamma \frac{\phi_x}{\phi}, \quad (30)$$

в котором $\phi = \phi(x, t)$ — новая зависимая переменная, а γ — постоянная, сводится к линейному уравнению второго порядка с постоянными коэффициентами [4]:

$$\phi_{xx} - B\phi_x + AC\phi = 0, \quad (31)$$

если $\gamma = -1/A$.

Покажем, что точное решение обобщенного уравнения Бредли – Харпера (17) определяется по формуле (30), в которой функция $\phi(x, t)$ является решением линейного уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами (31).

Общее решение уравнения (31), найденное с учетом значений постоянных (23), содержит две произвольные функции $F_1(t)$ и $F_2(t)$:

$$\phi(x, t) = F_1(t) + F_2(t)e^{kx}. \quad (32)$$



Подставим (32) в (30):

$$u = -\frac{F_2(t)e^{kx}(-14\beta k^4 - 6k^3 - 2\alpha k^2 + a_1)}{k^2(k\mu + \lambda)(F_1(t) + F_2(t)e^{kx})}, \quad (33)$$

чтобы затем подставить функцию (33) в уравнение (17) и перенести все слагаемые в левую часть. Учитывая равенства (20), произведем факторизацию левой части, выделим ведущий множитель, содержащий производные функций $F_1(t)$, $F_2(t)$, и приравняем его к нулю:

$$F_1F_2' - F_1'F_2 - (\beta k^4 + k^3 + \alpha k^2 + a_1 + k)F_1F_2 = 0.$$

Разделив последнее уравнение почленно на F_2^2 и обозначив $F(t) = \frac{F_1(t)}{F_2(t)}$, получим дифференциальное уравнение для функции $F(t)$:

$$F' + (\beta k^4 + k^3 + \alpha k^2 + a_1 + k)F = 0,$$

общее решение которого будет иметь вид

$$F = C_0 e^{-(\beta k^4 + k^3 + \alpha k^2 + a_1 + k)t}. \quad (34)$$

Замечая, что после почленного деления на F_2 выражение (33) зависит только от отношения F_1/F_2 , заменим это отношение в (33) на правую часть равенства (34). В результате равенству (33) можно придать вид

$$u = \frac{e^{kx}(46\beta k^4 - 2\alpha k^2 + a_1)}{4k^3\mu(C_0 e^{-(\beta k^4 + k^3 + \alpha k^2 + a_1 + k)t} + e^{kx})}. \quad (35)$$

Выражение (35) содержит шесть произвольных постоянных α , β , μ , k , C_0 , a_1 и является точным решением уравнения (17). После подстановки $C_0 = \frac{46\beta k^4 - 2\alpha k^2 + a_1}{4\epsilon k^3 \mu}$ выражение (35) совпадает с решением (22), найденным выше при помощи метода возмущений.

Благодарности. Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 16-01-00176а).

Библиографический список

1. Коул Дж. Методы возмущений в прикладной математике. М. : Мир, 1972. 276 с.
2. Кудряшов Н. А. Методы нелинейной математической физики. Долгопрудный : Изд. дом «Интеллект», 2010. 368 с.
3. Маневич Л. И. Линейная и нелинейная математическая физика: от гармонических волн к солитонам // Соросовский образовательный журн. 1996. № 1. С. 86–93.
4. Macias-Díaz J. E., Ruiz-Ramirez J., Villa J. The numerical solution of a generalized Burgers–Huxley equation through a conditionally bounded and symmetry-preserving method // Computers and Mathematics with Applications. 2011. Vol. 61. P. 3330–3342. DOI: 10.1016/j.camwa.2011.04.022.
5. Землянухин А. И., Бочкарев А. В. Метод возмущений и точные решения уравнений нелинейной динамики сред с микроструктурой // Вычисл. мех. сплош. сред. 2016. Т. 9, № 2. С. 182–191. DOI: 10.7242/1999-6691/2016.9.2.16.



6. Куликов А. Н., Куликов Д. А. Формирование волнообразных наноструктур на поверхности плоских подложек при ионной бомбардировке // Журн. вычисл. матем. и матем. физ. 2012. Т. 52, № 5. С. 930–945.
7. Kulikov D. A. Spatially inhomogeneous dissipative structures in a periodic boundary-value problem for nonlocal erosion equation // J. Math. Sci. 2015. Vol. 205, № 6. P. 791–805. DOI: 10.1007/s10958-015-2284-x.
8. Абловиц М., Сигур Х. Солитоны и метод обратной задачи : пер. с англ. М. : Мир, 1987. 479 с.

Образец для цитирования:

Землянухин А. И., Бочкарев А. В. Точные уединенно-волновые решения уравнений Бюргера – Хаксли и Бредли – Харпера // Изв. Саратов. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2017. Т. 17, вып. 1. С. 62–70. DOI: 10.18500/1816-9791-2017-17-1-62-70.

Exact Solitary-wave Solutions of the Burgers – Huxley and Bradley – Harper Equations

A. I. Zemlyanukhin¹, A. V. Bochkarev²

¹Alexander I. Zemlyanukhin, Yuri Gagarin State Technical University of Saratov, 77, Politechnicheskaya str., 410054, Saratov, Russia, zemlyanukhinai@sstu.ru

²Andrey V. Bochkarev, Yuri Gagarin State Technical University of Saratov, 77, Politechnicheskaya str., Saratov, Russia, 410054, ab2009sar@list.ru

It is shown that the exact soliton-like solutions of nonlinear wave mechanics evolution equations can be obtained by direct perturbation method based on the solution of a linearized equation. The sought solutions are sums of the perturbation series which can be found using the requirement that the series are to be geometric. This requirement leads to the conditions for the coefficients of the equations and parameters of the sought solutions. The exact solitary-wave solutions of the nonlinear non-integrable Burgers–Huxley equation and the generalized Bradley–Harper equation are obtained. The conditions are formulated under which these solutions have the form of a wave front. It is shown that these solutions can also be found from the system of Riccati equations, that is equivalent to the original equation. By utilizing the Cole–Hopf transformation, the generalized Bradley–Harper equation is reduced to a second-order linear differential equation with constant coefficients.

Key words: exact solitary-wave solution, perturbation method, Riccati equation.

Acknowledgements: This work was supported by the Russian Foundation for Basic Research (project no. 16-01-00176a).

References

1. Cole J. D. *Perturbation Methods in Applied Mathematics*. Ginn, Blaisdell, Waltham, Mass, 1968. 260 p. (Russ. ed.: Cole J. D. *Metody vozrushhenij v prikladnoj matematike*. Moscow, Mir, 1972. 276 p.)
2. Kudryashov N. A. *Metody nelinejnoj matematicheskoj fiziki* [Methods of nonlinear mathematical physics]. Dolgoprudnyj, Izd. dom “Intellekt”, 2010. 368 p. (in Russian).
3. Manevich L. I. Linejnaja i nelinejnaja matematicheskaja fizika: ot garmonicheskikh voln k solitonam [Linear and nonlinear mathematical physics: from harmonic waves to solitons]. *Sorosovskij obrazovatel’nyj zhurnal*, 1996, no. 1, pp. 86–93 (in Russian).



4. Macias-Diaz J. E., Ruiz-Ramirez J., Villa J. The numerical solution of a generalized Burgers-Huxley equation through a conditionally bounded and symmetry-preserving method. *Computers and Mathematics with Applications*, 2011, vol. 61, pp. 3330–3342. DOI: 10.1016/j.camwa.2011.04.022.
5. Zemlyanukhin A. I., Bochkarev A. V. Metod vozmushhenij i tochnye reshenija uravnenij nelinejnoj dinamiki sred s mikrostrukturoj [The perturbation method and exact solutions of nonlinear dynamics equations for media with microstructure]. *Vyichisl. meh. splosh. sred*, 2016, vol. 9, no. 2, pp. 182–191 (in Russian) DOI: 10.7242/1999-6691/2016.9.2.16.
6. Kulikov A. N., Kulikov D. A. Formation of wavy nanostructures on the surface of flat substrates by ion bombardment. *Comput. Math. Math. Phys.*, 2012, vol. 52, no. 5, pp. 800–814. DOI: 10.1134/S0965542512050132.
7. Kulikov D. A. Spatially inhomogeneous dissipative structures in a periodic boundary-value problem for nonlocal erosion equation. *J. Math. Sci.*, 2015, vol. 205, no. 6, pp. 791–805. DOI: 10.1007/s10958-015-2284-x.
8. Ablowitz M., Segur H. *Solitons and the Inverse Scattering Transform*. Philadelphia, SIAM, 1981. 425 p.

Cite this article as:

Zemlyanukhin A. I., Bochkarev A. V. Exact Solitary-wave Solutions of the Burgers – Huxley and Bradley – Harper Equations. *Izv. Saratov Univ. (N. S.), Ser. Math. Mech. Inform.*, 2017, vol. 17, iss. 1, pp. 62–70 (in Russian). DOI: 10.18500/1816-9791-2017-17-1-62-70.



УДК 539.374

РАЦИОНАЛЬНО АЛГЕБРАИЧЕСКИ ПОЛНЫЕ СИСТЕМЫ ТЕНЗОРОВ КОНЕЧНЫХ ДЕФОРМАЦИЙ СЛОЖНЫХ КОНТИНУУМОВ

В. А. Ковалев¹, Ю. Н. Радаев²

¹Ковалев Владимир Александрович, доктор физико-математических наук, профессор кафедры финансового менеджмента и финансового права, Московский городской университет управления Правительства Москвы, Россия, 107045, Москва, Сретенка, 28, kovalev.kam@gmail.com

²Радаев Юрий Николаевич, доктор физико-математических наук, профессор, ведущий научный сотрудник, Институт проблем механики имени А. Ю. Ишлинского РАН, Россия, 119526, Москва, просп. Вернадского, 101, корп. 1, radayev@ipmnet.ru, y.radayev@gmail.com

Статья посвящена проблеме построения полных систем неприводимых объективных тензоров деформации и экстрадеформации сложных (в частности, микрополярных) континуумов. Континуум предполагается сложным, т. е. изменения его пространственных конфигураций сопряжены с возникновением и развитием экстрадеформаций. Математическая размерность континуума считается произвольной. Предполагается, что он может быть вложен во внешнее плоское пространство, возможно, большего числа измерений. Указанная проблема решается в рамках и методами физической теории поля в сочетании с теорией алгебраических инвариантов группы собственно ортогональных преобразований конечных систем контравариантных векторов в плоском пространстве с заданным числом измерений. Тензоры деформации конструируются как неприводимые алгебраические инварианты, нечувствительные к поворотам координатного репера внешнего пространства, некоторой системы контравариантных векторов, с помощью которых задается плотность интеграла действия. С алгебраической точки зрения решение ограничивается системами рациональных или целых рациональных инвариантов. Исследуется полнота полученных систем инвариантов и получены сизигии, связывающие инварианты с помощью целых рациональных соотношений. Рассматривается проблема построения объективных тензоров деформации микрополярного континуума из элементов полярных разложений градиентов деформации и экстрадеформации.

Ключевые слова: континуум, сложный континуум, микрополярный континуум, поле, действие, лагранжиан, деформация, d -переменная, алгебраический инвариант рациональный инвариант, сизигия.

DOI: 10.18500/1816-9791-2017-17-1-71-84

1. ВВОДНЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ

Представляемая работа посвящена проблеме построения полных систем неприводимых объективных мер деформации и экстрадеформации сложного континуума, допускающего вложение во внешнее плоское пространство (возможно, более высокой размерности) со стандартной метрикой. В противовес стандартным моделям сплошных деформируемых сред [1, 2] сложные континуумы (т. е. континуумы сложной аффинно-метрической структуры и дополнительными микростепенями свободы, изменения пространственных конфигураций которых сопряжены с возникновением и развитием экстрадеформаций) находят все более широкое применение в различных



прикладных вопросах механики сплошных сред, особенно при исследовании механического поведения твердых тел с поврежденностью и дефектами структуры, гранулированных и пористых сред, биоматериалов, метаматериалов. Механика сложного континуума основана на представлении о том, что учета изменений только в геометрии положений составляющих его элементов недостаточно для математического моделирования его деформированных состояний. Поэтому развитие механики сплошных сред происходит, с одной стороны, за счет усложнения аффинно-метрических свойств континуума, а с другой — надделения составляющих континуум микроэлементов дополнительными степенями свободы. Континуум Коссера и микроморфная среда являются яркими примерами сложных континуумов с дополнительными (экстра) внутренними степенями свободы — микровращениями и аффинными деформациями мезообъема. Континуум Коссера (или микрополярная среда) — исторически первый пример нового подхода к моделированию механического поведения твердых деформируемых тел [3], более ста лет назад определивший новый вектор развития механики континуума.

Континуум в современных исследованиях обычно моделируется дифференцируемым многообразием (или дифференцируемым пространством) [4]. Для того чтобы максимально сохранить преемственность в математическом моделировании его деформации, в работе предполагается, что он обладает определенной аффинно-метрической структурой, но и при этом допускает вложение во внешнее плоское пространство, число измерений которого, возможно, превосходит математическую размерность континуума. Такое положение дел имеет место, например, в том случае, когда континуум является римановым многообразием [5]. В таких условиях естественно не удастся полностью сохранить классическую схему построения объективных мер деформации. Однако оказывается возможным, в частности, дальнейшее обобщение модели микрополярного континуума вследствие возрастания числа линейно-независимых директоров, ассоциированных с микроэлементом. Соответствующий круг вопросов обсуждается во втором параграфе статьи.

В третьем параграфе определяются действие и плотность действия для рассматриваемой модели континуума как необходимые предпосылки для формулировки проблемы построения полной системы тензоров деформации и экстрадеформации в рамках физической теории поля [6, 7], исходя из принципа ротационной инвариантности плотности действия при поворотах координатного репера внешнего пространства.

Четвертый параграф включает решение поставленной проблемы с помощью теории алгебраических инвариантов конечных систем контравариантных векторов в плоском пространстве заданной размерности и стандартной метрикой [8]. Тензоры деформации при этом конструируются как инварианты системы контравариантных векторов внешнего пространства, с помощью которых задается плотность интеграла действия, относительно группы собственно ортогональных преобразований внешнего пространства. Решение ограничивается характерными для механики континуума системами рациональных или целых рациональных инвариантов. Устанавливается неприводимость инвариантов, образующих систему. Каждая система объективных тензоров деформации должна удовлетворять свойству полноты: полная система не допускает присоединения к ней новых неприводимых тензоров деформации и тем самым гарантирует отсутствие не имеющих физического смысла вкладов в интеграл действия. С помощью алгебраических критериев доказывается полнота полученной



системы тензоров деформации и экстрадеформации. Найдены сизигии, связывающие инварианты с помощью целых рациональных соотношений, позволяющие исключить ряд мер деформации, правда, за пределами области целых рациональных соотношений между ними.

Заключительный, пятый, параграф работы посвящен проблемам построения объективных тензоров деформации микрополярного континуума из элементов полярных разложений градиентов деформации и экстрадеформации. Там же рассматривается объективная геометрия конечной деформации микрополярного континуума с нежестким микроструктурным полиэдром.

2. СЛОЖНЫЙ КОНТИНУУМ, ПОГРУЖАЕМЫЙ ВО ВНЕШНЕЕ ПЛОСКОЕ ПРОСТРАНСТВО

Континуум как математический объект чаще всего мыслится как дифференцируемое многообразие некоторой данной размерности M . Для большинства прикладных вопросов механики континуума достаточно полагать, что $M = 3$. Окрестность каждой точки многообразия допускает изображение на некоторой карте (т. е. с помощью области аффинного пространства размерности M). В этом смысле многообразие допускает локальные сравнения с областями привычного нам аффинного пространства. Число карт не более чем счетно. Концепция многообразия (а поэтому и континуума) не требует никаких представлений об окружающем (внешнем) пространстве, в которое континуум может быть вложен. В дальнейшем изложении мы не различаем сам континуум и его математическую модель — некоторое дифференцируемое многообразие размерности M . Таким образом, индивидуальные точки континуума суть точки указанного дифференцируемого многообразия; они представляются специальной переменной ξ , которая, в свою очередь, устанавливается для многообразий и идентифицируется с помощью координат ξ^α .

Очевидно, что соответствие

$$\xi \rightarrow \xi^\alpha \quad (1)$$

изображает точку ξ на карте координатами ξ^α . Координаты ξ^α в механике континуума называются обычно материальными координатами.

Дифференцируемое многообразие в качестве математической модели континуума характеризуется излишней общностью и по этой причине малоприспособно в механике континуума. Эта проблема преодолевается заданием на многообразии дополнительных аффинно-метрических структур. Риманова структура на многообразии [5] является хорошим в этом плане примером. Риманово многообразие (риманово пространство) в настоящее время выступает как одна из важнейших моделей континуума.

Рациональная механика континуума широко использует представление об окружающем тело пространстве. Можно также сказать, что тела мыслятся «погруженными» в пространство. Окружающее (внешнее) пространство как-бы «вмещает» тела и служит фоном, на котором разворачиваются процессы взаимодействия тел и полей. В рациональной механике внешнее пространство молчаливо предполагается трехмерным с естественной евклидовой метрикой. Долгое время подобные представления не вызывали никаких возражений. Ситуация начала меняться, когда для моделирования континуумов с дефектами и повреждениями стали применяться аффинно-метрические структуры различного уровня сложности. При этом никогда не обсуждался вопрос о возможности погружения континуума сложной аффинно-метрической



структуры в трехмерное пространство. Хорошо известно, что такое погружение не всегда возможно. Так, например, риманово многообразие размерности M в общем случае погружается в плоское пространство¹ размерности

$$N = \frac{1}{2}M(M + 1).$$

Для изображения состояний и процессов в рациональной механике континуума обычно используется трехмерное плоское пространство. Таким образом, одним из новых подходов к математическому описанию деформации континуума будет отказ от концепции внешнего пространства как трехмерного плоского пространства, в которое погружен континуум.

В том случае, когда континуум допускает вложение в некоторое внешнее плоское пространство размерности N со стандартной метрикой², оказывается возможным вести речь о положениях \mathbf{X} в этом пространстве и измерениях длин и углов. Точка континуума ξ займет некоторое положение (место) \mathbf{X} во внешнем плоском пространстве, определяемое упомянутым выше вложением. Положение \mathbf{X} во внешнем пространстве в механике континуума называется референциальным. Ясно, что референциальное положение \mathbf{X} взаимно-однозначно связано с материальной переменной ξ :

$$\xi \Leftrightarrow \mathbf{X}. \quad (2)$$

Еще одно важное допущение состоит в том, что в процессе деформации континуум всегда должен допускать вложение в одно и то же внешнее пространство.

На основании (1) и (2) можно параметризовать референциальное положение континуума во внешнем пространстве координатами ξ^α :

$$\mathbf{X} \rightarrow \xi^\alpha, \quad (3)$$

следовательно, референциальную переменную \mathbf{X} также можно рассматривать как материальную.

В процессе деформации точки континуума изменяют свои положения во внешнем пространстве. Пространственное положение индивидуальной точки континуума ξ в результате деформации обозначим через \mathbf{x} . Поэтому в наиболее общей форме деформацию континуума можно выразить отображением индивидуальных точек континуума на места внешнего пространства:

$$\xi \rightarrow \mathbf{x}. \quad (4)$$

В силу (2) и (4) можно вести речь о преобразовании позиционных переменных внешнего пространства:

$$\mathbf{X} \rightarrow \mathbf{x}. \quad (5)$$

¹Следуя [5], риманово пространство будем называть плоским, если в нем существует координатная система, в которой компоненты метрического тензора пространства постоянны.

²Стандартная метрика плоского пространства в системе координат y^j определяется квадратичной дифференциальной формой:

$$ds^2 = \sum_j c_j dy^j dy^j \quad (j = 1, \dots, N),$$

где постоянные $c_j = \pm 1$ в зависимости от типа пространства. Для координатной системы y^j используется термин *декартова система координат*. Таким образом, для внешнего пространства декартова система координат является предпочтительной.



Это преобразование в рациональной механике континуума называется деформацией.

Переменные \mathbf{X} и \mathbf{x} и позиционные координаты X^α ($\alpha = 1, 2, \dots, M$), x^j ($j = 1, 2, \dots, N$) выступают как соответственно лагранжева (отсчетная, референциальная) и эйлерова (пространственная) переменные, если воспользоваться стандартной терминологией механики континуума [1, 2]. С этими переменными связаны метрики: отсчетная (лагранжева) метрика ${}^{\backslash}g_{\alpha\beta}$ и пространственная (эйлерова) метрика g_{ij} . Конвективная (сопутствующая) метрика характеризуется метрическим тензором $g_{\alpha\beta}$ и в отличие от метрик ${}^{\backslash}g_{\alpha\beta}$ и g_{ij} определяется деформацией (5).

Как видно из предложенных обозначений, эйлеровы пространственные индексы всегда будут обозначаться латинскими буквами, греческие буквы всегда будут указывать на отсчетные или сопутствующие индексы. Обратным штрихом (backprime) слева от символа будут снабжаться величины, ассоциированные с референциальным состоянием.

