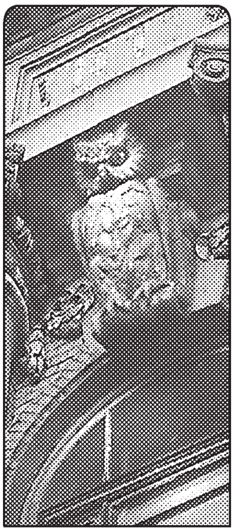
МАТЕМАТИКА



НАУЧНЫЙ ОТДЕЛ

УДК 512

К ТЕОРЕМЕ ЧЕНГА. II

С. Ю. Антонов[1], А. В. Антонова[2]

[1]Антонов Степан Юрьевич, старший преподаватель кафедры высшей математики, Казанский государственный энергетический университет, 420066, Россия, Казань, Красносельская, 51, antonovstvm@rambler.ru

[2]Антонова Алина Владимировна, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры высшей математики, Казанский государственный энергетический университет, 420066, Россия, Казань, Красносельская, 51, antonovakazan@rambler.ru

В данной работе введены полилинейные многочлены $\mathscr{H}^{+}(\bar{x},\bar{y}|\bar{w})$, $\mathscr{H}^{-}(\bar{x},\bar{y}|\bar{w}) \in F\{X \cup Y\}$, сумма которых является многочленом Ченга $\mathscr{H}(\bar{x},\bar{y}|\bar{w})$, где $F\{X \cup Y\}$ — свободная ассоциативная алгебра над произвольным полем F характеристики не два, порожденная счетным множеством $X \cup Y$. Доказано, что каждый из них является следствием стандартного многочлена $S^{-}(\bar{x})$. В частности, показано, что квазимногочлены Капелли $b_{2m-1}(\bar{x}_m,\bar{y})$ и $h_{2m-1}(\bar{x}_m,\bar{y})$ также следуют из многочлена $S^{-}_{m}(\bar{x})$. Здесь же найдена минимальная степень многочленов $b_{2m-1}(\bar{x}_m,\bar{y})$, $h_{2m-1}(\bar{x}_m,\bar{y})$, при которой они являются полиномиальными тождествами матричной алгебры $M_n(F)$. Полученные результаты представляют собой перенос результатов Ченга на некоторые квазимногочлены Капелли нечетной степени.

Ключевые слова: T-идеал, стандартный многочлен, многочлен Капелли.

DOI: 10.18500/1816-9791-2017-17-2-127-137

Продолжение (2015. Т. 15, вып. 3. С. 247–251).

ВВЕДЕНИЕ

Пусть F — произвольное поле, $F\{Z\}$ — свободная ассоциативная алгебра над F, порожденная счетным множеством $Z = \{z_n\}_{n\in N}$, которое представим в виде $Z = X\bigcup Y$, где $X = \{x_n\}_{n\in N}$, $Y = \{y_n\}_{n\in N}$ — непересекающиеся счетные множества, S_n — симметрическая группа степени n; f, g — произвольные многочлены алгебры $F\{Z\}$, $\{f\}^T$ — T-идеал алгебры $F\{Z\}$, порожденный многочленом f. Напомним, что двусторонний идеал I алгебры $F\{Z\}$ называется T-идеалом и обозначается символом $I \triangleleft_T F\{Z\}$, если для любого эндоморфизма φ алгебры $F\{Z\}$ справедливо включение $\varphi(I) \subseteq I$. Далее, будем говорить, что многочлен g является следствием многочлена f (следует из f), если $g \in \{f\}^T$. Кроме того, пусть t, u, m — любые натуральные числа, удовлетворяющие неравенствам $t \geqslant u$, $m \geqslant u$, $m > 1$; $\mathbf{N}_0 = \mathbf{N}\bigcup\{0\}$; $B = \{\bar{a} = (a_1 \ldots a_{u+1}) \in \mathbf{N}^u \times \mathbf{N}_0 \,|\, a_1 + \ldots + a_{u+1} = m\}$, $B_0 = \{\bar{a} = (a_1 \ldots a_{u+1}) \in B \,|\, a_{u+1} = 0\}$, $B_1 = \{\bar{n} = (n_1 \ldots n_{u+1}) \in B \,|\, n_{u+1} \neq 0\}$, $I_k = \{1, \ldots, k\}$, $w = y_1 y_2 \cdots y_t$. Представим слово w в виде $w = w_1 w_2 \cdots w_u$, где $w_1 = y_1 y_2 \cdots y_{i_2}$, $w_2 = y_{i_2+1} \cdots y_{i_3}$, $\ldots$, $w_u = y_{i_u+1} \cdots y_t$, и определим многочлены