В теориях сложных континуумов «конечная» деформация, представляемая геометрическим преобразованием позиционных переменных $\mathbf{X} \rightarrow \mathbf{x}$, сопровождается экстрадеформацией, описание которых реализуется с помощью дополнительных специальных переменных (d -переменных). Индексы, имеющие начертания \mathbf{a} , \mathbf{b} , \mathbf{c} , ..., в дальнейшем изложении применяются для индивидуализации d -переменных. Эти переменные, вообще говоря, являются тензорами и преобразуются по тензорному закону при преобразованиях координат внешнего пространства x^j ($j = 1, 2, \dots, N$). В частности, в микрополярных континуумах [3] экстрадеформация проявляется в форме нарушений взаимной ориентации и изменений метрических характеристик системы полярных d -векторов $d_{\mathbf{a}}^{k\mathbf{a}}$ ($\mathbf{a} = 1, 2, \dots, N$), ассоциированных с каждым микроэлементом континуума. В этом случае d -переменные — контравариантные векторы внешнего пространства. Вследствие гипотезы о погружаемости континуума во внешнее плоское пространство появляется дополнительная возможность, например, расширить систему d -векторов, пользуясь тем обстоятельством, что в пространстве большей размерности существует больше линейно независимых векторов. В результате приходим к понятию обобщенного микрополярного континуума. В дальнейшем мы ограничимся (как в плане обозначений d -переменных, так и в плане их интерпретации) векторными переменными.

«Полная» деформация сложного континуума состоит из преобразования позиционных переменных (5) и экстрадеформации, т. е. трансформации d -векторов, начиная от их референциального положения:

$${}^{\backslash}d_{\mathbf{a}} \rightarrow d_{\mathbf{a}}. \quad (6)$$

Деформация и экстрадеформация, представленные в координатах X^α , x^j , записываются в следующем виде:

$$x^j = x^j(X^\alpha), \quad (7)$$

$$d_{\mathbf{a}}^j = d_{\mathbf{a}}^j(X^\alpha). \quad (8)$$

Градиент деформации, или «дисторсия» (см., например, [9, 10])

$$\partial_\alpha x^j \quad (j = 1, 2, \dots, N, \quad \alpha = 1, 2, \dots, M), \quad (9)$$



где ∂_α обозначает частное дифференцирование по материальной переменной, характеризует аффинную деформацию элемента континуума. Дисторсия $\partial_\alpha x^j$ трансформирует отсчетный линейный элемент dX^α в актуальное положение во внешнем пространстве dx^j согласно

$$dx^j = (dX^\alpha)\partial_\alpha x^j. \quad (10)$$

Дисторсия $\partial_\alpha x^j$ ($j = 1, 2, \dots, N$; $\alpha = 1, 2, \dots, M$) в случае $M = N$, как известно [1, 9], разлагается в композицию чистой деформации (растяжений относительно трех взаимно ортогональных главных осей деформации в отсчетном положении) и поворота во внешнем пространстве отсчетного полиэдра главных осей деформации до его актуального положения.

Если $M = N$, то можно вести речь о якобиане деформации:

$$J = \det(\partial_\alpha x^j). \quad (11)$$

Конвективная метрика $g_{\alpha\beta}$ вычисляется с помощью градиента деформации и внешней эйлеровой g_{ij} метрики с помощью следующей формулы:

$$g_{\alpha\beta} = g_{ij}(\partial_\alpha x^i)(\partial_\beta x^j). \quad (12)$$

Метрики $\hat{g}_{\alpha\beta}$ и $g_{\alpha\beta}$ ротационно-инвариантны при произвольных поворотах координатной системы внешнего пространства.

В рациональной механике важную роль отводится детерминантам, составленным из метрических коэффициентов (отсчетных, конвективных и пространственных); для них мы применяем следующие обозначения:

$$\hat{g} = \det(\hat{g}_{\alpha\beta}), \quad (13)$$

$$g = \det(g_{\alpha\beta}), \quad (14)$$

$$\Gamma = \det(g_{ij}). \quad (15)$$

Если $M = N$, то детерминанты (14), (15) и якобиан (11) связаны между собой посредством уравнения

$$\sqrt{\Gamma}J = \sqrt{g}. \quad (16)$$

Это так называемое уравнение неразрывности в переменных Лагранжа [1]. В дальнейшем будет видно, что с алгебраической точки зрения уравнение (16) выступает как сизигия, связывающая целым рациональным соотношением рациональные инварианты деформации, нечувствительные к поворотам координатного репера внешнего пространства.

3. ИНТЕГРАЛ ДЕЙСТВИЯ ДЛЯ СЛОЖНОГО КОНТИНУУМА. РОТАЦИОННАЯ ИНВАРИАНТНОСТЬ ПЛОТНОСТИ ДЕЙСТВИЯ

При исследовании сложных континуумов одной из первых встает задача о нахождении тензоров деформации и экстрадеформации, которые имели бы объективную природу. Объективность здесь понимается как инвариантность тензорных мер деформации и экстрадеформации относительно поворотов координатных систем во внешнем пространстве. Решение указанной задачи может быть выполнено с позиций теории поля (см., например, [6, 7]), если допустить, что деформация континуума подчиняется принципу наименьшего действия.



Действие в теориях поля представляет собой интегральный функционал вида

$$\mathfrak{I} = \int \mathcal{L}(\varphi^k, \partial_\alpha \varphi^k, \partial_\gamma \partial_\alpha \varphi^k, \dots, X^\beta) d^M X, \quad (17)$$

где:

\mathcal{L} — «естественная» плотность лагранжиана (плотность действия);
 φ^k — физические полевые переменные;
 X^β ($\beta = 1, 2, \dots, M$) — позиционные (пространственно-временные) координаты;
 $d^M X$ — «естественный» элемент объема (произведение дифференциалов позиционных координат).

Отдавая приоритет теоретико-полевому подходу, будем рассматривать координаты внешнего пространства x^j как физические поля. То же самое относится и к системе d -переменных. Последние рассматриваются как экстраполевые (сверх переменных x^j) переменные и вводятся в формализм теории поля с помощью контравариантных пространственных компонент.

Плотность действия (лагранжиан) \mathcal{L} для сложного (в частности, микрополярно-го) континуума примем в следующем виде:

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}(X^\beta, d_a^j, \dot{x}^j, \dot{d}_a^j, \partial_\alpha x^j, \partial_\alpha d_a^j). \quad (18)$$

Плотность действия \mathcal{L} является объективной величиной и не должна зависеть от поворотов системы координат внешнего пространства. Поэтому \mathcal{L} на самом деле функционально зависит лишь от таких алгебраических комбинаций контравариантных векторов внешнего пространства

$$\partial_\alpha x^i, \quad d_a^j, \quad \partial_\alpha d_a^j, \quad (19)$$

которые являются инвариантными относительно собственно ортогональных преобразований внешней координатной системы.

Инвариантность плотности действия относительно поворотов координатного репера является проявлением изотропии внешнего пространства, т. е. отсутствия предпочтительных направлений в этом пространстве.

Проблеме определения целых рациональных комбинаций контравариантных векторов внешнего пространства, которые были бы не чувствительны к поворотам внешней координатной системы, будет посвящен следующий параграф работы. Там же обсуждается полнота системы рациональных инвариантов.

4. ТЕНЗОРЫ ДЕФОРМАЦИИ КАК РАЦИОНАЛЬНЫЕ АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ ИНВАРИАНТЫ

Решение сформулированной выше проблемы получается чисто алгебраическими методами, изложенными, например, в [8].

К целым рациональным инвариантам системы контравариантных векторов внешнего пространства (19), которые были бы не чувствительны к поворотам внешней координатной системы, следует отнести попарные внутренние (в метрике внешнего пространства g_{ij}) произведения векторов

$$\begin{aligned} g_{\alpha\beta} &= g_{ij}(\partial_\alpha x^i)(\partial_\beta x^j), & \mathcal{S}_{ab} &= g_{ij} d_a^i d_b^j, \\ \mathcal{R}_\alpha &= g_{ij}(\partial_\alpha x^i) d_a^j, & \mathcal{R}_{\alpha b} &= g_{ij}(\partial_\alpha d_a^i) d_b^j, \\ \mathcal{T}_{\alpha\beta} &= g_{ij}(\partial_\alpha x^i)(\partial_\beta d_a^j), & \mathcal{T}_{\alpha\beta} &= g_{ij}(\partial_\alpha d_a^i)(\partial_\beta d_b^j), \end{aligned} \quad (20)$$



собственно и образующих *неприводимые* тензоры деформации, а также $N \times N$ -определители, в столбцах которых расположены компоненты всевозможных систем из N векторов (19).

Неприводимость каждого из указанных инвариантов очевидна в силу их построения, правда, при этом приходится ограничиваться лишь целыми рациональными инвариантами системы векторов (19). Полноту системы (20) вместе с упомянутыми определителями, т. е. возможность представления любого целого рационального инварианта как рациональной функции от (20) и указанных выше определителей, можно доказать, опираясь на известные результаты теории рациональных алгебраических инвариантов (см. [8]).

Тензоры деформации в правой колонке (20) никак не связаны с градиентом деформации и в механике континуума вообще не рассматриваются.

Заметим также, что *квадраты* упомянутых определителей (с учетом множителя $\sqrt{\Gamma}$) в силу формул Грама – Шмидта³ являются целыми рациональными функциями контравариантных компонент векторов внешнего пространства (19), поскольку рационально выразимы через внутренние произведения, данные в (20). Поэтому сами определители рационально не выразимы в терминах контравариантных компонент векторов внешнего пространства (19).

В частности, если $M = N$, целое рациональное соотношение, связывающее якобиан деформации $J = \det(\partial_\alpha x^j)$ и конвективную метрику $g_{\alpha\beta}$

$$\det(g_{ij})J^2 - \det(g_{\alpha\beta}) = 0, \tag{21}$$

выступает в качестве сизигии. Подобные сизигии могут быть выписаны для всех независимых детерминантов, определяемых системами из N векторов (19).

Если экстрапеременные не требуются для математического описания континуума, то сизигия (21) будет единственной. Следовательно, полная система рациональных инвариантов для системы из N контравариантных векторов внешнего пространства $\partial_\alpha x^i$ будет состоять из компонент конвективной метрики и якобиана деформации, связанных между собой единственной сизигией (21), которая в механике континуума интерпретируется как уравнение неразрывности в переменных Лагранжа. Конвективная метрика $g_{\alpha\beta}$ как элемент полной системы неприводимых в рациональной области инвариантов в механике континуума используется сравнительно редко; вместо нее вводится тензор второго ранга, характеризующий *изменение* метрики в результате деформации:

$$\epsilon_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}(g_{\alpha\beta} - \dot{g}_{\alpha\beta}). \tag{22}$$

³Речь идет о формулах вида

$$\det(g_{ij}) \begin{vmatrix} u^1 & v^1 & w^1 \\ u^2 & v^2 & w^2 \\ u^3 & v^3 & w^3 \end{vmatrix}^2 = \begin{vmatrix} u^k u_k & u^k v_k & u^k w_k \\ v^k u_k & v^k v_k & v^k w_k \\ w^k u_k & w^k v_k & w^k w_k \end{vmatrix},$$

справедливых для произвольных векторов u^k, v^k, w^k в трехмерном пространстве. Определитель слева не выражается рационально через внутренние произведения векторов u^k, v^k, w^k . Алгебраическая формула для указанного определителя будет содержать квадратный радикал, что выводит рассуждения за пределы области целых рациональных функциональных зависимостей. Аналогичные формулы имеют место и в многомерном случае.



Компоненты $\epsilon_{\alpha\beta}$ преобразуются по тензорному закону при заменах лагранжевых координат. Тензор $\epsilon_{\alpha\beta}$ называется тензором деформации Грина [9, 10]. Использование тензора деформации Грина в качестве функционального аргумента плотности действия признается удобным, поскольку он в силу своего определения учитывает только ту часть деформации континуума, которая наблюдается относительно референциальной конфигурации континуума во внешнем пространстве.

В случае континуума размерности $M = 3$, допускающего вложение в трехмерное внешнее пространство, полная система рациональных инвариантов включает всевозможные 3×3 -определители, в столбцах которых расположены контравариантные компоненты всевозможных троек векторов системы (19). Если рассматриваемые определители содержат по меньшей мере один столбец из контравариантных компонент градиента деформации $\partial_\alpha x^i$, то их, размещая контравариантные компоненты градиента деформации $\partial_\alpha x^j$ в первом столбце, можно разбить на следующие шесть групп:

$$[(\partial_\alpha x^j) d^j_a d^j_b], \tag{I}$$

$$[(\partial_\alpha x^j) (\partial_\beta d^j_a) d^j_b], \tag{II}$$

$$[(\partial_\alpha x^j) (\partial_\beta d^j_a) (\partial_\gamma d^j_b)] \quad (\beta \neq \gamma \text{ и } \mathbf{a} \neq \mathbf{b} \text{ одновременно}), \tag{III}$$

$$[(\partial_\alpha x^j) (\partial_\beta x^j)_a d^j] \quad (\beta \neq \alpha), \tag{IV}$$

$$[(\partial_\alpha x^j) (\partial_\beta x^j) (\partial_\gamma d^j)_a] \quad (\beta \neq \alpha), \tag{V}$$

$$[(\partial_\alpha x^j) (\partial_\beta x^j) (\partial_\gamma x^j)]. \tag{VI}$$

На основании формул Грама – Шмидта каждый из перечисленных выше определителей выражается через внутренние произведения векторов системы (19) с помощью квадратных радикалов. Соотношения для квадратов определителей (I)–(VI) будут выступать в роли сизигий, связывающих инварианты посредством целых рациональных уравнений.

5. ПОСТРОЕНИЕ ТЕНЗОРОВ ДЕФОРМАЦИИ ИЗ ЭЛЕМЕНТОВ ПОЛЯРНЫХ РАЗЛОЖЕНИЙ

Полные системы в случае $M = N$ могут быть построены с помощью полярных разложений градиента деформации и экстрадеформации (см., например, [11]). Полярные разложения нашли широкое применение в механике континуума, так как они позволяют с самого начала построить характеристики деформации, поддающиеся ясному геометрическому истолкованию.

Градиент деформации всегда может быть представлен как произведение симметричного положительно определенного тензора второго ранга $|x|_{\alpha\beta}$ (модуля) и ортогонального тензора $\lambda^{i\beta}$ (тензора поворота):

$$\partial_\alpha x^i = |x|_{\alpha\beta} \lambda^{i\beta}. \tag{23}$$

Симметрия модуля градиента деформации $|x|_{\alpha\beta}$ выражается следующими равенствами:

$$|x|_{\alpha\beta} = |x|_{\beta\alpha}; \tag{24}$$



ортогональность тензора поворота $\lambda^{i\beta}$ подразумевает выполнение следующих двух условий:

$$g_{ij}\lambda^{i\beta}\lambda^{j\gamma} = \backslash g^{\beta\gamma}, \quad \backslash g_{\beta\gamma}\lambda^{i\beta}\lambda^{j\gamma} = g^{ij}. \quad (25)$$

Условия (25), как нетрудно видеть, эквивалентны, поскольку одно из них следует из другого. Если совершить поворот произвольного вектора $\backslash a_\alpha$ из отсчетного положения в актуальное $a^i = \lambda^{i\alpha}\backslash a_\alpha$, то указанные условия гарантируют совпадение длины вектора $\backslash a_\alpha$, вычисленной с помощью отсчетной метрики, с длиной вектора a^i , вычисленной с помощью метрики внешнего пространства, т.е. выполнение равенства

$$\backslash g^{\beta\gamma}\backslash a_\beta\backslash a_\gamma = g_{ij}\lambda^{i\beta}\lambda^{j\gamma}\backslash a_\beta\backslash a_\gamma;$$

если выполняется обратный поворот вектора a_s из актуального положения в отсчетное $\backslash a^\alpha = \lambda^{s\alpha}a_s$, то совпадают длины векторов a_s (в метрике внешнего пространства) и $\backslash a^\alpha$ (в отсчетной метрике):

$$g^{ij}a_i a_j = \backslash g_{\beta\gamma}\lambda^{i\beta}\lambda^{j\gamma}a_i a_j.$$

В частности, вычисляя длины векторов $d_j \lambda^{j\beta}$ в отсчетной метрике $\backslash g_{\beta\gamma}$, имеем:

$$\backslash g_{\beta\gamma}d_i \lambda^{i\beta} d_j \lambda^{j\gamma} = g^{ij}d_i d_j,$$

где величина справа есть длина d -директора с указателем \mathbf{a} в метрике внешнего пространства.

Симметрия модуля градиента деформации $|x|_{\alpha\beta}$ обеспечивает вещественность его спектра. Спектральные значения $|x|_A$ ($A = 1, 2, \dots, M$) вычисляются как корни характеристического уравнения:

$$\det(|x|_{\alpha\beta} - \lambda \backslash g_{\alpha\beta}) = 0$$

и называются главными растяжениями.

Собственные векторы модуля градиента деформации $|x|_{\alpha\beta}$, обозначаемые через $\backslash k_A^\beta$, образуют ортонормированный в отсчетной метрике $\backslash g_{\alpha\beta}$ полиэдр

$$\backslash g_{\alpha\beta} \backslash k_A^\beta \backslash k_C^\beta = \delta_{AC},$$

определяющий отсчетные ориентации главных осей деформации.

Актуальная ориентация главных осей деформации определяется в результате поворота полиэдра $\backslash k_A^\beta$:

$$k_A^s = \lambda^{s\beta} \backslash k_A^\beta.$$

Векторы k_A^s ($A = 1, 2, \dots, M$) взаимно ортогональны в метрике внешнего пространства g_{ij} .

Дисторсия $\partial_\alpha x^j$, таким образом, представляет собой композицию последовательно выполняемых чистой деформации (растяжений относительно взаимно ортогональных главных осей деформации в отсчетном положении) и поворота отсчетного полиэдра главных осей деформации до их актуального положения.



Полярные разложения градиентов d -директоров имеют вид

$$\partial_\alpha d_\alpha^i = |d|_\alpha \lambda_\alpha^{i\beta}, \quad (26)$$

где тензоры $|d|_\alpha$ симметричны и неотрицательны, а «тензоры поворота» $\lambda_\alpha^{i\beta}$ ортогональны (считаются неопределенными, если градиент вырождается).

Перейдем к построению системы инвариантов деформации и экстрадеформации, исходя из элементов, определяющих рассмотренные выше полярные разложения. Тензоры $|x|_{\alpha\beta}$ и $|d|_\alpha$, очевидно, не чувствительны к поворотам координатного репера внешнего пространства. Следует отметить, что они не могут быть рационально выражены через компоненты градиента деформации и градиента экстрадеформации. С тем чтобы получить несводимые к ним инварианты, к ним следует добавить следующие внутренние произведения (обязательно содержащие множитель $\lambda^{i\beta}$):

$$g_{ij} d_\alpha^i \lambda^{j\beta}, \quad g_{ij} \lambda^{i\beta} \lambda^{j\gamma}, \quad g_{ij} \lambda^{i\beta} \lambda^{j\gamma}. \quad (27)$$

Рассмотрим контравариантный отсчетный вектор $g_{ij} d_\alpha^i \lambda^{j\beta}$. Очевидно, что он получается в результате обратного поворота актуального положения d -директора с указателем α в некоторое отсчетное положение, вообще говоря, отличающееся от такового, определяемого вектором $\backslash d_\alpha^\beta$. По этой причине нам придется ввести специальное обозначение

$$\backslash e_\alpha^\beta = g_{ij} d_\alpha^i \lambda^{j\beta} \quad (28)$$

для инвариантного относительно поворота внешней координатной системы отсчетного вектора.

Второй из перечисленных в (27) тензоров в силу ортогональности тензора поворота $\lambda^{i\beta}$ в точности совпадает с отсчетной метрикой:

$$\backslash g^{\beta\gamma} = g_{ij} \lambda^{i\beta} \lambda^{j\gamma}. \quad (29)$$

Поскольку модули градиентов d -директоров никак не связаны с градиентом деформации, их необходимо включить в третий из тензоров (27), устраняя тем самым и возможную неопределенность «тензоров поворота» $\lambda_\alpha^{i\beta}$:

$$|d|_{\beta\zeta} g_{ij} \lambda^{i\gamma} \lambda^{j\zeta}. \quad (30)$$

Таким образом, вторая система инвариантов деформации и экстрадеформации, которые выдерживают повороты координатного репера внешнего пространства, состоит из следующих тензоров:

$$|x|_{\alpha\beta}, \quad \backslash g^{\beta\gamma}, \quad \backslash e_\alpha^\beta, \quad |d|_{\beta\zeta} g_{ij} \lambda^{i\gamma} \lambda^{j\zeta}. \quad (31)$$

Полученная в предыдущем параграфе работы система инвариантов выразима в терминах инвариантов (31) с помощью целых рациональных соотношений:

$$g_{\alpha\beta} - \backslash g^{\sigma\kappa} |x|_{\alpha\sigma} |x|_{\beta\kappa} = 0, \quad \mathcal{R}_\alpha - |x|_{\alpha\beta} \backslash e_\alpha^\beta = 0, \quad (32)$$

$$\mathcal{J}_{\alpha\beta} - |x|_{\alpha\sigma} |d|_{\beta\gamma} g_{ij} \lambda^{i\sigma} \lambda^{j\gamma} = 0.$$



Система инвариантов (31), сконструированная из множителей в полярных разложениях градиентов деформации и экстрадеформации, рационально не выразима в терминах инвариантов

$$g_{\alpha\beta}, \quad \mathcal{R}_\alpha, \quad \mathcal{T}_{\alpha\beta}. \quad (33)$$

Это нетрудно заметить, анализируя соотношения (32). Тот же самый факт становится очевидным, если учесть, что инварианты (31) рационально не выразимы через компоненты градиентов деформации и экстрадеформации, в то время как для инвариантов (33) это можно сделать. Тем не менее, поскольку уравнения (32) устанавливают взаимно-однозначное соответствие между системами инвариантов (33) и (31), то в некотором смысле система инвариантов (31) также может считаться полной.

Если экстрапеременные не требуются для математического описания континуума, то полная система инвариантов, не чувствительных к поворотам координатного репера внешнего пространства, будет состоять из модуля дисторсии и компонент отсчетной метрики

$$|x|_{\alpha\beta}, \quad \backslash g^{\alpha\beta}. \quad (34)$$

Этот вывод полностью согласуется с положениями нелинейной теории упругости [9]; в указанной теории тензоры (34) применяются в качестве объективных мер конечной деформации упругого континуума.

Кроме тензорной пары (34), как отмечается в [9], следующая пара метрических тензоров

$$g_{\alpha\beta}, \quad \backslash g_{\alpha\beta} \quad (35)$$

с успехом может быть положена в основу теории деформации нелинейно упругого тела. Ее использование в прикладных задачах часто оказывается более предпочтительным по сравнению с тензором деформации Грина (22), поскольку при больших деформациях отсчетная и конвективная метрики будут настолько сильно отличаться друг от друга, что их разность не будет обладать теми преимуществами, которыми она обладает в случае малых деформаций.

Библиографический список

1. Седов Л. И. Введение в механику сплошных сред. М. : Физматгиз, 1962. 284 с.
2. Ильюшин А. А. Механика сплошных сред. М. : Изд-во Моск. ун-та, 1978. 287 с.
3. Cosserat E. et F. Théorie des corps déformables. P. : Librairie Scientifique A. Hermann et Fils, 1909. 226 p.
4. Рашевский П. К. Риманова геометрия и тензорный анализ. М. : Наука, 1967. 664 с.
5. Эйзенхарт Л. П. Риманова геометрия. М. : Гос. изд-во иностр. лит., 1948. 316 с.
6. Ковалев В. А., Радаев Ю. Н. Элементы теории поля : вариационные симметрии и геометрические инварианты. М. : Физматлит, 2009. 156 с.
7. Ковалев В. А., Радаев Ю. Н. Волновые задачи теории поля и термомеханика. Саратов : Изд-во Саратов. ун-та, 2010. 328 с.
8. Гуревич Г. Б. Основы теории алгебраических инвариантов. М. ; Л. : Гостехтеоретиздат, 1948. 408 с.
9. Бердичевский В. Л. Вариационные принципы механики сплошной среды. М. : Наука, 1983. 448 с.



10. Грин А., Адкинс Дж. Большие упругие деформации и нелинейная механика сплошной среды. М. : Мир, 1965. 456 с.
11. Хорн Р., Джонсон Ч. Матричный анализ. М. : Мир, 1989. 656 с.

Образец для цитирования:

Ковалев В. А., Радаев Ю. Н. Рационально алгебраически полные системы тензоров конечных деформаций сложных континуумов // Изв. Саратов. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2017. Т. 17, вып. 1. С. 71–84. DOI: 10.18500/1816-9791-2017-17-1-71-84.

On Rationally Complete Algebraic Systems of Finite Strain Tensors of Complex Continua

V. A. Kovalev¹, Yu. N. Radayev²

¹Vladimir A. Kovalev, Moscow City Government University of Management, 28, Sretenka str., 107045, Moscow, Russia, kovalev.kam@gmail.com

²Yurii N. Radayev, Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics of the Russian Academy of Sciences, 101, Vernadskogo Avenue, 119526, Moscow, Russia, radayev@ipmnet.ru, y.radayev@gmail.com

The paper is devoted to the mathematical description of complex continua and the systematic derivation of strain tensors by the notion of isometric immersion of complex continuum in a plane space of higher dimension. Problem of establishing of complete systems of irreducible objective strain and extra-strain tensors for complex continuum immersed in an external plane space is considered. The solution to the problem is given by methods of the field theory and the theory of algebraic invariants. Strain tensors are obtained as irreducible algebraic invariants of contravariant vectors of the external space emerging in the complex continuum action density. Considerations are restricted to rational algebraic invariants. Completeness criteria for systems of rational algebraic invariants and rational syzygies are discussed and applied to strain tensors of micropolar elastic continua. Objective strain tensors of micropolar continuum are alternatively obtained by combining multipliers of polar decompositions of strain and extra-strain gradients.

Key words: continuum, complex continuum, micropolar continuum, field, action, Lagrangian, strain, d -variable, algebraic invariant, rational invariant, syzygy.

References

1. Sedov L. I. *Vvedenie v mekhaniku sploshnykh sred* [An Introduction to Continuum Mechanics]. Moscow, Fizmatgiz, 1962. 284 p. (in Russian).
2. Il'yushin A. A. *Mekhanika sploshnykh sred* [Continuum Mechanics]. Moscow, Moscow University Press, 1978. 287 p. (in Russian).
3. Cosserat E. et F. *Théorie des corps déformables*. Paris, Librairie Scientifique A. Hermann et Fils, 1909. 226 p.
4. Rashevskii P. K. *Rimanova geometriia i tenzorni analiz* [Riemannian Geometry and Tensor Calculus]. Moscow, Nauka, 1967. 664 p. (in Russian).
5. Eisenhart L. P. *Rimanova geometriia* [Riemannian Geometry]. Moscow, Izd. Inostr. Lit., 1948. 316 p. (in Russian).
6. Kovalev V. A., Radayev Yu. N. *Elementy teorii polia: variatsionnye simmetrii i geometricheskie invarianty* [Elements of the Field Theory: Variational Symmetries and Geometric Invariants]. Moscow, Fizmatlit, 2009. 156 p. (in Russian).



7. Kovalev V. A., Radayev Yu. N. *Volnovye zadachi teorii polia i termomekhanika* [Wave Problems of Field Theory and Thermomechanics]. Saratov, Saratov Univ. Press, 2010. 328 p. (in Russian).
8. Gurevich G. B. *Osnovy teorii algebraicheskikh invariantov* [Elements of Theory of Algebraic Invariants]. Moscow, Leningrad, Gostechteretizdat, 1948. 408 p. (in Russian).
9. Berdichevskii V. L. *Variatsionnye printsipy mekhaniki sploshnoi sredy* [Variational Principles of Continuum Mechanics]. Moscow, Nauka, 1983. 448 p. (in Russian).
10. Green A. E., Adkins J. E. *Large Elastic Deformations and Non-linear Continuum Mechanics*. London, Oxford Univ. Press, 1960. 348 p. (Russ. ed.: Green A., Adkins J. *Bol'shie uprugie deformatsii i nelineinaya mekhanika sploshnoi sredy*. Moscow, Mir, 1965. 456 p.)
11. Horn R., Johnson H. *Matrix Analysis*. Cambridge, Cambridge University Press, 1990. 561 pp. (Russ. ed.: Horn R., Johnson H. *Matrichnyi analiz*. Moscow, Mir, 1989. 656 p.)

Cite this article as:

Kovalev V. A., Radayev Yu. N. On Rationally Complete Algebraic Systems of Finite Strain Tensors of Complex Continua. *Izv. Saratov Univ. (N.S.), Ser. Math. Mech. Inform.*, 2017, vol. 17, iss. 1, pp. 71–84 (in Russian). DOI: 10.18500/1816-9791-2017-17-1-71-84.



ИНФОРМАТИКА

УДК 519.7

АЛГОРИТМ ПРОВЕРКИ ТРАНЗИТИВНОСТИ ОТОБРАЖЕНИЙ, АССОЦИИРОВАННЫХ С КОНЕЧНЫМИ АВТОМАТАМИ ИЗ ГРУПП AS_p

М. В. Карандашов

Карандашов Максим Валерьевич, ассистент кафедры дискретной математики и информационных технологий, Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского, Россия, 410012, Саратов, Астраханская, 83, norg113@gmail.com

В статье затрагивается вопрос определения свойства транзитивности автоматных отображений, определяемых конечными детерминированными автоматами. Приведен критерий транзитивности автоматных отображений на словах конечной длины в терминах конечных детерминированных автоматов и деревьев детерминированных функций. Показано, что для конечных автоматов из групп AS_p можно построить алгоритм проверки транзитивности. Для доказательства данного факта использованы свойства абелевых групп перестановок. На основе представленных результатов построен матричный алгоритм проверки транзитивности автоматных отображений на словах конечной длины для инициальных автоматов из групп AS_p . Особенностью данного алгоритма является его независимость от длин рассматриваемых слов. Даны результаты численных экспериментов и точная верхняя граница сложности представленного алгоритма.

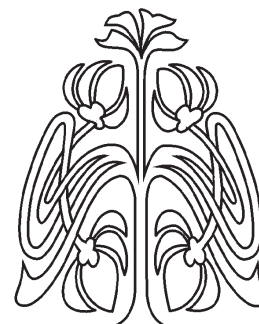
Ключевые слова: конечные автоматы, транзитивность, автоматные отображения, группы AS_p .

DOI: 10.18500/1816-9791-2017-17-1-85-95

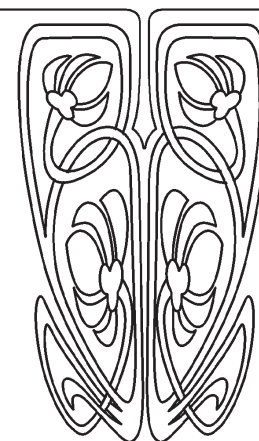
ВВЕДЕНИЕ

Под *детерминированным автоматом* будем понимать пятёрку объектов $A = (S, X, Y, \delta, \lambda)$, где S — множество состояний, X — входной алфавит, Y — выходной алфавит, $\delta : S \times X \rightarrow S$ — функция переходов, $\lambda : S \times X \rightarrow Y$ — функция выходов. Для рассматриваемых в работе автоматов входной и выходной алфавиты совпадают и равны $\mathbb{F}_p = \{0, 1, \dots, p-1\}$, где p — простое.

Автомат с выделенным начальным состоянием называют *инициальным*. Инициальный автомат будем обозначать через A_s , где s — начальное состояние автомата.



НАУЧНЫЙ
ОТДЕЛ





Пусть X^* обозначает множество всех конечных слов над алфавитом X . Действие функций δ и λ можно расширить на множество слов X^* следующими рекуррентными правилами:

$$\begin{aligned}\delta(s, x \cdot w) &= \delta(\delta(s, x), w), & \lambda(s, x \cdot w) &= \lambda(s, x) \cdot \lambda(\delta(s, x), w), \\ x &\in X, & w &\in X^*, \quad e \text{ — пустой символ.}\end{aligned}$$

Преобразование $f : X^* \rightarrow X^*$ называется (синхронно) автоматным, если существует задающий его инициальный автомат A_s [1]. В дальнейшем если автомат ясен из контекста, будем обозначать автоматное отображение f_{A_s} через f_s или же просто как f (если и начальное состояние автомата следует из контекста).

Автоматное отображение f называют *транзитивным на словах длины k* , если оно порождает одноцикловую перестановку на X^k . Отображение f *транзитивно*, если оно транзитивно на X^k для любого натурального k .

Транзитивные отображения представляют значительный интерес в силу того, что применяются для решения как теоретических, так и практических задач. В частности, описаны семейства транзитивных автоматных отображений [2, 3].

1. ОБЩИЕ СВОЙСТВА АВТОМАТНЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ

Покажем основные свойства автоматных отображений, представляющие интерес в контексте данной работы.

Перед тем как перейти к дальнейшим рассуждениям, следует указать критерий биективности автоматного отображения (в силу очевидной связи между свойствами биективности и транзитивности отображений).

Будем называть s *состоянием с потерей* [4], если существуют такие $x_1, x_2 \in X$, что $x_1 \neq x_2$ и $\lambda(s, x_1) = \lambda(s, x_2)$.

Теорема 1 (см. [5]). Автоматное отображение $f_{A_s} : X^* \rightarrow X^*$ биективно на X^k тогда и только тогда, когда автомат A_s не содержит состояний с потерей, достижимых из s за k шагов.

Таким образом, из теоремы 1 становится понятно, что искать автоматы, порождающие транзитивные отображения, следует лишь среди автоматов, с каждым состоянием которых связана перестановка элементов входного алфавита. Далее будем рассматривать только инициальные автоматы, порождающие биективные отображения.

Под *перестановкой* множества X будем понимать биекцию $X \rightarrow X$. Для перестановок определена операция композиции \circ такая, что для $\psi = \pi \circ \sigma$ справедливо, что $\psi(x) = \pi(\sigma(x))$.

В силу того что мы рассматриваем только такие инициальные автоматы, которые порождают биективные автоматные отображения, имеет место следующий факт: для автомата A_s с каждым достижимым из s состоянием s' (включая само s) связано такое автоматное отображение $f_{s'}$, что $f_{s'}$ действует биективно на словах длины 1, т. е. $f_{s'}$ осуществляет перестановку множества X . Будем обозначать данную перестановку через $\sigma_{s'}$.

Действие инициального конечного автомата на входные последовательности можно описать с помощью бесконечного сбалансированного дерева [6]. Обозначим дерево, ассоциированное с действием автомата A_s , символом $T(A_s)$.



Обозначим через $T(A_s, k)$ мультимножество состояний автомата A , где состояние s' входит в $T(A_s, k)$ ровно столько раз, со сколькими вершинами k -го яруса (нумерация ярусов начинается с нуля) $T(A_s)$ ассоциировано состояние s' .

Рассмотрим итерацию слова $w \in X^k$ автоматным отображением f_{A_s} . Пусть $f_{A_s}(w) = w_1, f_{A_s}(f_{A_s}(w)) = w_2, \dots, f_{A_s}^m(w) = w$ и m наименьшее из возможных (m существует в силу биективности f_{A_s}). Слова $w, w_1, w_2, \dots, w_{m-1}$ описывают последовательность вершин k -го яруса дерева $T(A_s)$, возникающую при итерации слова w . С данными вершинами $T(A_s)$ связаны состояния $s_{\delta(s,w)}, s_{\delta(s,w_1)}, \dots, s_{\delta(s,w_{m-1})}$ автомата A .

Составим кортеж из перестановок $\sigma_{\delta(s,w)}, \sigma_{\delta(s,w_1)}, \dots, \sigma_{\delta(s,w_{m-1})}$, ассоциированных с состояниями $s_{\delta(s,w)}, s_{\delta(s,w_1)}, \dots, s_{\delta(s,w_{m-1})}$. Обозначим данный кортеж через $Ar(T(A_s), w)$, т. е. $Ar(T(A_s), w)$ описывает то, как автомат A_s будет преобразовывать $(k+1)$ -й символ последовательности $w \cdot a$ при её итерировании отображением f_{A_s} . Отметим, что если f_{A_s} транзитивно на словах из $X^{|w|}$, то в кортеже $Ar(T(A_s), w)$ будет ровно $p^{|w|}$ элементов.

Лемма 1. *Автоматное отображение f_{A_s} действует транзитивно на словах длины $k+1$, где $k \in \mathbb{N}$, тогда и только тогда, когда одновременно выполняются следующие условия:*

- 1) f_{A_s} действует транзитивно на словах длины k ;
- 2) для любого слова $w \in X^k$ композиция $\sigma_{\delta(s,w_1)} \circ \sigma_{\delta(s,w_2)} \circ \dots \circ \sigma_{\delta(s,w_{p^k})}$ элементов $Ar(T(A_s), w)$ является одноцикловой перестановкой.

Доказательство. Обозначим $\sigma_{\delta(s,w_1)} \circ \sigma_{\delta(s,w_2)} \circ \dots \circ \sigma_{\delta(s,w_{p^k})}$ символом ψ . Тогда

$$\forall a \in X : f_{A_s}^{p^k}(w \cdot a) = w \cdot \psi(a).$$

Покажем *достаточность*. Пусть условие леммы выполняется, т. е. для слов длины $k \in \mathbb{N}$ отображение f_{A_s} действует транзитивно и ψ есть одноцикловая перестановка множества X . Следовательно, если ψ есть одноцикловая перестановка X , то $f_{A_s}^{p^k \cdot p}(w \cdot a) = w \cdot \psi^p(a) = w \cdot a$, т. е. f_{A_s} действует транзитивно на словах длины $k+1$.

Покажем *необходимость*. Пусть не выполняется первое условие леммы, тогда отображение f_{A_s} не действует транзитивно на словах длины $k \in \mathbb{N}$, т. е. существует такое число $m \in \mathbb{N}$, что $m \bmod p^k \neq 0$ и $f_{A_s}^m(w) = w$.

Возьмём символ $a \in X$ и рассмотрим слово $w \cdot a \in X^{k+1}$. Тогда $f_{A_s}^m(w \cdot a) = w \cdot \psi(a)$. В силу того что $m \bmod p^k \neq 0$, найдётся такое слово $w' \in X^k$, для которого не существует $c \in \mathbb{N}$ такого, что $f_{A_s}^c(w) = w'$. Следовательно, не существует $d \in \mathbb{N}$ такого, что $f_{A_s}^d(w \cdot a) = w' \cdot a'$, где a' есть произвольный элемент X . Что противоречит определению транзитивности на словах фиксированной длины.

Теперь пусть не выполняется второе условие леммы, т. е. ψ не является одноцикловой перестановкой (не выполняется второе условие леммы) для некоторого k . Рассмотрим символы $a, b \in X$ такие, что $a \neq b$, и пусть не существует такого числа $c \in \mathbb{N}$, что $\psi^c(a) = b$. Тогда для слова $w \cdot a \in X^{k+1}$ не существует такого числа $d \in \mathbb{N}$, что $f_{A_s}^d(w \cdot a) = w \cdot b$. Следовательно, f_{A_s} не транзитивно на словах длины $k+1$. \square

Из леммы 1 следует, что для проверки транзитивности автоматного отображения требуется построение композиции элементов из $Ar(T(A_s), w)$ для любого натурального k и для всех возможных слов $w \in X^k$. Это требование возникает в силу того, что операция \circ (композиции перестановок) в общем случае не коммутативна, т. е. $\sigma \circ \pi \neq \pi \circ \sigma$.



2. ПОСТРОЕНИЕ АЛГОРИТМА

Покажем, что существуют автоматы, для которых можно обойти описанные выше ограничения на явное вычисление $Ar(T(A_s), w)$.

Заметим, что для каждого простого p существует циклическая группа перестановок $\langle \sigma_+(p) \rangle$, где $\sigma_+(p)$ — образующий элемент группы и $\sigma_+(p) = (0, \dots, (p-1))$ [7]. Инициальные автоматы, где с каждым состоянием связана перестановка из $\langle \sigma_+(p) \rangle$, образуют группу AS_p [8]. В качестве групповой операции используется последовательное соединение автоматов. Стоит отметить, что AS_2 совпадает с классом инициальных автоматов, определяющих биективные отображения на алфавите $\{0, 1\}$.

Важным является тот факт, что $\langle \sigma_+(p) \rangle$ — абелева группа, т.е. операция \circ для перестановок из данной группы является коммутативной. Далее, используя свойство коммутативности операции \circ для перестановок из $\langle \sigma_+(p) \rangle$, будет построен алгоритм определения транзитивности для инициальных автоматов из групп AS_p .

Тут и далее под автоматом будем понимать автомат из группы AS_p .

Пусть автомат A_s действует транзитивно на словах длины k . Следовательно, во-первых, количество элементов в кортеже $Ar(T(A_s), w)$ будет равно p^k . Во-вторых, $Ar(T(A_s), w)$ будет являться некоторым упорядочиванием мультимножества перестановок, ассоциированных с состояниями из $T(A_s, k)$. Более того, в силу коммутативности перестановок из $\langle \sigma_+(p) \rangle$ композиции элементов из $Ar(T(A_s), w)$ будут совпадать для всех возможных w , т.е. композиция элементов $Ar(T(A_s), w)$ будет однозначно определяться мультимножеством $T(A_s, k)$ и не будет зависеть от выбора w . Данный факт имеет важное значение для построения алгоритма.

Чтобы показать, что некоторый автомат A_s действует транзитивно на словах длины $k+1$, по лемме 1 нам необходимо знать, что A_s действует транзитивно на словах длины k и проверить одноцикловость перестановок, порождаемых всеми возможными $Ar(T(A_s), w)$, $w \in X^k$.

Достаточно проверить, что композиция перестановок (в произвольном порядке), ассоциированных с состояниями из $T(A_s, k)$, является одноцикловой. Построим алгоритм, который будет последовательно проверять одноцикловость перестановок, ассоциированных с $T(A_s, k)$.

Для построения данного алгоритма введём матрицы M и \widehat{M} , а также векторы V_σ и R . Использование данных объектов преследует две основные цели. Во-первых, это получение критерия останова алгоритма. Во-вторых, представление автоматов в матричном виде, являющемся более удобным для обработки вычислительными устройствами.