$$\mathscr{F}(\bar{x}, \bar{y}|\bar{w}) = \mathscr{F}(x_1, \ldots, x_m, y_1, \ldots, y_t|w_1, \ldots, w_u) =$$
$$= \sum_{\bar{a} \in B} \sum_{\pi \in S_m} \sum_{\tau \in S_u} \operatorname{sgn} \mu \, x_{\pi(1)} \cdots x_{\pi(a_1)} w_{\tau(1)} x_{\pi(a_1+1)} \cdots x_{\pi(a_1+a_2)} w_{\tau(2)} \times$$
$$\times x_{\pi(a_1+a_2+1)} \cdots x_{\pi(a_1+\ldots+a_u)} w_{\tau(u)} x_{\pi(a_1+\ldots+a_u+1)} \cdots x_{\pi(a_1+\ldots+a_{u+1})},$$
$$\mathscr{H}(\bar{x}, \bar{y}|\bar{w}) = \mathscr{H}(x_1, \ldots, x_m, y_1, \ldots, y_t|w_1, \ldots, w_u) =$$
$$= \sum_{\bar{n} \in B_1} \sum_{\pi \in S_m} \sum_{\tau \in S_u} \operatorname{sgn} \mu \, x_{\pi(1)} \cdots x_{\pi(n_1)} w_{\tau(1)} x_{\pi(n_1+1)} \cdots x_{\pi(n_1+n_2)} w_{\tau(2)} \times$$
$$\times x_{\pi(n_1+n_2+1)} \cdots x_{\pi(n_1+\ldots+n_u)} w_{\tau(u)} x_{\pi(n_1+\ldots+n_u+1)} \cdots x_{\pi(n_1+\ldots+n_{u+1})},$$
$$\mathscr{R}(\bar{x}, \bar{y}|\bar{w}) = \mathscr{R}(x_1, \ldots, x_m, y_1, \ldots, y_t|w_1, \ldots, w_u) =$$
$$= \sum_{\bar{a} \in B_0} \sum_{\pi \in S_m} \sum_{\tau \in S_u} \operatorname{sgn} \mu \, x_{\pi(1)} \cdots x_{\pi(a_1)} w_{\tau(1)} x_{\pi(a_1+1)} \cdots x_{\pi(a_1+a_2)} w_{\tau(2)} \times$$
$$\times x_{\pi(a_1+a_2+1)} \cdots x_{\pi(a_1+\ldots+a_u)} w_{\tau(u)},$$

где μ — подстановка в мономе $M_\mu = z_{\mu(1)} \cdots z_{\mu(m)} z_{\mu(m+1)} \cdots z_{\mu(m+t)} \in F\{Z\}$, в котором $z_1 = x_1$, $\ldots$, $z_m = x_m$, $z_{m+1} = y_1$, $\ldots$, $z_{m+t} = y_t$. Очевидно, что $\mathscr{F}(\bar{x}, \bar{y}|\bar{w}) = \mathscr{H}(\bar{x}, \bar{y}|\bar{w}) + \mathscr{R}(\bar{x}, \bar{y}|\bar{w})$. Наконец, пусть $S_n^-(z_1, \ldots, z_n) = \sum\limits_{\mu \in S_n} \operatorname{sgn} \mu \, z_{\mu(1)} \cdots z_{\mu(n)}$ — стандартный многочлен степени n. Имеют место следующие результаты:

Теорема 1. *Для любого натурального числа $m > 1$ и произвольного поля F многочлен $\mathscr{F}(\bar{x}, \bar{y}|\bar{w})$ следует из $S_m^-(\bar{x})$ [1].*

Теорема 2. *Для любого натурального числа $m > 1$ и произвольного поля F многочлены $\mathscr{H}(\bar{x}, \bar{y}|\bar{w})$, $\mathscr{R}(\bar{x}, \bar{y}|\bar{w})$ следуют из $S_m^-(\bar{x})$ [2].*

Цель данной работы — провести дальнейшее разложение многочлена $\mathscr{H}(\bar{x}, \bar{y}|\bar{w})$ и получить некоторые важные следствия. Обратим внимание на интересные следствия стандартного многочлена, полученные в работах [3–6].