2.1. Матрица M и векторы V_σ, R

Первой задачей, которую требуется решить, будет построение $T(A_s, k)$.

По таблице переходов конечного автомата A построим матрицу смежности M размерности $n \times n$, где n — количество состояний в автомате A . С целью сопоставления строк и столбцов матрицы M с состояниями автомата A , пронумеруем состояния автомата A числами от 1 до n и будем отождествлять i -е состояние автомата с i -й строкой и i -м столбцом матрицы. Значения ячеек матрицы M вычисляются как мощности множеств $\{x \mid x \in X, \delta(s_i, x) = s_j\}$, где i — номер строки матрицы, j — номер столбца матрицы.

Из построения M следует, что в ячейках матрицы M^k будет располагаться количество слов длины k , переводящих i -е состояние в j -е. i -я строка матрицы M^k будет



полностью описывать набор состояний, достижимых из i -го за k шагов. M^0 обозначает единичную матрицу размерности $n \times n$. Таким образом, i -я строка матрицы M^k описывает $T(A_{s_i}, k)$.

Матрица M^k описывает лишь количество различных состояний, достижимых на k -м шаге. Для проверки транзитивности необходимо определить перестановку, описываемую композицией перестановок, ассоциированных с состояниями из $T(A_s, k)$.

Для решения данной задачи построим вектор V_σ следующим образом. Как уже было отмечено выше, с состоянием s_i автомата связана некоторая перестановка τ_i из $\langle \sigma_+(p) \rangle$. Следовательно, в силу цикличности группы $\langle \sigma_+(p) \rangle$ $\tau_i = \sigma_+(p)^{h_i}$, $h_i = (0, \dots, p-1)$. Сопоставим i -му элементу вектора V_σ число h_i . $R_k = M^k \times V_\sigma^T$, где i -й элемент есть степень перестановки $\sigma_+(p)$, получаемой при композиции перестановок, ассоциированных с $T(A_{s_i}, k)$.

Например, $V_{\sigma_B} = (1 \ 0 \ 1 \ 0 \ 1 \ 0)$, $(M_B \times V_{\sigma_B}^T)^T = (1 \ 0 \ 1 \ 0 \ 1 \ 2)$.

Таким образом, задача проверки транзитивности сводится к последовательному сравнению с нулём значений i -х ячеек R_k , $k \geq 1$ для заданной вершины автомата. Если i -я ячейка вектора R_k равняется нулю, то композиция соответствующих перестановок есть тождественная подстановка, что ведёт к неудовлетворению автоматом с начальным состоянием s_i условию леммы 1 и, как следствие, отсутствию транзитивности на словах длины k . Основной проблемой использования матрицы M является тот факт, что количество попарно различных матриц M^k , где $k \in \mathbb{N}$, — бесконечно.

2.2. Матрица \widehat{M}

Построим матрицу \widehat{M} из M следующим образом. Каждой ячейке m_{ij} матрицы M сопоставим ячейку $\widehat{m}_{ij} = m_{ij} \bmod p$. Обозначим это как $\widehat{M} = M \bmod p$. Также определим возведение \widehat{M} в k -ю степень как $\widehat{M}^k = \underbrace{(\widehat{M} \times \dots \times \widehat{M})}_k \bmod p$.

Для степенных последовательностей вида A, A^2, A^3, \dots будем использовать обозначение $Seq(A) = a_1 a_2 \dots$, где a_i из $Seq(A)$ равняется A^i .

Лемма 2. Пусть $\widehat{R}_k = \widehat{M}^k \times V_\sigma^T$. Тогда $r_i^k \bmod p = \widehat{r}_i^k$.

Доказательство. По построению $r_i^k = \sum_{j=1}^n m_{ij}^k \cdot V_{\sigma_j}^T$. Тогда

$$r_i^k \bmod p = \left(\sum_{j=1}^n m_{ij}^k \cdot V_{\sigma_j}^T \right) \bmod p = \sum_{j=1}^n (m_{ij}^k \cdot V_{\sigma_j}^T \bmod p) \bmod p = \widehat{r}_i^k.$$

Что и требовалось показать. □

Следствие. Для любого $k \in \mathbb{N}$ справедливо, что $\widehat{M}^k = M^k \bmod p$.

Из построения матрицы \widehat{M} следует оценка сверху общего числа попарно различных матриц, которые могут входить в $Seq(\widehat{M})$.

Для получения следующей оценки достаточно вспомнить формулу размещений с повторениями.

Лемма 3. Количество попарно различных матриц \widehat{M} для фиксированных p и n конечно и равняется p^{n^2} , где n — количество состояний автомата.



Но тогда справедливо, что существуют числа $d, c \in \mathbb{N}$ такие, что $\widehat{M}^d = \widehat{M}^{c \cdot d}$. Другими словами, начиная с некоторого шага d , последовательность $Seq(\widehat{M})$ является периодической. Следовательно, для проверки транзитивности достаточно найти период последовательности $Seq(\widehat{M})$ и проверить неравенство нулю i -го элемента каждого вектора из $Seq(\widehat{R})$, соответствующих периоду и предпериоду $Seq(\widehat{M})$.

2.3. Общий ход алгоритма

Составим на основе представленных ранее результатов алгоритм проверки транзитивности автомата A_{s_i} .

Вход: Конечный автомат $A_{s_i} \in AS_p$.

Выход: **True**, если отображение, связанное с A_{s_i} , транзитивно. **False** в ином случае.

1. Построить матрицу \widehat{M} и вектор V_σ ;
2. Если i -й элемент V_σ равен 0 — завершить работу и вернуть **False**;
3. Положим $k = 1, L = \emptyset$;
4. Если $\widehat{M}^k \in L$, то завершить работу и вернуть **True**;
5. $\widehat{R}^k = \widehat{M}^k \times V_\sigma^T$;
6. Если i -й элемент \widehat{R}^k сравним с нулём по модулю p , то завершить работу и вернуть **False**;
7. Добавить \widehat{M}^k в L , увеличить k на 1;
8. Перейти к шагу 4.

Рассмотрим принцип работы представленного алгоритма.

На шаге 2 производится проверка того, что автомат A_{s_i} действует транзитивно на словах длины 1. Если это не так, то выводится **False**.

Шаги с 4-го по 8-й производят последовательную проверку того, что автомат A_{s_i} действует транзитивно на словах длины 2, 3, ... Для этого используется критерий из леммы 1 с уточнениями из параграфа 2. Действительно, на каждой итерации по 4–8 шагам, производится построение вектора \widehat{R}^k и проверка того, что i -й элемент \widehat{R}^k не равен 0. Если же i -й элемент \widehat{R}^k равен нулю, что соответствует случаю, когда композиция перестановок, порождаемая $T(A_s, k)$, есть тождественная подстановка на X , то алгоритм возвращает **False**.

Если же алгоритм возвращает **True**, то это означает, что найдено такое k , что матрица \widehat{M}^k уже была встречена ранее, т. е. найден период и предпериод последовательности $Seq(\widehat{M})$. Следовательно, для каждого элемента из $Seq(\widehat{R})$ мы проверили, что i -й элемент не равен нулю.

В описанном алгоритме происходит определение свойства транзитивности сразу для всех инициальных автоматов, определяемых автоматом A . Если же интерес представляет какое-либо конкретное состояние автомата, тогда имеет смысл использовать вместо всей матрицы \widehat{M} только i -ю строку \widehat{M} . Это значительно сокращает количество арифметических операций, требуемых для выполнения одного прохода по 4–8 шагам алгоритма.



3. ОЦЕНКА СЛОЖНОСТИ

После формализации общего хода алгоритма перейдём к уточнению оценки сложности. Как следует из описания, каждый проход алгоритма по 4–8 шагам имеет полиномиальную сложность, так как выполняется умножение матриц фиксированной размерности (относительно количества состояний автомата), а умножение матриц, как известно, имеет полиномиальную сложность.

Следовательно, основным вопросом, на котором стоит остановиться подробнее, является количество проходов алгоритма по шагам 4–8. Оно не превышает числа p^{n^2} . Данная оценка является достаточно грубой и может быть улучшена.

3.1. Экспериментальная оценка

В целях оценки числа требуемых умножений матриц были проведены численные эксперименты. При проведении каждого эксперимента использовался фиксированный класс автоматов, определяемый числом состояний автомата — n и числом входных и выходных символов автомата — p . В ходе экспериментов для каждой из матриц \widehat{M} производилось вычисление количества умножений матриц до останова алгоритма. Результаты экспериментов представлены в таблице. Оказалось, что оценка числа умножений, представленная в лемме 3, не достигается на практике.

Количество матриц \widehat{M} и среднее число умножений до останова алгоритма

| p | n | Число матриц \widehat{M} | Среднее число умножений до останова алгоритма |
|-----|-----|----------------------------|---|
| 2 | 2 | 4 | 1 |
| 2 | 3 | 64 | 1.9375 |
| 2 | 4 | 4096 | 3.17041 |
| 2 | 5 | 1048567 | 4.88959 |
| 3 | 2 | 9 | 1.44444 |
| 3 | 3 | 729 | 3.631 |
| 3 | 4 | 531441 | 7.72993 |
| 5 | 2 | 25 | 2.52 |
| 5 | 3 | 15625 | 8.61779 |

3.2. Теоретическая оценка

Обозначим через m_i^k i -ю строку матрицы M^k . На шестом шаге алгоритма производится проверка значения r_i^k . При этом, что

$$r_i^k = (\widehat{m}_{i1}^{k-1} \dots \widehat{m}_{im}^{k-1}) \times \widehat{M} \times V_\sigma^T,$$

т. е. для вычисления r_i^k достаточно знать i -ю строку матрицы \widehat{M}^{k-1} . Тогда проверку совпадения \widehat{M}^k с одной из матриц $\widehat{M}, \dots, \widehat{M}^{k-1}$ можно проводить независимо для каждой из строк. Другими словами, достаточно проверять не совпадение матрицы \widehat{M}^k с одной из предыдущих матриц, а совпадение \widehat{m}_i^k со строками $\widehat{m}_i, \widehat{m}_i^2, \dots, \widehat{m}_i^{k-1}$.



Лемма 4. Максимальное число умножений, требуемое для останова алгоритма, ограничено сверху числом p^n .

В таком случае интерес представляют возможные значения i -й строки матриц из $Seq(\widehat{M}^k)$. Пусть $e_i^k(\widehat{M}) = \sum_{j=1}^n \widehat{m}_{ij}^k$.

Лемма 5. Для любой матрицы \widehat{M} справедливо, что

$$e_i^k(\widehat{M}) \bmod p = 0, \quad i \in \overline{1, n}, \quad k > 0. \quad (1)$$

Доказательство. Проведём доказательство по индукции. Для $k = 1$ утверждение леммы справедливо по построению \widehat{M} .

Пусть для \widehat{m}_i^k условие леммы выполняется, где $k > 1$.

Рассмотрим $\widehat{m}_i^{k+1} = \widehat{m}_i^k \cdot \widehat{M} \bmod p$. Из определения \widehat{M}^{k+1} и свойств операции умножения матриц получаем, что

$$\widehat{m}_i^{k+1} = (\widehat{m}_{i1}^k \cdot \widehat{m}_{1j} + \widehat{m}_{i2}^k \cdot \widehat{m}_{2j} + \dots + \widehat{m}_{in}^k \cdot \widehat{m}_{nj}) \bmod p.$$

Выразим $e_i^{k+1}(\widehat{M}) \bmod p$ через \widehat{m}_i^k и $e_1^1(\widehat{M}), \dots, e_n^1(\widehat{M})$:

$$\begin{aligned} e_i^{k+1}(\widehat{M}) &= \sum_{j=1}^n \widehat{m}_{ij}^{k+1} = \\ &= \widehat{m}_{i1}^k \underbrace{(\widehat{m}_{11} + \dots + \widehat{m}_{1n})}_{e_1^1(\widehat{M})} \bmod p + \dots + \widehat{m}_{in}^k \underbrace{(\widehat{m}_{n1} + \dots + \widehat{m}_{nn})}_{e_n^1(\widehat{M})} \bmod p = \\ &= \sum_{j=1}^n (\widehat{m}_{ij}^k \cdot e_j^1(\widehat{M}) \bmod p). \end{aligned}$$

В силу того что для любого $j \in \overline{1, n}$ $e_j^1(\widehat{M}) \bmod p = 0$, имеем $e_i^{k+1}(\widehat{M}) \bmod p = 0$. \square

Теорема 2. Максимальное число умножений матриц, требуемое для останова алгоритма, ограничено сверху числом $p^{n-1} - 1$.

Доказательство. Покажем справедливость теоремы по индукции числа состояний автомата.

Следует отметить тот факт, что в силу построения матриц \widehat{M} элементами $Seq(\widehat{M})$ могут быть только матрицы, удовлетворяющие условию (1).

Равенству (1) удовлетворяет только нулевая матрица \widehat{M} для $n = 1$, что соответствует утверждению теоремы. Действительно, нулевой вектор \widehat{m}_i^k даст (в результате умножения $\widehat{M}^k \times V_\sigma^T$) нулевое значение \widehat{r}_i^k , что приведёт к останову алгоритма без проверки повтора матрицы.

Пусть для некоторого $n > 1$ условие теоремы справедливо. Покажем, что утверждение теоремы справедливо и для автомата с $n + 1$ состояниями.

Возьмём произвольный вектор $v = (x_1 \ x_2 \ \dots \ x_n)$, удовлетворяющий условию (1) и составим вектор $v' = (x_1 \ x_2 \ \dots \ ((x_n + p - x_{n+1}) \bmod p) \ x_{n+1})$, $x_{n+1} \in \{0, 1, \dots, p - 1\}$ путём добавления $(n + 1)$ -го элемента. Тогда справедливо, что $x_i \in \{0, \dots, p - 1\}$, где $i \in \overline{1, n + 1}$.



Заметим, что имеет смысл рассмотрение только одного варианта добавления элемента (с точки зрения позиции добавления), так как в силу произвола выбора v данным способом можно получить все возможные вектора длины $n + 1$, удовлетворяющие условию (1).

Покажем, что сумма элементов v' кратна p .

Пусть $x_n + (p - x_{n+1}) < p$, тогда $\sum_{i=1}^{n+1} x'_i = p + \sum_{i=1}^n x_i$. Следовательно, сумма элементов v' кратна p .

Пусть $x_n + (p - x_{n+1}) \geq p$. Тогда

$$\begin{aligned} ((x_n + p - x_{n+1}) \bmod p + x_{n+1}(\bmod p)) \bmod p = \\ = (x_n + (p - x_{n+1}) + x_{n+1}) \bmod p = x_n. \end{aligned}$$

Следовательно, сумма элементов вектора v' равна сумме элементов вектора v .

Таким образом, перебирая все p^{n-1} (включая нулевой) векторов v , получаем, что для каждого вектора имеется ровно p вариантов расширения длины. Тогда количество различных векторов v' равняется p^n , что при вычитании нулевого вектора удовлетворяет условию теоремы. \square

Полученная в теореме 2 оценка числа умножений была достигнута на практике и является точной верхней границей количества умножений.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Представленный в статье алгоритм, несмотря на его экспоненциальную сложность, может представлять практический интерес с той точки зрения, что его трудоёмкость не зависит от длины входных слов. Следовательно, представленный алгоритм можно с успехом применять для проверки транзитивности автоматного отображения в случаях, когда входные слова могут иметь значительные длины или когда заранее не известны требуемые длины входных слов.

Библиографический список

1. Григорчук Р. И., Некрашевич В. В., Суцанский В. И. Автоматы, динамические системы и группы // Динамические системы, автоматы и бесконечные группы : сб. ст. Тр. МИАН. Т. 231. М. : Наука, 2000. С. 134–214.
2. Тяпаев Л. Б. Транзитивные семейства автоматных отображений // Дискретные модели в теории управляющих систем : тр. IX Междунар. конф. (Москва и Подмоскowie, 20–22 мая 2015 г.); отв. ред. В. Б. Алексеев, Д. С. Романов, Б. Р. Данилов. М. : МАКС Пресс, 2015. С. 244–247.
3. Туараев Л. В. Transitive families and measure-preserving an N-unit delay mappings // Компьютерные науки и информационные технологии : материалы Междунар. науч. конф. Саратов : Издат. центр «Наука», 2016. С. 425–429.
4. Гилл А. Введение в теорию конечных автоматов. М. : Наука, 1966. 272 с.
5. Карандашов М. В. Исследование биективных автоматных отображений на кольце вычетов по модулю 2^k // Компьютерные науки и информационные технологии : материалы Междунар. науч. конф. Саратов : Издат. центр «Наука», 2014. С. 148–152.
6. Яблонский С. В. Введение в дискретную математику : учеб. пособие для вузов. М. : Наука ; Гл. ред. физ.-мат. лит., 1986. 384 с.
7. Калужин Л. А., Суцанский В. И. Преобразования и перестановки : пер. с укр. М. : Наука ; Гл. ред. физ.-мат. лит., 1985. 160 с.



8. Алешин С. В. Конечные автоматы и проблема Бернсайда о периодических группах // Матем. заметки. 1972. Т. 11, № 3. С. 319–328.

Образец для цитирования:

Карандашов М. В. Алгоритм проверки транзитивности отображений, ассоциированных с конечными автоматами из групп AS_p // Изв. Саратов. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2017. Т. 17, вып. 1. С. 85–95. DOI: 10.18500/1816-9791-2017-17-1-85-95.

The Algorithm for Checking Transitivity of Mappings Associated with the Finite State Machines from the Groups AS_p

M. V. Karandashov

Maksim V. Karandashov, Saratov State University, 83, Astrakhanskaya str., 410012, Saratov, Russia, norg113@gmail.com

The paper deals with a question of determining the property of transitivity for mappings defined by finite automata. A criterion of transitivity for mappings defined by finite automata on the words of finite length in terms of finite automata and trees of deterministic functions is presented. It is shown that for finite automata from groups AS_p an algorithm can be constructed for checking transitivity. To prove this fact some properties of Abelian groups of permutations are used. Based on these results a matrix algorithm is constructed for checking transitivity of mappings associated with initial automata from groups AS_p . The special feature of this algorithm is its independence from lengths of the considered words. Results of numerical experiments and the upper bound of complexity of the algorithm are presented.

Key words: finite state machine, transitivity, automata mapping, AS_p groups.

References

1. Grigorchuk R. I., Nekrashevych V. V., Sushchanskii V. I. Automata, Dynamical Systems and Groups. *Proc. Steklov Inst. Math.*, 2000, vol. 231, pp. 128–203 (in Russian).
2. Тураев Л. В. Транзитивные семейства автоматов отображений [Transitive family automaton mappings]. *Компьютерные науки и информационные технологии : материалы Междунар. науч. конф.* [Computer Science and Information Technologies : Proc. Intern. Sci. Conf.]. Saratov, Publ. center “Nauka”, 2014, pp. 244–247 (in Russian).
3. Тураев Л. В. Транзитивные семейства и сохраняющие меру N -единичные задерживающие отображения. *Компьютерные науки и информационные технологии : материалы Междунар. науч. конф.* [Computer Science and Information Technologies : Proc. Intern. Sci. Conf.]. Saratov, Publ. Center “Nauka”, 2016, pp. 425–429. (in Russian).
4. Gill A. *Introduction to the theory of finite-state machines*. New York, Toronto, Ontario, London, McGraw-Hill Book Co., Inc., 1962. 207 p. (Russ. ed. : Gill A. *Введение в теорию конечных автоматов*. Moscow, Nauka, 1966. 272 p.)
5. Karandashov M. V. Исследование биективных автоматов отображений на кольце вычетов по модулю 2^k [Research bijective automaton mappings on the ring of residues modulo 2^k]. *Компьютерные науки и информационные технологии : материалы Междунар. науч. конф.* [Computer Science and Information Technologies : Proc. Intern. Sci. Conf.]. Saratov, Publ. Center “Nauka”, 2014, pp. 148–152 (in Russian).



6. Yablonsky S. V. *Vvedenie v diskretnuiu matematiku : Ucheb. posobie dlia vuzov* [Introduction to Discrete Mathematics : Textbook. manual for schools]. Moscow, Nauka, 1986. 384 p. (in Russian).
7. Kaluzhin L. A., Sushchanskii V. I. *Preobrazovaniia i perestanovki: Per. s ukr.* [Transformations and permutations : Trans. RBM]. Moscow, Nauka, 1985. 160 p. (in Russian).
8. Aleshin S. V. Finite automata and Burnside's problem for periodic groups. *Math. Notes*, 1972, vol. 11, iss. 3, pp. 199–203. DOI: 10.1007/BF01098526.

Cite this article as:

Karandashov M. V. The Algorithm for Checking Transitivity of Mappings Associated with the Finite State Machines from the Groups AS_p . *Izv. Saratov Univ. (N.S.), Ser. Math. Mech. Inform.*, 2017, vol. 17, iss. 1, pp. 85–95 (in Russian). DOI: 10.18500/1816-9791-2017-17-1-85-95.



УДК 519.872

МЕТОД АНАЛИЗА ЗАМКНУТЫХ СЕТЕЙ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ С ДИСКРЕТНЫМ ВРЕМЕНЕМ, ГРУППОВЫМИ ПЕРЕХОДАМИ ТРЕБОВАНИЙ И ДИНАМИЧЕСКИМ УПРАВЛЕНИЕМ ИНТЕНСИВНОСТЯМИ ОБСЛУЖИВАНИЯ

Ю. И. Митрофанов¹, В. И. Долгов², Е. С. Рогачко³, Е. П. Станкевич⁴

¹Митрофанов Юрий Иванович, доктор технических наук, заведующий кафедрой системного анализа и автоматического управления, Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского, Россия, 410012, Саратов, Астраханская, 83, MitrophanovYul@info.sgu.ru

²Долгов Виталий Игоревич, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры системного анализа и автоматического управления, Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского, Россия, 410012, Саратов, Астраханская, 83, www@vidolgov.ru

³Рогачко Екатерина Сергеевна, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры системного анализа и автоматического управления, Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского, Россия, 410012, Саратов, Астраханская, 83, RogachkoES@info.sgu.ru

⁴Станкевич Елена Петровна, старший преподаватель кафедры системного анализа и автоматического управления, Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского, Россия, 410012, Саратов, Астраханская, 83, StankevichElena@mail.ru

Рассматриваются однородные замкнутые сети массового обслуживания с дискретным временем и групповыми переходами требований. Системы обслуживания включают несколько одинаковых обслуживающих приборов с геометрическим распределением длительностей обслуживания. Предлагается метод динамического управления интенсивностями обслуживания требований в системах. Управление осуществляется посредством использования в процессе функционирования сетей различных интенсивностей обслуживания в течение интервалов времени определенной длительности. При использовании данного метода в сетях обслуживания рассматриваемого класса обеспечивается близкое к заданному распределение требований по системам. Предлагаются модели эволюции и методы анализа однородных замкнутых сетей массового обслуживания с дискретным временем и групповыми переходами требований без управления и с управлением интенсивностями обслуживания. Эти методы обеспечивают возможность вычисления основных стационарных характеристик сетей обслуживания рассматриваемых классов. Приводится пример сети обслуживания с управлением интенсивностями обслуживания. Результаты анализа этой сети показали эффективность метода управления интенсивностями обслуживания и приемлемую для практических приложений точность метода анализа.

Ключевые слова: замкнутые сети массового обслуживания, геометрическое распределение длительностей обслуживания, групповые переходы требований, управление интенсивностями обслуживания, анализ сетей массового обслуживания, стационарные характеристики.

DOI: 10.18500/1816-9791-2017-17-1-96-108



ВВЕДЕНИЕ

Системы и сети массового обслуживания с дискретным временем в настоящее время широко используются в качестве математических моделей сложных стохастических систем с сетевой структурой, функционирующих в дискретном времени, например, телекоммуникационных и вычислительных систем и сетей [1–4]. Эволюция сложных стохастических сетевых систем и устранение негативного влияния на качество их функционирования случайных факторов, событий и процессов обеспечивается, как правило, использованием в таких системах развитых подсистем управления. Необходимость решения практических задач, связанных с разработкой, модификацией и исследованием таких систем и созданием их математических моделей, обусловила интенсивное развитие теории и методов анализа сетей массового обслуживания с управлением. В частности, одной из актуальных проблем в этой области является разработка и развитие методов динамического управления интенсивностями обслуживания требований, а также разработка методов анализа сетей обслуживания с такими методами управления. Большинство результатов, связанных с разработкой методов управления интенсивностями обслуживания и методов анализа сетей обслуживания с управлением, получено для сетей массового обслуживания с непрерывным временем, в том числе для экспоненциальных сетей, или сетей Джексона [5–10].

В данной статье рассматривается метод динамического управления интенсивностями обслуживания в однородной замкнутой сети массового обслуживания с дискретным временем и групповыми переходами требований. При его разработке предполагалось, что в сети обслуживания используется централизованная система управления, обеспечивающая идентификацию состояний сети обслуживания в заданные моменты времени и формирование зависящих от этих состояний управляющих воздействий на сеть. Групповые переходы требований между системами сети массового обслуживания являются особенностями сетей с дискретным временем и вызваны возможностью одновременного завершения обслуживания нескольких требований в системах и групповых поступлений требований в системы сети, происходящих в дискретные моменты времени [11–15]. Стационарное распределение сети массового обслуживания с групповыми переходами требований вычисляется как стационарное распределение модельной цепи Маркова, описывающей эволюцию сети [16]. Для моделирования эволюции рассматриваемой сети массового обслуживания с управлением интенсивностями обслуживания также используются цепи Маркова, приводится метод вычисления стационарных характеристик сети. Дается пример анализа гипотетической сети массового обслуживания рассматриваемого типа.

1. ОПИСАНИЕ СЕТИ С ГРУППОВЫМИ ПЕРЕХОДАМИ ТРЕБОВАНИЙ

Пусть N — замкнутая сеть массового обслуживания, содержащая L систем массового обслуживания S_i , $i \in I = \{1, \dots, L\}$, и H требований одного класса. Вероятности перехода требований между системами сети определяются неприводимой маршрутной матрицей $\Theta = (\theta_{ij})$, $i, j = 1, \dots, L$. Система S_i , $i = 1, \dots, L$, включает κ_i одинаковых обслуживающих приборов и бункер емкости $H - \kappa_i$; $K = \sum_{i=1}^L \kappa_i$. Состояние сети N определяется вектором $s = (s_i)$, $i = 1, \dots, L$, где s_i — число требований, находящихся в системе S_i ; множество X состояний сети имеет мощность



$c_X = |X|$; обозначим через $s^{(n)} \in X$ состояние сети с номером n , $n \in B = \{1, \dots, c_X\}$. В системе S_i , $i \in I$, число занятых обслуживающих приборов h_i , число свободных обслуживающих приборов g_i и число находящихся в бункере требований b_i зависят от числа требований s_i и

$$h_i = \min\{s_i, \kappa_i\}, \quad g_i = \kappa_i - h_i, \quad b_i = \max\{0, s_i - \kappa_i\}.$$

Все события в системах сети, связанные с завершением обслуживания требований, уходом и поступлением групп требований, поступлением требований из бункеров на свободные обслуживающие приборы, происходят в дискретные моменты времени, интервалы между которыми называются слотами. Длительность каждого слота является фиксированной и полагается равной единице. Длительность обслуживания требований во всех системах S_i , $i \in I$, равная целому числу слотов, является дискретной случайной величиной ξ_i с геометрическим распределением с параметром μ_i , $0 < \mu_i < 1$, принимающей значения $k = 1, 2, \dots$ с вероятностями

$$P\{\xi_i = k\} = (1 - \mu_i)^{k-1} \mu_i.$$

Из данной формулы при $k = 1$ следует, что вероятность завершения обслуживания требования в слоте равна μ_i . Интенсивность обслуживания требований одним прибором в системе S_i , $i \in I$, также равна μ_i ; $\mu = (\mu_i)$, $i = 1, \dots, L$, — вектор интенсивностей обслуживания в системах сети N .

В каждом слоте в сети N выполняется следующая последовательность действий. В начале слота определяется состояние сети s , в котором сеть пребывает в течение слота. Требования, обслуживание которых будет завершено в конце слота в системе S_i , $i \in I$, образуют группу d_i уходящих из системы требований; число требований в группе случайно, $d_i \leq h_i$. В конце слота формируется вектор $d = (d_i)$, $i = 1, \dots, L$, требований, выходящих после завершения обслуживания из систем; множество всех векторов d обозначим через D ,

$$D = \left\{ d = (d_1, \dots, d_L) : 0 \leq d_i \leq \kappa_i, i = 1, \dots, L, \sum_{i=1}^L d_i \leq \min\{K, H\} \right\}.$$

Из группы d_i , $i \in I$, требований в соответствии с реализуемым алгоритмом маршрутизации требований (определяемым матрицей Θ) формируются направляемые из S_i в S_j подгруппы d_{ij} требований, $j \in V_i$, V_i — множество номеров выходных смежных с S_i систем. Из подгрупп d_{ij} , $j \in I$, $i \in U_j$, U_j — множество номеров входных смежных с S_j систем, образуется группа a_j требований, поступающих в S_j . Эти требования сначала поступают в бункер системы S_j . Если в системе S_j есть свободные обслуживающие приборы, т. е. $g_j + d_j > 0$, то из бункера согласно дисциплине обслуживания Random производится выбор требований на обслуживание; число выбираемых из бункера требований равно $\min\{b_j + a_j, g_j + d_j\}$. Таким образом, в конце слота вектор d преобразуется в вектор $a = (a_j)$, $j = 1, \dots, L$, требований, поступающих в системы обслуживания сети; множество всех векторов a обозначим через A ,

$$A = \left\{ a = (a_1, \dots, a_L) : 0 \leq a_j \leq \min\{K, H\}, j = 1, \dots, L, \sum_{j=1}^L a_j \leq \min\{K, H\} \right\}.$$

Очевидно, что $A \supseteq D$. Так как векторы d и a содержат одинаковое число требований, будет сформировано новое состояние сети $s' = s - d + a$.



2. АНАЛИЗ СЕТИ С ГРУППОВЫМИ ПЕРЕХОДАМИ ТРЕБОВАНИЙ

Обозначим $p_{s,d}$ — вероятность формирования вектора уходящих требований $d \in D$ при пребывании сети N в состоянии $s \in X$, ρ_{da} — вероятность преобразования вектора уходящих требований d в вектор поступающих требований $a \in A$. Так как вероятность завершения обслуживания в слоте в системе S_i , $i \in I$, ровно d_i требований определяется биномиальным распределением с параметрами h_i и μ_i , то

$$p_{s,d} = \prod_{i=1}^L \binom{h_i}{d_i} \mu_i^{d_i} (1 - \mu_i)^{h_i - d_i}.$$

Вероятности ρ_{da} при независимой маршрутизации требований в сети N имеют вид [16]

$$\rho_{da} = \sum_{d_{ij} \in E} \prod_{i=1}^L \binom{d_i}{d_{i1}, \dots, d_{iL}} \prod_{j=1}^L \theta_{ij}^{d_{ij}},$$

где

$$E = \left\{ d_{ij}, i = 1, \dots, L, j \in V_i : \sum_{i=1}^L d_{ij} = a_j \right\}.$$

Эволюция сети N описывается цепью Маркова ν с дискретным временем и множеством состояний B . Обозначим через $P = (p_{mn})$, $m, n = 1, \dots, c_X$, матрицу вероятностей перехода цепи ν . Элементы матрицы P определяются выражением [16]

$$p_{mn} = \sum_{\substack{d \in D, a \in A: \\ s^{(m)} - d + a = s^{(n)}}} p_{s,da}, \quad (1)$$

где

$$p_{s,da} = p_{s,d} \rho_{da}, \quad s = s^{(m)}. \quad (2)$$

Стационарное распределение цепи ν является стационарным распределением сети N . Обозначим через $\pi = (\pi_n)$, $n = 1, \dots, c_X$, стационарное распределение сети N . Из конечности множества состояний B следует, что распределение π существует и является единственным решением уравнения $\pi = \pi P$ с условием $\sum_{n \in B} \pi_n = 1$.

Обозначим \bar{s}_i — математическое ожидание (м. о.) числа требований в системе S_i , $i \in I$, \bar{h}_i — м. о. числа занятых обслуживающих приборов в системе S_i , λ_i — интенсивность входящего потока требований в систему S_i , \bar{u}_i — м. о. длительности пребывания требований в системе S_i , ψ_i — коэффициент использования обслуживающих приборов системы S_i .

Приведем формулы для вычисления основных стационарных характеристик системы S_i , $i \in I$, сети N :

$$\bar{s}_i = \sum_{k=1}^H k P\{s_i = k\},$$

где

$$P\{s_i = k\} = \sum_{n \in B: s_i^{(n)} = k} \pi_n,$$



$$\bar{h}_i = \sum_{k=1}^H \min\{k, \kappa_i\} P\{s_i = k\}, \quad \lambda_i = \bar{h}_i \mu_i; \quad \bar{u}_i = \bar{s}_i / \lambda_i; \quad \psi_i = \bar{h}_i / \kappa_i. \quad (3)$$

3. УПРАВЛЕНИЕ ИНТЕНСИВНОСТЯМИ ОБСЛУЖИВАНИЯ

Пусть N^c — сеть массового обслуживания, которая отличается от сети N только тем, что в ней используется динамическое управление интенсивностями обслуживания. Целью управления является приближение математических ожиданий числа требований в системах сети к требуемому распределению, называемому базовым. Оно определяется заданным состоянием $s^\circ \in X$. Рассматриваются два подмножества множества состояний X : Y — множество доминантных состояний, Z — множество ординарных состояний, $X = Y \cup Z$; $c_Y = |Y|$, $c_Z = |Z|$, $c_X = c_Y + c_Z$. При формировании множеств Y и Z используется вектор $q = (q_i)$, $i = 1, \dots, L$, граничных значений числа требований в системах. Состояние $s \in X$, для которого справедливы неравенства

$$|s_i - s_i^\circ| \leq q_i, \quad i = 1, \dots, L,$$

относится к множеству Y , иначе — к множеству Z . Упорядочим состояния в множестве X таким образом, что $s^{(n)} \in Y$, если $n \in \{1, \dots, c_Y\}$, и $s^{(n)} \in Z$, если $n \in \{c_Y + 1, \dots, c_Y + c_Z\}$; базовое состояние s° имеет номер $n = 1$.

В соответствии с интервальным методом управления [6] различаются два режима функционирования сети N^c — нормальный и коррективный. Периоды функционирования сети в этих режимах называются соответственно нормальным и коррективным тактами. Все такты имеют фиксированную длительность φ (φ — целое число слотов). Такты отличаются используемыми в системах сети интенсивностями обслуживания — в нормальном такте используется вектор $\mu = (\mu_i)$, $i = 1, \dots, L$, в коррективном такте — вектор $\mu^J = (\mu_i^J)$, $i = 1, \dots, L$, $J \in \{1, \dots, c_Z\}$, соответствующий состоянию сети $s^{(n)} \in Z$, $n = c_Y + J$, в момент начала текущего такта. Нормальный такт начинается всегда в одном из доминантных, а коррективный такт — в одном из ординарных состояний. Заканчиваться такты могут как в доминантном, так и в ординарном состоянии. Предполагается, что функционирование сети N^c начинается в нормальном режиме в базовом состоянии $s^\circ = s^{(1)}$ в момент времени $t = 0$. В момент $t = \varphi$ текущий такт заканчивается или в доминантном состоянии $s^{(n)} \in Y$, или в ординарном состоянии $s^{(n)} \in Z$; в первом случае выполняется очередной нормальный такт, во втором случае — коррективный такт. В течение данного коррективного такта происходит переход сети из этого ординарного состояния или в доминантное состояние или в некоторое другое ординарное состояние и т. д. Если в момент начала текущего такта состояние сети является ординарным, определяются новые значения интенсивностей обслуживания во всех системах сети обслуживания.

Обозначим $x^{(k)}$ — такт с номером k , $k \in \{1, 2, \dots\}$; $\eta^{(k)}$ — момент начала такта $x^{(k)}$ (момент начала первого слота в такте $x^{(k)}$); $\tau^{(k)}$ — момент окончания такта $x^{(k)}$ (момент окончания последнего слота в такте $x^{(k)}$); $s^{(n,k)} = (s_i^{(n,k)})$ — состояние с номером n сети N^c в начале такта $x^{(k)}$, где $s_i^{(n,k)}$ — число требований в системе S_i .

Основными действиями, выполняемыми в сети N^c в момент $\eta^{(k)}$, являются:

- 1) идентификация состояния $s^{(n,k)}$, $n \in B$, сети;



2) проверка выполнения неравенств

$$|s_i^{(n,k)} - s_i^\circ| \leq q_i, \quad i = 1, \dots, L, \quad (4)$$

т. е. проверка принадлежности состояния $s^{(n,k)}$ множеству Y ;

3) если неравенства (4) выполняются для всех систем сети, то следующий такт является нормальным, и в течение такта $x^{(k)}$ используется вектор μ . Выполняется очередной нормальный такт;

4) если хотя бы для одной системы не выполнилось неравенство (4), то такт $x^{(k)}$ является коррективным, формируется вектор $\mu^{(J,k)} = (\mu_i^{(J,k)})$, $i = 1, \dots, L$, $J \in \{1, \dots, c_Z\}$, который соответствует состоянию сети $s^{(n,k)} \in Z$, $n = c_Y + J$, в момент начала такта; этот вектор используется в течение такта $x^{(k)}$. Выполняется очередной коррективный такт.

После окончания выполнения такта $x^{(k)}$ в момент $\eta^{(k+1)}$ производится очередное выполнение действий 1–4 и т. д.

Рассмотрим эволюцию сети N^c в течение коррективного такта $x^{(k)}$, в начале которого сеть находится в состоянии $s^{(c_Y+J,k)}$. В момент $\eta^{(k)}$ в S_i , $i \in I$, находится $s_i^{(c_Y+J,k)}$ требований. В течение такта $x^{(k)}$ в S_i поступит $v_i^{(k)}$ требований. Средняя интенсивность суммарного входящего потока требований в S_i из других систем массового обслуживания сети в течение такта $x^{(k)}$ $\sigma_i^{(k)} = v_i^{(k)}/\varphi$. Чтобы в момент $\tau^{(k)}$ в системе S_i осталось s_i° требований, необходимо обслужить $W_i^{(k)} = s_i^{(c_Y+J,k)} + v_i^{(k)} - s_i^\circ$ требований в течение такта $x^{(k)}$, т. е. в среднем $W_i^{(k)}/\varphi$ требований в единицу времени. Следовательно, средняя интенсивность выходящего потока требований из S_i в течение такта $x^{(k)}$ $\beta_i^{(k)} = W_i^{(k)}/\varphi$.

За такт $x^{(k)}$ один прибор обслуживает в среднем $W_i^{(k)}/\kappa_i$ требований. Обозначая через $\mu_i^{(J,k)}$ интенсивность обслуживания требований одним прибором в S_i в течение такта $x^{(k)}$, получим, что средняя длительность обслуживания одного требования прибором равна $1/\mu_i^{(J,k)}$. Поэтому среднее суммарное время занятости одного прибора в течение такта $x^{(k)}$ равно $W_i^{(k)}/(\kappa_i \mu_i^{(J,k)})$, коэффициент использования прибора $\psi_i^{(k)} = W_i^{(k)}/(\kappa_i \mu_i^{(J,k)} \varphi)$, а среднее число занятых обслуживающих приборов в системе S_i $\bar{h}_i^{(k)} = \bar{h}_i = \kappa_i \psi_i^{(k)}$.

Из равенства $W_i^{(k)}/(\kappa_i \mu_i^{(J,k)} \varphi) = \bar{h}_i/\kappa_i$, $i \in I$, получим

$$\mu_i^{(J,k)} = \begin{cases} \min \left\{ \frac{s_i^{(c_Y+J,k)} + v_i^{(k)} - s_i^\circ}{\bar{h}_i \varphi}, 1 \right\} & \text{при } s_i^{(c_Y+J,k)} + v_i^{(k)} > s_i^\circ, \\ 0 & \text{при } s_i^{(c_Y+J,k)} + v_i^{(k)} \leq s_i^\circ. \end{cases}$$

Алгоритм вычисления $\mu_i^{(J,k)}$ содержит вспомогательный шаг и основные шаги, число которых зависит от требуемой точности определения $\mu_i^{(J,k)}$. При выполнении вспомогательного шага полагается, что $v_i^{(k)} = \bar{h}_i \mu_i \varphi$, и определяются величины

$$\hat{\mu}_i^{(J,k)} = \begin{cases} \min \left\{ \frac{s_i^{(c_Y+J,k)} + \bar{h}_i \mu_i \varphi - s_i^\circ}{\bar{h}_i \varphi}, 1 \right\} & \text{при } s_i^{(c_Y+J,k)} + \bar{h}_i \mu_i \varphi > s_i^\circ, \\ 0 & \text{при } s_i^{(c_Y+J,k)} + \bar{h}_i \mu_i \varphi \leq s_i^\circ. \end{cases}$$

На первом основном шаге полагается, что средняя интенсивность выходящего потока требований из системы S_j в течение такта $x^{(k)}$

$$\beta_j^{(k)} = \bar{h}_j \hat{\mu}_j^{(J,k)}, \quad j = 1, \dots, L,$$



и определяются

$$\begin{aligned} \beta_{ji}^{(k)} &= \beta_j^{(k)} \theta_{ji}, \quad i, j = 1, \dots, L, \\ \tilde{\sigma}_i^{(k)} &= \sum_{j=1}^L \beta_{ji}^{(k)}, \quad i = 1, \dots, L, \\ \tilde{\mu}_i^{(J,k)} &= \begin{cases} \min \left\{ \frac{s_i^{(c_Y+J,k)} + \tilde{\sigma}_i^{(k)} \varphi - s_i^{\circ}}{\bar{h}_i \varphi}, 1 \right\} & \text{при } s_i^{(c_Y+J,k)} + \tilde{\sigma}_i^{(k)} \varphi > s_i^{\circ}, \\ 0 & \text{при } s_i^{(c_Y+J,k)} + \tilde{\sigma}_i^{(k)} \varphi \leq s_i^{\circ}. \end{cases} \end{aligned} \quad (5)$$

При выполнении следующего основного шага в выражении (5) используются величины

$$\beta_j^{(k)} = \bar{h}_j \tilde{\mu}_j^{(J,k)}, \quad j = 1, \dots, L,$$

с $\tilde{\mu}_j^{(J,k)}$, вычисленными на предыдущем шаге.