1. ВЫРАЖЕНИЯ ДЛЯ КОЭФФИЦИЕНТОВ МНОГОЧЛЕНА $\mathscr{H}(\bar{x}, \bar{y}|\bar{w})$

Пусть $v = z_{i_{\pi(1)}} \cdots z_{i_{\pi(r)}}$, где $i_1 < \ldots < i_r$, $\pi \in S_r$, — произвольный моном алгебры $F\{Z\}$, $|v|$ — длина монома v, $sgn\, v = \operatorname{sgn} \pi$. Представим каким-либо образом слово v в виде произведения его непустых подслов $v_1 \cdots v_n$ $(n \leqslant r)$ и по определению положим $\bar{v} = (v_1 \ldots v_n)$, $\bar{v}' = (|v_1| \ldots |v_n|)$, $\sigma v = v_{\sigma(1)} \cdots v_{\sigma(n)}$, $\sigma \bar{v} = (v_{\sigma(1)} \ldots v_{\sigma(n)})$, $\sigma \bar{v}' = (|v_{\sigma(1)}| \ldots |v_{\sigma(n)}|)$, $\sigma \in S_n$. Далее, определим отображение $\mathscr{N} : B_1 \to M_u(\mathbf{Z})$, где $M_u(\mathbf{Z})$ — кольцо матриц размера $u \times u$ с элементами из кольца целых чисел $\mathbf{Z}$, положив для любого $\bar{n} = (n_1 \dots n_{u+1}) \in B_1$

$$\mathscr{N}(\bar{n}) = \begin{pmatrix} n_{u+1} & n_{u+1} & n_{u+1} & \dots & n_{u+1} \\ 0 & n_u & n_u & \dots & n_u \\ 0 & 0 & n_{u-1} & \dots & n_{u-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & n_2 \end{pmatrix}.$$

Определение 1. Всякая матрица размера $k \times k$ $(k \leqslant u)$, составленная из элементов матрицы $A \in M_u(\mathbf{Z})$, находящихся на пересечении ее строк и столбцов с номерами $i_1, \dots, i_k$ и $j_1, \dots, j_k$ соответственно называется *подматрицей* матрицы A и обозначается символом $A\begin{pmatrix} i_1 & \dots & i_k \\ j_1 & \dots & j_k \end{pmatrix}$.

Для подматриц $\mathscr{N}(\bar{n})\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & k \\ 1 & 2 & \dots & k \end{pmatrix}$ $(k \leqslant u)$, $\mathscr{N}(\bar{n})\begin{pmatrix} 2 & 3 & \dots & u \\ 2 & 3 & \dots & u \end{pmatrix}$ матрицы $\mathscr{N}(\bar{n})$ будем использовать более краткую запись $\mathscr{N}_k(\bar{n})$ и $D(\bar{n})$ соответственно.

Наконец, под нормой матрицы $A = (a_{ij}) \in M_u(\mathbf{Z})$ будем понимать число $\|A\| = \sum\limits_{i=1}^{u}\sum\limits_{j=1}^{u}|a_{ij}|$, под высотой элемента $\bar{p} = (p_1 \dots p_u)^T \in M_{u\times 1}(\mathbf{Z})$ — число $h(\bar{p}) = \sum\limits_{i=1}^{u}|p_i|$, $\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & u \\ u & u-1 & \dots & 1 \end{pmatrix} \in S_u$.

Лемма 1. *Для любых элементов $\bar{n} \in B_1$, $\tau \in S_u$ справедливы равенства*

$$h(\mathscr{N}(\bar{n}) \cdot (\tau\alpha\bar{w}')^T) = \sum_{k=0}^{u-1} n_{u+1-k}\sum_{i=1}^{u-k}|w_{\tau(i)}| = \sum_{k=1}^{u}|w_{\tau(k)}|\sum_{i=k+1}^{u+1} n_i =$$
$$= \sum_{k=1}^{u}|w_{\tau(k)}| tr\, \mathscr{N}_{u+1-k}(\bar{n}) = n_{u+1}t + \sum_{k=1}^{u-1}|w_{\tau(k)}| \operatorname{tr} D_{u-k}(\bar{n}).$$