4. АНАЛИЗ СЕТИ С УПРАВЛЕНИЕМ

Эволюция сети N^c в течение нормальных и коррективных тактов описывается цепями Маркова соответственно \hat{C} и \tilde{C}^J , $J \in \{1, \dots, c_Z\}$, с множеством состояний B и дискретным временем. Множествами начальных состояний цепи \hat{C} и цепей \tilde{C}^J являются соответственно $\{1, \dots, c_Y\}$ и $\{c_Y + J\}$, а матрицами вероятностей перехода — $\hat{P} = (\hat{p}_{mn})$ и $\tilde{P}^J = (\tilde{p}_{mn}^J)$, $m, n = 1, \dots, c_X$. Элементы матрицы \hat{P} определяются выражениями (1) и (2), а элементы матрицы \tilde{P}^J определяются аналогично элементам матрицы \hat{P} при замене $p_{s,d}$ на $\tilde{p}_{s,d}^J$:

$$\tilde{p}_{s,d}^J = \prod_{i=1}^L \binom{h_i}{d_i} (\mu_i^J)^{d_i} (1 - \mu_i^J)^{h_i - d_i}.$$

Обозначим через $\hat{P}^{(t)} = (\hat{p}_{mn}^{(t)})$ и $\tilde{P}^{(t),J} = (\tilde{p}_{mn}^{(t),J})$, $m, n = 1, \dots, c_X$, матрицы вероятностей перехода за t слотов цепей \hat{C} и \tilde{C}^J , $J \in \{1, \dots, c_Z\}$, соответственно. Известно, что

$$\hat{P}^{(t)} = (\hat{P})^t, \quad \tilde{P}^{(t),J} = (\tilde{P}^J)^t.$$

Эволюция сети N^c описывается цепью Маркова ν^c с дискретным временем с множеством состояний B и матрицей вероятностей перехода $P^c = (p_{mn}^c)$, $m, n = 1, \dots, c_X$, при заданном значении φ [19]

$$p_{mn}^c = \begin{cases} \hat{p}_{mn}^{(\varphi)}, & m \in \{1, \dots, c_Y\}, \\ \tilde{p}_{mn}^{(\varphi),J}, & m = c_Y + J, J \in \{1, \dots, c_Z\}. \end{cases}$$

Стационарное распределение $\pi^c = (\pi_n^c)$, $n = 1, \dots, c_X$, вероятностей состояний сети N^c при заданном значении φ является единственным решением уравнения $\pi^c = \pi^c P^c$ с условием $\sum_{n \in B} \pi_n^c = 1$.

Основные стационарные характеристики системы S_i , $i \in I$, сети N^c вычисляются по формулам (3) при замене μ_i на $\bar{\mu}_i^c$:

$$\bar{\mu}_i^c = \mu_i \sum_{n=1}^{c_Y} \pi_n^c + \sum_{J=1}^{c_Z} \mu_i^J \pi_{c_Y+J}^c.$$



5. ПРИМЕР

Пусть сеть N^c имеет следующие параметры: $L = 4$, $H = 8$, $\mu = (\mu_i) = (0.4, 0.3, 0.3, 0.1)$, $\kappa = (\kappa_i) = (1, 3, 2, 1)$, $c_X = 165$, $s^\circ = (2, 2, 2, 2)$, $q = (1, 2, 2, 1)$,

$$\Theta = \begin{bmatrix} 0 & 0.3 & 0.5 & 0.2 \\ 0.4 & 0 & 0.5 & 0.1 \\ 0.2 & 0.7 & 0 & 0.1 \\ 0.1 & 0.5 & 0.4 & 0 \end{bmatrix}.$$

Множество Y будет включать состояния $s^{(n)}$, $n = 1, \dots, 79$. Остальные состояния будут принадлежать множеству Z .

Стационарная вероятность пребывания сети N в множестве Y : $\pi_Y = \sum_{n=1}^{c_Y} \pi_n = 0.313$, стационарная вероятность базового состояния $\pi_1 = 0.004$, вектор м. о. числа требований в системах сети $\bar{s} = (\bar{s}_i) = (0.802, 1.064, 1.174, 4.960)$, вектор м. о. длительностей реакции сети для систем $\bar{\zeta} = (\bar{\zeta}_i) = (37.608, 22.406, 23.574, 30.920)$, где $\bar{\zeta}_i = \frac{1}{\lambda_i} \sum_{j=1, j \neq i}^L \lambda_j \bar{u}_j$, вектор интенсивностей входящих потоков требований $\lambda = (\lambda_i) = (0.191, 0.309, 0.289, 0.098)$, пропускная способность сети $\Lambda = \sum_{i=1}^L \lambda_i = 0.887$.

Значения стационарных характеристик сети N^c при различных значениях φ приведены в табл. 1 и 2. Отметим, что результаты, полученные методом имитационного моделирования, отличаются не более чем на 10% от результатов, полученных аналитически [17]. Это говорит о приемлемой для практических приложений точности предложенных методов анализа сетей N и N^c .

Таблица 1

Характеристики качества функционирования сети N^c

| Вероятность | Длительность такта φ | | | | | | |
|-------------|------------------------------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| | 10 | 20 | 50 | 100 | 200 | 500 | 1000 |
| π_Y^c | 0.748 | 0.660 | 0.535 | 0.465 | 0.420 | 0.376 | 0.367 |
| π_1^c | 0.017 | 0.014 | 0.010 | 0.009 | 0.008 | 0.006 | 0.006 |

Из табл. 1 видно, что при уменьшении φ вероятности π_Y^c и π_1^c увеличиваются и при $\varphi = 10$ первая из них более чем в 2 раза, а вторая в 4 раза превосходят соответствующие вероятности сети N . Результаты сравнения характеристик качества функционирования сетей N^c и N показывают, что качество функционирования сети N^c при $\varphi < 100$ выше, чем сети N . Это свидетельствует о возможности достижения при малых значениях φ высокой эффективности метода динамического управления интенсивностями обслуживания. При увеличении φ эффект от управления интенсивностями обслуживания уменьшается вследствие уменьшения влияния управления на эволюцию сети N^c .



Таблица 2

Стационарные характеристики сети N^c

| Характеристика | № системы, i | Длительность такта φ | | | | | | |
|-------------------|----------------|------------------------------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
| | | 10 | 20 | 50 | 100 | 200 | 500 | 1000 |
| $\bar{\mu}_i^c$ | 1 | 0.362 | 0.363 | 0.375 | 0.383 | 0.390 | 0.395 | 0.399 |
| | 2 | 0.283 | 0.289 | 0.293 | 0.297 | 0.298 | 0.300 | 0.300 |
| | 3 | 0.286 | 0.290 | 0.292 | 0.295 | 0.297 | 0.299 | 0.299 |
| | 4 | 0.142 | 0.135 | 0.124 | 0.116 | 0.109 | 0.104 | 0.103 |
| \bar{s}_i^c | 1 | 1.581 | 1.464 | 1.246 | 1.098 | 0.990 | 0.903 | 0.869 |
| | 2 | 1.608 | 1.538 | 1.381 | 1.285 | 1.217 | 1.149 | 1.138 |
| | 3 | 1.854 | 1.789 | 1.599 | 1.470 | 1.368 | 1.272 | 1.254 |
| | 4 | 2.957 | 3.209 | 3.774 | 4.147 | 4.425 | 4.676 | 4.739 |
| $\bar{\zeta}_i^c$ | 1 | 23.564 | 25.503 | 28.778 | 31.184 | 33.097 | 35.040 | 35.537 |
| | 2 | 14.410 | 15.337 | 17.168 | 18.366 | 19.519 | 20.579 | 20.787 |
| | 3 | 14.901 | 15.980 | 17.849 | 19.164 | 20.495 | 21.716 | 21.902 |
| | 4 | 37.648 | 37.385 | 35.822 | 34.702 | 33.727 | 32.889 | 32.612 |
| λ_i^c | 1 | 0.272 | 0.255 | 0.235 | 0.221 | 0.212 | 0.202 | 0.200 |
| | 2 | 0.443 | 0.419 | 0.386 | 0.365 | 0.348 | 0.332 | 0.329 |
| | 3 | 0.412 | 0.389 | 0.359 | 0.340 | 0.324 | 0.309 | 0.307 |
| | 4 | 0.134 | 0.127 | 0.118 | 0.111 | 0.106 | 0.101 | 0.100 |
| Λ^c | | 1.261 | 1.190 | 1.098 | 1.037 | 0.990 | 0.944 | 0.936 |

Из табл. 2 видно, что при уменьшении φ значения $\bar{\mu}_i^c$, $i = 1, \dots, 4$, изменяются в соответствии с характером зависимости от φ интенсивностей обслуживания, определенных для коррективных тактов, и при $\varphi \rightarrow \infty$ $\bar{\mu}_i^c \rightarrow \mu_i$. Следствием зависимости величин $\bar{\mu}_i^c$ от φ является увеличение интенсивностей потоков требований λ_i^c и пропускной способности сети Λ^c , а также изменение м.о. длительностей реакции сети для систем $\bar{\zeta}_i^c$ при уменьшении φ . При этом значения \bar{s}_i^c приближаются к значениям s_i^o , $i = 1, \dots, 4$. Очевидно, при $\varphi \rightarrow \infty$ значения характеристик сети N^c стремятся к значениям характеристик сети N .

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Рассматриваемая в статье проблема анализа замкнутых сетей массового обслуживания с дискретным временем и динамическим управлением интенсивностями обслуживания требований включает три задачи, решения которых представлены в соответствующих параграфах статьи. Первой задачей является разработка метода анализа замкнутых сетей массового обслуживания с дискретным временем и групповыми переходами требований. Результаты решения этой задачи непосредственно используются при решении второй задачи — разработке метода динамического управления интенсивностями обслуживания в сетях обслуживания с дискретным временем. При разработке метода анализа замкнутых сетей массового обслуживания с дискретным временем и управлением интенсивностями обслуживания (третья задача) в существенной степени используются результаты решения первых двух задач.

Из результатов исследования гипотетических сетей обслуживания рассматриваемого типа с использованием метода анализа замкнутых сетей массового обслужи-



вания с динамическим управлением интенсивностями обслуживания и метода имитационного моделирования можно сделать вывод, что предложенный в статье метод анализа сетей имеет точность и эффективность, достаточные для практических приложений.

В частности, этот метод может применяться для анализа сетей обслуживания, используемых в качестве математических моделей дискретных стохастических систем с сетевой структурой, в которых реализованы методы управления производительностью входящих в систему элементов.

Библиографический список

1. *Alfa A. S.* Queueing theory for telecommunications: discrete time modelling of a single node system. N. Y. ; Heidelberg ; London : Springer Science + Business Media, LLC, 2010. 248 p. DOI: 10.1007/978-1-4419-7314-6.
2. *Daduna H.* Queueing networks with discrete time scale: explicit expressions for the steady state behavior of discrete time stochastic networks. Berlin ; Heidelberg : Springer-Verlag, 2001. 143 p. DOI: 10.1007/3-540-44592-7.
3. *Malchin C., Daduna H.* Discrete time queueing networks with product form steady state. Availability and performance analysis in an integrated model // Queueing Systems. 2010. Vol. 65, № 4. P. 385–421. DOI: 10.1007/s11134-010-9181-2.
4. *Woodward M. E.* Towards the accurate modelling of high-speed communication networks with product-form discrete-time networks of queues // Computer Communications. 1998. Vol. 21. P. 1530–1543. DOI: 10.1016/S0140-3664(98)00220-5.
5. *Mitra D., McKenna J.* Asymptotic expansions for closed Markovian networks with state-dependent service rates // Journal of ACM. 1986. Vol. 33, № 3. P. 568–592. DOI: 10.1145/5925.5935.
6. *Weber R. R., Stidham S.* Optimal control of service rates in networks of queues // Advances in Applied Probability. 1987. Vol. 19. P. 202–218. DOI: 10.1017/S0001867800016451.
7. *Митрофанов Ю. И.* Анализ сетей массового обслуживания с управлением интенсивностями обслуживания // Автоматика и вычислительная техника. 2005. № 6. С. 22–31.
8. *Митрофанов Ю. И., Долгов В. И.* Динамическое управление интенсивностями обслуживания в сетях массового обслуживания // Автоматика и вычислительная техника. 2008. № 6. С. 44–56.
9. *Azaron A., Ghomi S. M.* Optimal control of the service rates and arrivals in Jackson networks // European Journal of Operational Research. 2003. Vol. 147, № 1. P. 17–31. DOI: 10.1016/S0377-2217(02)00177-7.
10. *Xia L.* Service rate control of closed Jackson networks from game theoretic perspective // European Journal of Operational Research. 2014. Vol. 237, № 2. P. 546–554. DOI: 10.1016/j.ejor.2014.01.038.
11. *Mitrofanov Yu. I., Rogachko E. S., Stankevich E. P.* Analysis of queueing networks with batch movements of customers and control of flows among clusters // Automatic Control and Computer Sciences. 2015. Vol. 49, № 4. P. 221–230. DOI: 10.3103/S0146411615040094.
12. *Тананко И. Е., Фокина Н. П.* Анализ замкнутых ненадежных сетей массового обслуживания с групповыми переходами требований // Изв. Саратов. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2013. Т. 13, вып. 2, ч. 1. С. 111–117.
13. *Henderson W., Taylor P. G.* Product form in networks of queues with batch arrivals and batch services // Queueing Systems. 1990. Vol. 6. P. 71–88. DOI: 10.1007/BF02411466.
14. *Serfozo R. F.* Queueing networks with dependent nodes and concurrent movements // Queueing Systems. 1993. Vol. 13. P. 143–182. DOI: 10.1007/BF01158932.



15. Miyazawa M. On the characterization of departure rules for discrete-time queueing networks with batch movements and its applications // Queueing Systems. 1994. Vol. 18. P. 149–166. DOI: 10.1007/BF01158779.
16. Митрофанов Ю. И., Рогачко Е. С., Станкевич Е. П. Анализ неоднородных сетей массового обслуживания с групповыми переходами требований // Изв. Саратов. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2011. Т. 11, вып. 3, ч. 1. С. 41–46.
17. Долгов В. И. Исследование замкнутых сетей массового обслуживания с дискретным временем, групповыми переходами требований и управлением интенсивностями обслуживания методом имитационного моделирования // Компьютерные науки и информационные технологии : материалы междунар. науч. конф. Саратов : Издат. центр «Наука», 2016. С. 145–148.

Образец для цитирования:

Митрофанов Ю. И., Долгов В. И., Рогачко Е. С., Станкевич Е. П. Метод анализа замкнутых сетей массового обслуживания с дискретным временем, групповыми переходами требований и динамическим управлением интенсивностями обслуживания // Изв. Саратов. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2017. Т. 17, вып. 1. С. 96–108. DOI: 10.18500/1816-9791-2017-17-1-96-108.

Method for Analysis of Closed Queueing Networks with Discrete Time, Batch Movements of Customers and Dynamic Control of Service Rates

Yu. I. Mitrophanov¹, V. I. Dolgov², E. S. Rogachko³, E. P. Stankevich⁴

¹Yury I. Mitrophanov, Saratov State University, 83, Astrakhanskaya str., 410012, Saratov, Russia, MitrophanovYul@info.sgu.ru

²Vitaly I. Dolgov, Saratov State University, 83, Astrakhanskaya str., 410012, Saratov, Russia, www@vidolgov.ru

³Ekaterina S. Rogachko, Saratov State University, 83, Astrakhanskaya str., 410012, Saratov, Russia, RogachkoES@info.sgu.ru

⁴Elena P. Stankevich, Saratov State University, 83, Astrakhanskaya str., 410012, Saratov, Russia, StankevichElena@mail.ru

The closed queueing networks with single class of customers, discrete time and batch movements of customers are considered. Queues include multiple identical servers with geometric distribution of service times. A method for dynamic control of service rates in queues is proposed. The control is realized by use of different service rates during fixed time intervals in process of networks operation. When this method is used in queueing networks of considered type, close to given customer allocation among queueing systems is provided. Models for evolution and methods for analysis of closed queueing networks with single class of customers, discrete time and batch movements of customers without control and with dynamic control of service rates are proposed. These methods provide possibility of computing basic steady-state characteristics of considered classes queueing networks. An example of queueing network with control of service rates is presented. Results of analysis of this network have shown efficiency of method for control of service rates and acceptable for practical applications accuracy of method for analysis.

Key words: closed queueing networks, geometric distribution of service times, batch movements of customers, control of service rates, analysis of queueing networks, stationary characteristics.



References

1. Alfa A. S. *Queueing theory for telecommunications: discrete time modelling of a single node system*. New York, Heidelberg, London, Springer Science + Business Media, LLC, 2010. 248 p. DOI: 10.1007/978-1-4419-7314-6.
2. Daduna H. *Queueing networks with discrete time scale: explicit expressions for the steady state behavior of discrete time stochastic networks*. Berlin, Heidelberg, Springer-Verlag, 2001. 143 p. DOI: 10.1007/3-540-44592-7.
3. Malchin C., Daduna H. Discrete time queueing networks with product form steady state. Availability and performance analysis in an integrated model. *Queueing Systems*, 2010, vol. 65, no. 4, pp. 385–421. DOI: 10.1007/s11134-010-9181-2.
4. Woodward M. E. Towards the accurate modelling of high-speed communication networks with product-form discrete-time networks of queues. *Computer Communications*, 1998, vol. 21, pp. 1530–1543. DOI: 10.1016/S0140-3664(98)00220-5.
5. Mitra D., McKenna J. Asymptotic expansions for closed Markovian networks with state-dependent service rates. *Journal of ACM*, 1986, vol. 33, no. 3, pp. 568–592. DOI: 10.1145/5925.5935.
6. Weber R. R., Stidham S. Optimal control of service rates in networks of queues. *Advances in Applied Probability*, 1987, vol. 19, pp. 202–218. DOI: 10.1017/S0001867800016451.
7. Mitrophanov Yu. I. Analysis of queueing networks with controlled service rate. *Automatic Control and Computer Sciences*, 2005, vol. 39, no. 6, pp. 18–26.
8. Mitrophanov Yu. I., Dolgov V. I. Dynamic control of service rates in queueing networks. *Automatic Control and Computer Sciences*, 2008, vol. 42, no. 6, pp. 311–319. DOI: 10.3103/S0146411608060060.
9. Azaron A., Ghomi S. M. Optimal control of the service rates and arrivals in Jackson networks. *European Journal of Operational Research*, 2003, vol. 147, no. 1, pp. 17–31. DOI: 10.1016/S0377-2217(02)00177-7.
10. Xia L. Service rate control of closed Jackson networks from game theoretic perspective. *European Journal of Operational Research*, 2014, vol. 237, no. 2, pp. 546–554. DOI: 10.1016/j.ejor.2014.01.038.
11. Mitrofanov Yu. I., Rogachko E. S., Stankevich E. P. Analysis of queueing networks with batch movements of customers and control of flows among clusters. *Automatic Control and Computer Sciences*, 2015, vol. 49, no. 4, pp. 221–230. DOI: 10.3103/S0146411615040094.
12. Tananko I. E., Fokina N. P. Analysis of closed unreliable queueing networks with batch movements of customers. *Izv. Saratov Univ. (N. S.), Ser. Math. Mech. Inform.*, 2013, vol. 13, iss. 2, pt. 1, pp. 111–117 (in Russian).
13. Henderson W., Taylor P. G. Product form in networks of queues with batch arrivals and batch services. *Queueing Systems*, 1990, vol. 6, pp. 71–88. DOI: 10.1007/BF02411466.
14. Serfozo R. F. Queueing networks with dependent nodes and concurrent movements. *Queueing Systems*, 1993, vol. 13, pp. 143–182. DOI: 10.1007/BF01158932.
15. Miyazawa M. On the characterization of departure rules for discrete-time queueing networks with batch movements and its applications. *Queueing Systems*, 1994, vol. 18, pp. 149–166. DOI: 10.1007/BF01158779.
16. Mitrophanov Yu. I., Rogachko E. S., Stankevich E. P. Analysis of heterogeneous queueing networks with batch movements of customers. *Izv. Saratov Univ. (N. S.), Ser. Math. Mech. Inform.*, 2011, vol. 11, iss. 3, pt. 1, pp. 41–46 (in Russian).
17. Dolgov V. I. Issledovanie zamknutykh setei massovogo obsluzhivaniia s diskretnym vremenem, gruppovymi perekhodami trebovaniia i upravleniem intensivnostiami obsluzhivaniia metodom imitatsionnogo modelirovaniia [Investigation by simulation of closed



queueing networks with discrete time, batch movements of customers and control of service rates]. *Komp'yuternye nauki i informatsionnye tekhnologii : materialy Mezhdunar. nauch. konf.* [Computer Science and Information Technologies : Proc. Intern. Sci. Conf.]. Saratov, Publ. Center "Nauka", 2016, pp. 145–148 (in Russian).

Cite this article as:

Mitrophanov Yu. I., Dolgov V. I., Rogachko E. S., Stankevich E. P. Method for Analysis of Closed Queueing Networks with Discrete Time, Batch Movements of Customers and Dynamic Control of Service Rates. *Izv. Saratov Univ. (N. S.), Ser. Math. Mech. Inform.*, 2017, vol. 17, iss. 1, pp. 96–108 (in Russian). DOI: 10.18500/1816-9791-2017-17-1-96-108.



УДК 501.1

ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ДИНАМИЧЕСКИХ ПРИЧИННО-СЛЕДСТВЕННЫХ СВЯЗЕЙ В ЧЕЛОВЕКОМАШИННЫХ СИСТЕМАХ

**А. Ф. Резчиков¹, В. А. Кушников², В. А. Иващенко³,
А. С. Богомолов⁴, Л. Ю. Филимонюк⁵, К. И. Шоломов⁶**

¹Резчиков Александр Федорович, член-корреспондент РАН, научный руководитель, Институт проблем точной механики и управления РАН, Россия, 410024, Саратов, Рабочая, 24, iptmuran@san.ru

²Кушников Вадим Алексеевич, доктор технических наук, директор, Институт проблем точной механики и управления РАН, Россия, 410024, Саратов, Рабочая, 24, iptmuran@san.ru

³Иващенко Владимир Андреевич, доктор технических наук, ведущий научный сотрудник, Институт проблем точной механики и управления РАН, Россия, 410024, Саратов, Рабочая, 24, iptmuran@san.ru

⁴Богомолов Алексей Сергеевич, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математической кибернетики и компьютерных наук, Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского, Россия, 410012, Саратов, Астраханская, 83; Институт проблем точной механики и управления РАН, Россия, 410024, Саратов, Рабочая, 24, alexbogomolov@ya.ru

⁵Филимонюк Леонид Юрьевич, кандидат технических наук, научный сотрудник, Институт проблем точной механики и управления РАН, Россия, 410024, Саратов, Рабочая, 24, filimonyukleonid@mail.ru

⁶Шоломов Константин Игоревич, аспирант, Институт проблем точной механики и управления РАН, Россия, 410024, Саратов, Рабочая, 24, k.sholomov@gmail.com

Предлагается способ представления переменных причинно-следственных связей при моделировании процессов в динамических системах. Такое представление соответствует изменяющим условиям, которые связаны с действием многочисленных разнородных факторов, сопровождающих функционирование сложных человекомашинных систем. Наличие или отсутствие причинно-следственных отношений между отдельными событиями в предлагаемой модели определяется как результат действия заданных стохастических или детерминированных функций. Динамика в представлении причинно-следственных связей достигается путем формирования этих связей на основе значений общих переменных, которые соответствуют различным событиям в системе. В существующих программных комплексах для анализа безопасности техногенных систем представление динамики в причинно-следственных моделях достаточно ограничено. При этом такое представление актуально для моделирования критических сочетаний событий, приводящих к запроектным авариям. Динамические причинно-следственные модели позволяют определять временные интервалы, когда система наиболее уязвима для возникновения критических сочетаний событий, анализировать причины возникновения и способы предотвращения таких сочетаний. Предлагаемая модель реализована в разработанном программном обеспечении, которое будет использоваться для моделирования и анализа нарушений процессов функционирования в человекомашинных, организационных и других динамических системах с помощью деревьев событий.

Ключевые слова: причинно-следственная связь, критическое сочетание событий, авария, катастрофа, дерево отказов, минимальное сечение, динамическое дерево событий, динамическая система.

DOI: 10.18500/1816-9791-2017-17-1-109-116



ВВЕДЕНИЕ

Функционирование человекомашинных систем сопровождается сложным взаимодействием разнородных процессов. Для предотвращения аварий и катастроф в таких системах требуется анализировать эти процессы, что предполагает использование причинно-следственных схем событий, которые их характеризуют и программного обеспечения для их анализа [1–3]. Такие схемы в общем случае являются переменными и это требует вносить в их представление элементы динамики. Различные реализации причинно-следственного подхода (деревья отказов, событий, причинно-следственные комплексы) традиционно обладали ограничением в виде статического характера представления причинно-следственных связей.

В современных программных комплексах по расчету надежности динамика в определенном смысле учитывается, например, в RELEX (США) [4] реализована возможность задания динамических операторов дерева отказов, учитываются временные соотношения. Находят широкое применение и другие программные комплексы: A.L.D.Group (Израиль), ISOGRAPH (Великобритания) [5, 6], Risk Spectrum (Швеция). Эти продукты реализуют достаточно широкий спектр функций, однако обладают такими недостатками, как высокая стоимость, технологическая зависимость, необходимость специального обучения персонала. Из отечественных разработок для структурно-логического моделирования надежности и безопасности отметим Арбитр, ПК АСМ, ПК Универсал, отличающиеся меньшим спектром предоставляемых инструментов, но в большей степени реализующие отдельные оригинальные функции и результаты.

Вместе с тем в перечисленных и других программных комплексах не акцентированы возможности моделирования динамики причинно-следственных связей, которые могут возникать и распадаться в зависимости от возникающих условий функционирования. В то же время такие явления, как появление или исчезновение причинно-следственных связей в системе потенциально порождают новые уязвимости, за счет которых возникают критические сочетания событий [7–12], приводящие к запроектным авариям.

Ввиду сказанного актуальной является разработка математического и программного обеспечения для моделирования переменных связей в причинно-следственных структурах. Возникает необходимость в разработке математических моделей, которые будут использоваться при решении задачи.

1. МОДЕЛЬ ДЛЯ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ДИНАМИЧЕСКИХ ПРИЧИННО-СЛЕДСТВЕННЫХ СВЯЗЕЙ

Пусть задана динамическая система A . Для моделирования причинно-следственных связей в этой системе выберем множество событий $E = \{e_1, \dots, e_n\}$ и множество переменных $C = \{c_1, \dots, c_m\}$, принимающих значения из некоторых множеств $D = \{D_1, \dots, D_m\}$. Переменные и события могут относиться как к самой системе, так и к её внешней среде. Примем, что поведение системы и связи в ней определяется выбранными событиями и переменными.

Установим отношение $\rho \subseteq E \times C$ между событиями и переменными. В результате каждому событию $e_i \in E$ будет соответствовать некоторое множество переменных



$C(e_i) \subseteq C$. Для любой переменной $A_j \in C(e_i)$ её значение в момент времени t обозначим через $A_{i,j}(t)$.

Будем говорить, что в момент t между событиями $e_i, e_j \in E$ существует причинно-следственная связь, если $C(e_i) \cap C(e_j) \neq \emptyset$, и хотя бы одна переменная $A_k \in C(e_i) \cap C(e_j)$ имеет равные значения для событий $e_i, e_j \in E$, т. е. $A_{i,k}(t) = A_{j,k}(t)$. Таким образом, причинно-следственные связи меняются во времени, что соответствует характеру динамических систем.

2. РЕАЛИЗАЦИЯ В ПРОГРАММЕ

Приведенная выше модель была реализована в компоненте разработанного программного обеспечения [12]. Входными данными служат множество событий $E = \{e_1, \dots, e_n\}$, множество переменных $C = \{c_1, \dots, c_m\}$, множество связей событий и переменных $\rho \subseteq E \times C$, начальные данные $(c_1(0), \dots, c_m(0)) \in D_1 \times \dots \times D_m$ и выражения для определения динамики переменных, отрезок модельного времени $[t_0, t_1]$ и способ подсчета модельного времени. Выходные данные программы — значения схемы причинно-следственных связей в системе на отрезке $[t_0, t_1]$. Ниже приводятся фрагменты выполнения программы.

3. ПРИМЕР МОДЕЛИРОВАНИЯ ДИНАМИЧЕСКИХ ПРИЧИНО-СЛЕДСТВЕННЫХ СВЯЗЕЙ

В качестве примера работы программы предлагается рассмотреть процесс образования причинно-следственных связей в системе с множеством событий $E = \{e_1, e_2, e_3\}$ и множеством переменных $C = \{c_1, c_2, c_3, c_4, c_5\}$, принимающих значения в области целых неотрицательных чисел. Отношение между переменными и событиями задано таким образом, что

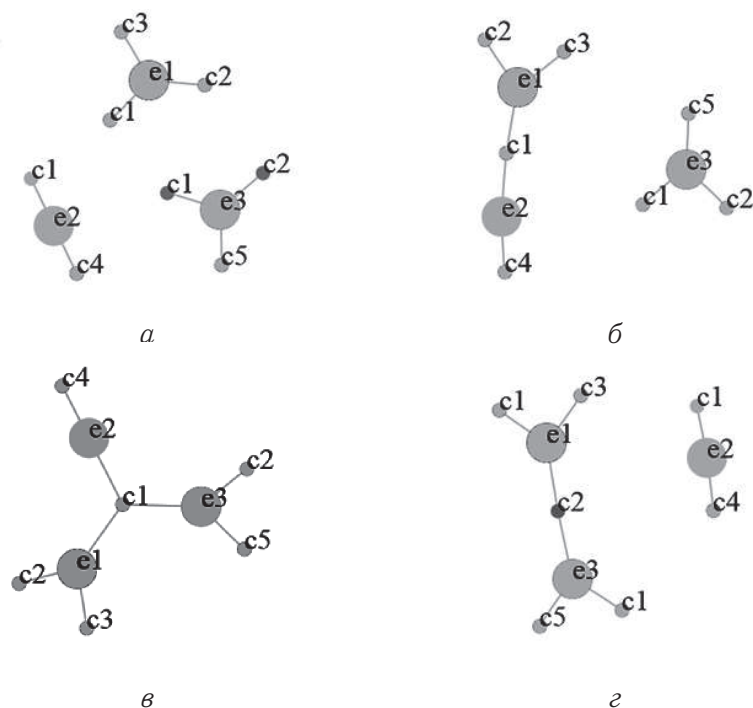
$$\left[C(e_1) = \{c_1, c_2, c_3\}, C(e_2) = \{c_1, c_4\}, C(e_3) = \{c_1, c_2, c_5\} \right].$$

В таблице приведены условия для определения динамики переменных, связанных с событиями системы.

Функции, определяющие значения переменных

| $e_i \backslash c_i$ | c_1 | c_2 | c_3 | c_4 | c_5 |
|----------------------|------------------------------|------------------|------------------|------------------|------------------|
| e_1 | $c_{1,1}(t) = 1 + t \pmod 3$ | $c_{1,2}(t) = 1$ | $c_{1,3}(t) = 0$ | Не связаны | Не связаны |
| e_2 | $c_{2,1}(t) = t \pmod 4$ | Не связаны | Не связаны | $c_{2,4}(t) = 3$ | Не связаны |
| e_3 | $c_{3,1}(t) = t \pmod 5$ | $c_{3,2}(t) = 3$ | Не связаны | Не связаны | $c_{3,5}(t) = 6$ |

Как видно из таблицы, в данном примере динамика будет проявляться только по переменной c_1 , по остальным переменным связи не будут образоваться, так как переменная c_2 имеет разные значения для разных событий и эти значения не меняются, а по переменным c_3, c_4, c_5 события не связаны друг с другом. Фрагменты процесса моделирования связей в системе представлены на рисунке.



Пример этапов моделирования: $a - t = 0$; $б - t = 34$; $в - t = 81$; $г - t = 128$

Как видно из рисунка, процесс моделирования позволил определить момент времени ($t = 81$), когда связь существует между всеми тремя рассматриваемыми событиями. Воздействие на систему в этот момент может иметь более значительные последствия. В следующий момент соотношение значений переменных изменяется и структура причинно-следственных связей становится другой.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Предлагается математическая модель, позволяющая представить переменные связи в причинно-следственных комплексах. Показан пример использования предложенной модели в разработанном программном обеспечении. Работа программы представляет особый интерес в случае большого числа событий и переменных, динамика которых задана разнородными условиями, включая случайные процессы, сложные функции и многовариантное поведение переменных, в том числе в зависимости друг от друга. Программные комплексы, которые будут разработаны в рамках проводимых исследований, найдут применение при построении динамических деревьев событий и отказов [13–16], причинно-следственных схем в моделях системной динамики [17–20] и дадут возможность введения переменных связей, более адекватно отражающих функционирование динамических систем. Полученные результаты необходимы для анализа, прогнозирования и предотвращения критических сочетаний событий, возникающих в процессе функционирования человекомашинных объектов.

Благодарности. Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 16-01-00536а).

Библиографический список

1. Bjorkman K. Digital Automation System Reliability Analysis — Literature survey // VTT. Resercher report VTT-R-08153-09. URL: <http://www.vtt.fi/inf/julkaisut/muut/2009/VTT-R-08153-09.pdf> (дата обращения : 15.06.2016).



2. Викторова В. С., Кунтшер Х. П., Степанянц А. С. Анализ программного обеспечения моделирования надежности и безопасности систем // Надежность. 2006. № 4(19). С. 46–57.
3. Строгонов А., Жаднов В., Полесский С. Обзор программных комплексов по расчету надежности сложных технических систем // Компоненты и технологии. 2007. № 5. С. 183–190.
4. Bai X., Sun L. P., Sun H. Risk Assessment of Hoisting Aboard and Installation for Offshore Wind Turbine // ASME 2012 31st Intern. Conf. on Ocean, Offshore and Arctic Engineering. Vol. 2 : Structures, Safety and Reliability. P. 107–114. DOI:10.1115/OMAE2012-83187.
5. Sharma P. K., Bhuvana V., Ramakrishnan M. Reliability analysis of Diesel Generator power supply system of Prototype Fast Breeder Reactor // Nuclear engineering and design. 2016. Vol. 310. P. 192–204. DOI: 10.1016/j.nucengdes.2016.10.013.
6. Chaari M., Ecker W., Kruse T., Novello C., Tabacaru B. A. Transformation of Failure Propagation Models into Fault Trees for Safety Evaluation Purposes // 46th Annual IEEE/IFIP Intern. Conf. on Dependable Systems and Networks Workshop (DSN-W). 2016. P. 226–229. DOI: 10.1109/DSN-W.2016.18.
7. Богомолов А. С. Комплексный контроль ресурсов сложных человекомашинных систем // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2013. Т. 13, вып. 3. С. 83–87.
8. Клюев В. В., Резчиков А. Ф., Богомолов А. С., Кошечая Е. М., Уков Д. А. Причинно-следственный подход к управлению ресурсом печи обжига при производстве цемента // Контроль. Диагностика. 2012. № 7. С. 30–36.
9. Резчиков А. Ф., Богомолов А. С., Иващенко В. А., Филимонюк Л. Ю. Подход к обеспечению и поддержанию безопасности сложных систем на основе автоматных моделей // Управление большими системами : сб. тр. 2015. № 54. С. 179–194.
10. Rezchikov A. F., Kushnikov V. A., Ivashchenko V. A., Bogomolov A. S., Filimonyuk L., Kachur K. P. Control of the air transportation system with flight safety as a criterion // Advances in Intelligent Systems and Computing. 2016. Vol. 466. P. 423–432.
11. Новожиллов Г. В., Резчиков А. Ф., Неймарк М. С., Богомолов А. С., Цесарский Л. Г., Филимонюк Л. Ю. Проблема критических сочетаний событий в системе «экипаж – воздушное судно – диспетчер» // Полет. 2015. № 2. С. 10–16.
12. Шоломов К. И. Комплекс программ моделирования и анализа критических сочетаний событий на основе построения и обработки динамических причинно-следственных деревьев // Математические методы в технике и технологиях – ММТТ. Саратов : Изд-во СГТУ имени Гагарина Ю. А., 2015. С. 300–304.
13. Можаяева И. А., Нозик А. А., Струков А. В., Чечулин А. А. Современные тенденции структурно-логического анализа надежности и кибербезопасности АСУТП // Моделирование и анализ безопасности и риска в сложных системах : тр. междунар. науч. шк. МАБР-2015. СПб. : Изд-во ИПМаш РАН, 2015. С. 140–145.
14. Белова В. В., Филин В. М. Количественная оценка показателя надежности системы обеспечения теплового режима космического аппарата при электрических испытаниях // Вестн. НПО им. С. А. Лавочкина. 2013. № 3 (19). С. 50–56.
15. Белова В. В. Моделирование надежности системы обеспечения теплового режима космического аппарата // Тр. междунар. симпозиума Надежность и качество. 2013. Т. 1. С. 148–154.
16. Викторова В. С., Степанянц А. С. Многоуровневое моделирование надежности систем // Датчики и системы. 2014. № 6(181). С. 33–37.
17. Адамович К. Ю. Математическая модель для прогнозирования значений показателей безопасности транспортной системы // Математические методы в технике и технологиях – ММТТ. Саратов : Изд-во СГТУ им. Гагарина Ю. А., 2015. № 6(76). С. 146–151.



18. Лычкина Н. Н. Ретроспектива и перспектива системной динамики. Анализ динамики развития // Бизнес-информатика. 2009. № 3(9). С. 55–67.
19. Форрестер Дж. Мирровая динамика. М. : Наука, 1978. 168 с.
20. Oliva R. Structural dominance analysis of large and stochastic models // System dynamics review. 2016. Vol. 32. P. 26–51. DOI: 10.1002/sdr.1549.

Образец для цитирования:

Резчиков А. Ф., Кушников В. А., Иващенко В. А., Богомолов А. С., Филимонюк Л. Ю., Шоломов К. И. Представление динамических причинно-следственных связей в человеко-машинных системах // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2017. Т. 17, вып. 1. С. 109–116. DOI: 10.18500/1816-9791-2017-17-1-109-116.

The Dynamical Cause-effect Links' Presentation in Human-machine Systems

A. F. Rezchikov¹, V. A. Kushnikov², V. A. Ivashchenko³,
A. S. Bogomolov⁴, L. Yu. Filimonyuk⁵, K. I. Sholomov⁶

¹Aleksandr F. Rezchikov, Institute of Precision Mechanics and Control, Russian Academy of Sciences, 24, Rabochaya str., 410028, Saratov, Russia, iptmuran@san.ru

²Vadim A. Kushnikov, Institute of Precision Mechanics and Control, Russian Academy of Sciences, 24, Rabochaya str., 410028, Saratov, Russia, iptmuran@san.ru

³Vladimir A. Ivashchenko, Institute of Precision Mechanics and Control, Russian Academy of Sciences, 24, Rabochaya str., 410028, Saratov, Russia, iptmuran@san.ru

⁴Aleksey S. Bogomolov, Saratov State University, 83, Astrakhanskaya str., 410012, Saratov, Russia; Institute of Precision Mechanics and Control, Russian Academy of Sciences, 24, Rabochaya str., 410028, Saratov, Russia, alexbogomolov@ya.ru

⁵Leonid Yu. Filimonyuk, Institute of Precision Mechanics and Control, Russian Academy of Sciences, 24, Rabochaya str., 410028, Saratov, Russia, filimonyukleonid@mail.ru

⁶Konstantin I. Sholomov, Institute of Precision Mechanics and Control, Russian Academy of Sciences, 24, Rabochaya str., 410028, Saratov, Russia, k.sholomov@gmail.com

A method of presentation variable cause-effect links for modeling processes in dynamic systems is proposed. Such a representation corresponds to the changing conditions that are associated with the action of many diverse factors that accompany the functioning of complex human-machine systems. The presence or absence of a causal relationship between the individual events in the proposed model is defined as a result of a set of stochastic or deterministic functions. Trends in the representation of cause-effect links are achieved by formation of these relations on the basis of common values of variables that correspond to various events in the system. The existing software systems for the analysis of security of technological systems are rather limited in view of dynamics of cause-effect models. The representation under discussion is actual for modeling critical combinations of events leading to beyond design basis accidents. Dynamic cause-effect models make possible to determine time intervals when the system is most vulnerable to the emergence of critical combinations of events, to analyze the causes and ways to prevent such combinations. The proposed model is implemented in developed software that will be used for modeling and analysis of malfunctions in the functioning of man-machine, organizational and other dynamic systems with the help of using event trees.

Key words: cause-effect link, the critical combination of events, accident, catastrophe, fault tree, the minimum cross-section, the dynamic event's tree, dynamic system.

Acknowledgements: This work was supported by the Russian Foundation for Basic Research (projects no. 16-01-00536a).



References

1. Bjorkman K. Digital Automation System Reliability Analysis — Literature survey. VTT, Resercher report VTT-R-08153-09. Available at: <http://www.vtt.fi/inf/julkaisut/muut/2009/VTT-R-08153-09.pdf> (accessed 15.06.2016).
2. Viktorova V. S., Kuntsher Kh. P., Stepaniants A. S. Analiz programmnoogo obespecheniia modelirovaniia nadezhnosti i bezopasnosti sistem [Analysis of simulation software reliability and security systems]. *Dependability*, 2006, no. 4(19), pp. 46–57 (in Russian).
3. Strogonov A., Zhadnov V., Polesskii S. Obzor programmnykh kompleksov po raschetu nadezhnosti slozhnykh tekhnicheskikh sistem [Overview of software for analyzing the reliability of complex technical systems]. *Components & Technologies*, 2007, no. 5, pp. 183–190 (in Russian).
4. Bai X., Sun L. P., Sun H. Risk Assessment of Hoisting Aboard and Installation for Offshore Wind Turbine. *ASME 2012 31st Intern. Conf. on Ocean, Offshore and Arctic Engineering*, Vol. 2 : Structures, Safety and Reliability, pp. 107–114. DOI:10.1115/OMAE2012-83187.
5. Sharma P. K., Bhuvana V., Ramakrishnan M. Reliability analysis of Diesel Generator power supply system of Prototype Fast Breeder Reactor. *Nuclear engineering and design*, 2016, vol. 310, pp. 192–204. DOI: 10.1016/j.nucengdes.2016.10.013
6. Chaari M., Ecker W., Kruse T., Novello C., Tabacaru B. A. Transformation of Failure Propagation Models into Fault Trees for Safety Evaluation Purposes. *46th Annual IEEE/IFIP Intern. Conf. on Dependable Systems and Networks Workshop (DSN-W)*, 2016, pp. 226–229. DOI: 10.1109/DSN-W.2016.18
7. Bogomolov A. S. Integrated resource control of complex man-machine system. *Izv. Saratov Univ. (N. S.), Ser. Math. Mech. Inform.*, 2013, vol. 13, iss. 3, pp. 83–87 (in Russian).
8. Kluev V. V., Rezchikov A. F., Bogomolov A. S., Koshevaya E. M., Ukov D. A. Cause-conditional approach to resource management of furnace in cement production. *Kontrol'. Diagnostika* [Testing. Diagnostics], 2012, vol. 7, pp. 30–36 (in Russian).
9. Rezchikov A., Bogomolov A., Ivaschenko V., Filimonyuk L. Applying automation models to support and maintain safety in complex systems. *Large-scale Systems Control*, 2015, vol. 54, pp. 179–194 (in Russian).
10. Rezchikov A. F., Kushnikov V. A., Ivashchenko V. A., Bogomolov A. S., Filimonyuk L., Kachur K. P. Control of the air transportation system with flight safety as a criterion. *Advances in Intelligent Systems and Computing*, 2016, vol. 466, pp. 423–432.
11. Novozhilov G. V., Rezchikov A. F., Neumark M. S., Bogomolov A. S., Tsesarskiy L. G., Filimonyuk L. Yu. Problem critical events in the combination “Crew — Aircraft — Manager” system. *Polyot*, 2015, vol. 2, pp. 10–16 (in Russian).
12. Sholomov K. I. Complex events critical simulation and analysis programs based on combinations Therefore the structure and processing of dynamic causal trees. *Proc. XXVIII Intern. Sci. Conf. on Mathematical Methods in Technics and Technologies — MMTT-28*, Saratov, Publ. Yuri Gagarin State Technical University of Saratov, 2015, pp. 300–304 (in Russian).
13. Mozhaeva I. A., Nozik A. A., Strukov A. V., Chechulin A. A. Sovremennye tendentsii strukturno-logicheskogo analiza nadezhnosti i kiberbezopasnosti ASUTP [Current trends structural and logical analysis of reliability and cybersecurity PCS]. *Modeling and Analysis of Safety and Risk in Complex Systems : Proc. Intern. Sci. School*, St. Petersburg, Publ. Institute of Problems of Mechanical Engineering RAS, 2015, pp. 140–145 (in Russian).



14. Belova V. V., Filin V. M. Quantitative assessment of the reliability for the spacecraft thermal control system during electrical testing. *Vestnik NPO im. S. A. Lavochkina*, 2013, no. 3 (19), pp. 50–56 (in Russian).
15. Belova V. V. Modelirovanie nadezhnosti sistemy obespecheniia teplovogo rezhima kosmicheskogo apparata [Simulation of the system to ensure the reliability of the thermal regime of the spacecraft]. *Trudy Mezhdunarodnogo simpoziuma Nadezhnost' i Kachestvo* [Proc. Intern. Symposium "RELIABILITY and QUALITY"], 2013, vol. 1, pp. 148–154 (in Russian).
16. Viktorova V. S., Stepanyants A. S. Multilevel modeling of system reliability. *Datchiki & Systemi* [Sensors & Systems], 2014. no. 6(181), pp. 33–37 (in Russian).
17. Adamovich K. Yu. Matematicheskaja model' dlja prognozirovaniia znachenii pokazatelei bezopasnosti transportnoi sistemy [Mathematical model to predict the safety performance values transport system]. *Mathematical Methods in Technics and Technologies — MMTT*, Saratov, Publ. Yuri Gagarin State Technical University of Saratov, 2015, no. 6(76), pp. 146–151 (in Russian).
18. Lychkina N. N. Retrospectives and perspectives of system-dynamics. Analysis of dynamics of the sd development. *Business Informatics*, 2009, no. 3(9), pp. 55–67 (in Russian).
19. Forrester J. *World Dynamics*. Moscow, Nauka, 1978. 168 p. (in Russian).
20. Oliva R. Structural dominance analysis of large and stochastic models. *System dynamics review*, 2016, vol. 32, pp. 26–51. DOI: 10.1002/sdr.1549.

Cite this article as:

Rezchikov A. F., Kushnikov V. A., Ivashchenko V. A., Bogomolov A. S., Filimonyuk L. Yu., Sholomov K. I. The Dynamical Cause-effect Links' Presentation in Human-machine Systems. *Izv. Saratov Univ. (N.S.), Ser. Math. Mech. Inform.*, 2017, vol. 17, iss. 1, pp. 109–116 (in Russian). DOI: 10.18500/1816-9791-2017-17-1-109-116.



PERSONALIA

ПАМЯТИ АЛЕКСАНДРА ЮРЬЕВИЧА ВАСИЛЬЕВА

20 октября 2016 г. на 55-м году жизни скоропостижно скончался один из активных членов редакционной коллегии журнала «Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия Математика. Механика. Информатика» доктор физико-математических наук Александр Юрьевич Васильев.

Ушел из жизни человек высокой культуры и широчайшего образования, большой ученый-математик, оставивший заметный след в российской и мировой науке и оказавший несомненное влияние на образование и уровень математических исследований, проводившихся в Саратовском университете и на механико-математическом факультете.

А. Васильев родился в Саратове в семье математиков, вузовских преподавателей. В 1984 г. он окончил механико-математический факультет Саратовского университета. Обучение в аспирантуре родного факультета под научным руководством Д. В. Прохорова завершилось в 1987 г. защитой кандидатской диссертации «Изопериметрические экстремальные задачи в теории однолистных функций», в которой получены оценки сложных функционалов в классах однолистных функций. Основным инструментом исследования служил параметрический метод в сочетании с применением вариационного исчисления и оптимизации [1–3].

В течение следующих лет А. Васильев сосредоточил усилия на развитии метода модулей для приложения к решению качественных и количественных задач в теории конформных отображений. В его подходе основная роль отводилась квадратичным дифференциалам. На ранней стадии этих исследований он активно сотрудничал с математической группой ленинградских математиков, особенно с С. Федоровым [4]. Позднее он развил использование своего подхода во многих математических разделах (см., например, [5, 6]) и подытожил полученные результаты в монографии [7].

Естественное распространение метода модулей привело Александра Васильева к решению экстремальных задач для квазиконформных отображений и к глубокому проникновению в теорию пространств Тейхмюллера, имеющую существенные взаимосвязи с комплексным анализом, гиперболической геометрией, дискретными группами и группами Ли, дифференциальной геометрией и другими областями математики. В частности, А. Васильев и Р. Идальго (R. Hidalgo) построили новую компактификацию пространства Тейхмюллера конечно порожденных клейновых групп. Они рассматривали модули как функционал на пространстве Тейхмюллера и охарактеризовали тейхмюллерову метрику в терминах модулей [8, 9].





В 1997 г. А. Васильев защитил в Новосибирском государственном университете докторскую диссертацию «Вариационно-геометрические методы решения экстремальных и метрических задач в теории конформных и квазиконформных отображений». В этом же году он возглавил созданную им кафедру математической экономики механико-математического факультета Саратовского университета. В 1998 г., получив приглашение на работу в университет столицы Колумбии, А. Васильев переезжает в Боготу, где проработал в течение двух лет.

В этот период А. Васильев обращает внимание на новые темы математического поиска. Как приложение теории Левнера к изучению течения Хеле – Шоу в сфере интересов Васильева оказались задачи гидромеханики со свободными границами, в которых описывается постоянное поступление (или поглощение) жидкости в цепи областей подчинения. Первые результаты о наследовании геометрических свойств меняющейся с течением времени границы разделения различных сред были опубликованы в 1998 г. [10]. Один из основных выводов в дальнейших статьях [11] и [12,13] состоит в том, что в трудной задаче поглощения существует единственное решение в виде односвязной эволюции. Монография А. Васильева и его шведского соавтора содержит замечательное изложение теории течения Хеле – Шоу [14].

В 2000 г. А. Васильев заключает контракт на должность профессора в техническом университете Вальпараисо, Чили. Пребывание за границей было полезным в научном отношении: поездки на съезды, конференции, личные контакты с ведущими учеными. Еще более плодотворное влияние на математическое становление как крупного ученого оказал переезд Александра Васильева в Европу. В 2005 г. он был приглашен возглавить группу математического анализа в университете города Бергена, Норвегия, где и работал до последних дней.

Ранние интересы А. Васильева в эволюции Левнера преобразовались в более глубокие идеи о взаимодействии комплексного анализа и математической физики, которые, в свою очередь, оказались тесно связанными с интегрируемыми системами. А. Васильев был одним из четырех научных руководителей, членов программного комитета осеннего семестра 2011 г. «Комплексный анализ и интегрируемые системы», в математическом институте Миттаг-Леффлера в Стокгольме, Швеция. А. Васильев с соавторами открыл соотношения между контурной динамикой и алгеброй Вирасоро [15–20]. Они указали на решение задачи об иерархии Кадомцева – Петвиашвили, которая остается инвариантной на траекториях уравнения Левнера – Куфарева, вложенных в грассманиан Сато – Сегала – Уилсона.

В последние годы А. Васильев расширил поле своих исследований, включив в него, в частности, дифференциальную геометрию и геометрическое управление, субриманову геометрию, стохастические процессы типа стохастической эволюции Левнера на плоскости и некоторые другие темы. Он рассматривал субримановы многообразия, которые часто встречаются в напряженных системах механики, и группы Гейзенберга, которые обладают естественной субримановой структурой. А. Васильев и его коллеги изучили геодезические линии, соединяющие две заданные точки на сферах нечетной размерности, и расслоение Хопфа. Они полностью решили эту геодезическую краевую задачу для трехмерной сферы и, частично, в общем случае, а также вычислили расстояние Карно – Каратеодори. Важным достижением стало нахождение бесконечномерного аналога субримановой геометрии на общих локально-



компактных многообразиях и вывод нескольких уравнений в частных производных типа Кортвега де Фриза таких, как уравнения Арнольда – Эйлера на кокасательном расслоении (см., например, [21–25]).

Последнее десятилетие ознаменовалось всплеском интереса к стохастической эволюции Шрамма – Левнера, впервые появившейся в знаменитой работе Шрамма. Этот подход оказался исключительно успешным в системах статистической физики, теории просачивания, модели Айсинга, задачах конформного склеивания и в других разделах. Стохастическая эволюция стала также весьма полезной в конформной теории поля. А. Васильев и его группа предложили модель, которая описывает детерминированную и стохастическую эволюции образов на комплексной плоскости и добились ощутимого прогресса в определении геометрической эволюции левнеровских разрезов (см., например, [26–30]). Монография 2015 года [31] объединяет несколько из обсуждаемых здесь тем.

Высокий профессионализм Александра Васильева отмечался коллегами в России, Колумбии, Чили, Норвегии, где он работал постоянно, и во многих других научных центрах Америки, Европы и Азии, куда его часто приглашали для совместной деятельности. Его талант организатора проявлялся во всем: от создания кафедры до организации международной математической сети университетов мира. А. Васильев возглавлял математические конференции в разных странах Европы и Азии, занимался издательскими проектами, входил в советы крупных международных союзов. Он организовал и стал главным редактором международного математического журнала «Analysis and Mathematical Physics», издаваемого Springer. Его журнал с быстро растущим импакт-фактором набрал популярность в научном мире, вошел в базы Scopus и Web of Science.

А. Васильев был не только продуктивным математиком, но и разносторонней интересной личностью. На многих языках он не только говорил свободно, но и писал статьи, делал доклады, читал лекции. Несмотря на большую занятость, А. Васильев никогда не прерывал связи с родным факультетом и принимал активное участие в его жизни. Светлая память об этом незаурядном человеке и большом ученом навсегда останется с сотрудниками Саратовского университета.

Библиографический список

1. *Васильев А. Ю.* Взаимное изменение начальных коэффициентов однолистных функций // Матем. заметки. 1985. Т. 38, № 1. С. 56–65. (English transl.: Math. Notes. 1985. Vol. 38, iss. 1. P. 543–548. DOI: 10.1007/BF01137465.)
2. *Васильев А. Ю.* Вариационные методы и изопериметрические теоремы покрытия для однолистных функций // Изв. вузов. Математика. 1988. № 1. С. 14–18. (English transl.: Soviet Math. 1988. Vol. 32, iss. 1. P. 14–18.)
3. *Васильев А. Ю.* Методы оптимального управления в экстремальной задаче на классе решений уравнения Левнера – Куфарева // Дифференц. уравнения. 1990. Т. 26, № 3. С. 386–392. (English transl.: Diff. Equ. 1990. Vol. 26, iss. 3, P. 280–294.)
4. *Васильев А. Ю., Федоров С. И.* Метод модулей в приложении к экстремальной задаче для конформных отображений // Изв. вузов. Математика. 1990. № 8. С. 13–22 (English transl.: Soviet Math. 1990. Vol. 34, № 8. P. 13–22.)
5. *Pommerenke Ch., Vasil'ev A.* Angular derivatives of bounded univalent functions and extremal partitions of the unit disk // Pacific J. Math. 2002. Vol. 206, № 2. P. 425–450.



6. *Vasil'ev A.* On distortion under bounded univalent functions with the angular derivative fixed // *Compl. Var.* 2002. Vol. 47, № 2. P. 131–147.
7. *Vasil'ev A.* Moduli of Families of Curves for Conformal and Quasiconformal Mappings. *Lecture Notes in Mathematics*. Vol. 1788. Berlin ; New York : Springer-Verlag, 2002. 212 p.
8. *Hidalgo R., Vasil'ev A.* Harmonic moduli of families of curves on Teichmüller spaces // *Scientia. Ser.A, Math. Sci.* 2002. Vol. 8. P. 89–107.
9. *Hidalgo R., Vasil'ev A.* Noded Teichmüller spaces // *J. Anal. Math.* 2006. Vol. 99. P. 63–73.
10. *Hohlov Yu., Prokhorov D., Vasil'ev A.* On geometrical properties of free boundaries in the Hele-Shaw flows moving boundary problem // *Lobachevskii J. Math.* 1998. Vol. 1. P. 3–13.
11. *Vasil'ev A., Kornev K.* Geometric properties of the solutions of a Hele-Shaw type equation // *Proc. Amer. Math. Soc.* 2000. Vol. 128, № 9. P. 2683–2685.
12. *Gustafsson B., Prokhorov D., Vasil'ev A.* Infinite lifetime for the starlike dynamics in Hele-Shaw cells // *Proc. Amer. Math. Soc.* 2004. Vol. 132, № 9. P. 2661–2669.
13. *Gustafsson B., Vasil'ev A.* Nonbranching weak and starshaped strong solutions for Hele-Shaw dynamics // *Arch. Math. (Basel)*. 2005. Vol. 84, № 6. P. 551–558.
14. *Gustafsson B., Vasil'ev A.* Conformal and Potential Analysis in Hele-Shaw Cells. Basel ; Boston ; Berlin : Birkhäuser Verlag, 2006. 231 p.
15. *Prokhorov D., Vasil'ev A.* Univalent functions and integrable systems // *Comm. Math. Phys.* 2006. Vol. 262, № 2. P. 393–410.
16. *Hidalgo R., Markina I., Vasil'ev A.* Finite dimensional grading of the Virasoro algebra // *Georgian Math. J.* 2007. Vol. 14, № 3. P. 419–434.
17. *Vasil'ev A.* Energy characteristics of subordination chains // *Ark. Mat.* 2007. Vol. 45. P. 141–156.
18. *Markina I., Vasil'ev A.* Virasoro algebra and dynamics in the space of univalent functions // *Contemp. Math.* 2010. Vol. 525. P. 85–116.
19. *Pavlov M., Prokhorov D., Vasil'ev A., Zakharov A.* Löwner evolution and finite-dimensional reduction of integrable systems // *Theor. Math. Phys.* 2014. Vol. 181, № 1. P. 1262–1277.
20. *Markina I., Vasil'ev A.* Evolution of smooth shapes and integrable systems // *Comput. Methods Funct. Theory*. 2016. Vol. 16, № 2. P. 203–229.
21. *Markina I., Prokhorov D., Vasil'ev A.* Sub-Riemannian geometry of the coefficients of univalent functions // *J. Funct. Anal.* 2007. Vol. 245, № 2. P. 475–492.
22. *Chang D.-Ch., Markina I., Vasil'ev A.* Sub-Lorentzian geometry on anti-de Sitter space // *J. Math. Pures Appl.* 2008. Vol. 90, № 1. P. 82–110.
23. *Chang D.-Ch., Markina I., Vasil'ev A.* Hopf fibration : geodesics and distances // *J. Geom. Phys.* 2011. Vol. 61. P. 986–1000.
24. *Grong E., Markina I., Vasil'ev A.* Sub-Riemannian geometry on infinite-dimensional manifolds // *J. Geom. Anal.* 2015. Vol. 25, № 4. P. 2474–2515.
25. *Brakalova M., Markina I., Vasil'ev A.* Modules of systems of measures on polarizable Carnot groups // *Ark. Mat.* 2016. Vol. 54, № 2. P. 371–401.
26. *Prokhorov D., Vasil'ev A.* Singular and tangent slit solutions to the Loewner equation // *Analysis and Mathematical Physics. Trends in Mathematics*. Basel : Birkhäuser, 2009. P. 455–463.
27. *Ivanov G., Vasil'ev A.* Löwner evolution driven by a stochastic boundary point // *Anal. Math. Phys.* 2011. Vol. 1, № 4. P. 387–412.
28. *Ivanov G., Prokhorov D., Vasil'ev A.* Non-slit and singular solutions to the Loewner equation // *Bull. Sci. Math.* 2012. Vol. 136, № 3. P. 328–341.



29. *Bracci F., Contreras M., Díaz-Madrigal S., Vasil'ev A.* Classical and stochastic Löwner – Kufarev equations // Harmonic and Complex Analysis and its Applications. Trends in Mathematics. Basel : Birkhäuser, 2013. P. 39–134.
30. *Ivanov G., Kang N.-G., Vasil'ev A.* Slit holomorphic stochastic flows and Gaussian free field // Compl. Anal. Oper. Theory. 2016. Vol. 10, № 7. P. 1591–1617.
31. *Gustaffson B., Teodorescu R., Vasil'ev A.* Classical and Stochastic Laplasian Growth. Heidelberg : Birkhäuser Verlag, 2015. 315 p.

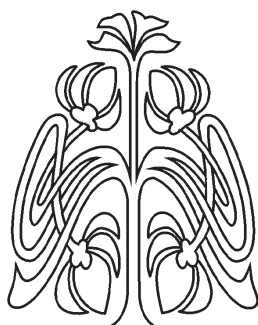
*Д. В. Прохоров, С. И. Дудов, А. М. Захаров,
В. Б. Поплавский, В. В. Розен, С. П. Сидоров*

Образец для цитирования:

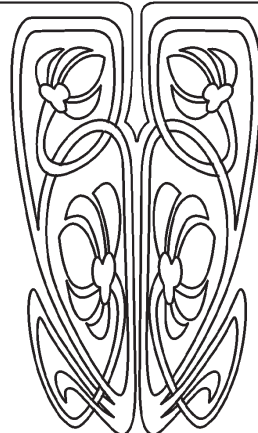
Прохоров Д. В., Дудов С. И., Захаров А. М., Поплавский В. Б., Розен В. В., Сидоров С. П. Памяти Александра Юрьевича Васильева // Изв. Саратов. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2017. Т. 17, вып. 1. С. 117–121.

Cite this article as:

Prokhorov D. V., Dudov S. I., Zakharov A. M., Poplavskii V. B., Rosen V. V., Sidorov C. P. In Memory of Alexandr Yu. Vasiliev. *Izv. Saratov Univ. (N. S.), Ser. Math. Mech. Inform.*, 2017, vol. 17, iss. 1, pp. 117–121 (in Russian).



ПОДПИСКА



Подписка на II полугодие 2017 года

Индекс издания в объединенном каталоге «Пресса России» 36017, раздел 30 «Научно-технические издания. Известия РАН. Известия вузов». Журнал выходит 4 раза в год.

Цена свободная.

Оформить подписку онлайн можно в Интернет-каталоге «Пресса по подписке» (www.akc.ru).

По всем вопросам обращаться в редакцию журнала:
410012, Саратов, Астраханская, 83;
тел. (845-2) 51-45-49, 52-26-89; факс (845-2) 27-85-29;
e-mail: izvestiya@sgu.ru