Доказательство. Имеем

$$\mathscr{N}(\bar{n}) \cdot (\tau\alpha\bar{w}')^T = (n_{u+1}\sum_{i=1}^{u}|w_{\tau(i)}|, n_u\sum_{i=1}^{u-1}|w_{\tau(i)}|, \dots, n_2\sum_{i=1}^{1}|w_{\tau(i)}|)^T.$$

Следовательно,

$$h(\mathscr{N}(\bar{n}) \cdot (\tau\alpha\bar{w}')^T) = \sum_{k=0}^{u-1} n_{u+1-k}\sum_{i=1}^{u-k}|w_{\tau(i)}| = n_{u+1}|w_{\tau(u)}| + (n_{u+1}|w_{\tau(u-1)}|+$$
$$+n_{u+1}|w_{\tau(u-2)}| + \dots + n_{u+1}|w_{\tau(1)}|) + (n_u|w_{\tau(u-1)}| + n_u|w_{\tau(u-2)}| + \dots +$$
$$+n_u|w_{\tau(1)}|) + \dots + n_2|w_{\tau(1)}| = |w_{\tau(u)}|n_{u+1} + |w_{\tau(u-1)}|(n_{u+1} + n_u)+$$
$$+|w_{\tau(u-2)}|(n_{u+1} + n_u + n_{u-1}) + \dots + |w_{\tau(1)}|(n_{u+1} + n_u + \dots + n_2) =$$

$$= \sum_{k=1}^{u} |w_{\tau(k)}| \sum_{i=k+1}^{u+1} n_i = \sum_{k=1}^{u} |w_{\tau(k)}| tr\, \mathscr{N}_{u+1-k}(\bar{n}) = \sum_{k=1}^{u-1} |w_{\tau(k)}|(n_{u+1} + \mathrm{tr}\, D_{u-k}(\bar{n}))+$$

$$+|w_{\tau(u)}|n_{u+1} = n_{u+1} \sum_{k=1}^{u} |w_{\tau(k)}| + \sum_{k=1}^{u-1} |w_{\tau(k)}| \mathrm{tr}\, D_{u-k}(\bar{n}) =$$

$$= n_{u+1}t + \sum_{k=1}^{u-1} |w_{\tau(k)}| \mathrm{tr}\, D_{u-k}(\bar{n}). \qquad \square$$

Следствие 1. *Пусть* $|w_1| = |w_2| = \ldots = |w_u| = 2s-1$, $s \in \mathbf{N}$. *Тогда для любых* $\bar{n} \in B_1$, $\tau \in S_u$, *справедливы равенства*

$$h(\mathscr{N}(\bar{n}) \cdot (\tau\alpha\bar{w}')^T) = (2s-1)\|\mathscr{N}(\bar{n})\| = (2s-1)\sum_{k=1}^{u} kn_{k+1}.$$

Если к тому же $n_{u+1} = n_u = \ldots = n_2 = r$, *то*

$$h(\mathscr{N}(\bar{n}) \cdot (\tau\alpha\bar{w}')^T) = (2s-1)r(u+1)u/2.$$

Следствие 2. *Если для всякого* $i \in I_u$ $|w_i| = 2k_i$, $k_i \in \mathbf{N}$, *то для любых* $\bar{n} \in B_1$, $\tau \in S_u$ *число* $h(\mathscr{N}(\bar{n}) \cdot (\tau\alpha\bar{w}')^T)$ *четное.*

Лемма 2. *Для любого монома* $M(\bar{n}, \pi\bar{x}, \tau\bar{w})$ *из многочлена* $\mathscr{H}(\bar{x}, \bar{y}|\bar{w})$ *справедливо равенство* $\mathrm{sgn}\, M(\bar{n}, \pi\bar{x}, \tau\bar{w}) = (-1)^{h(\mathscr{N}(\bar{n})\cdot(\tau\alpha\bar{w}')^T)} \mathrm{sgn}\, \pi\, \mathrm{sgn}\, (\tau w)$.

Доказательство. Нетрудно видеть, что

$$\mathrm{sgn}\, M(\bar{n}, \pi\bar{x}, \tau\bar{w}) = (-1)^{|w_{\tau(u)}|n_{u+1} + |w_{\tau(u-1)}|(n_{u+1}+n_u) + \ldots + |w_{\tau(1)}|(n_{u+1}+n_u+\ldots+n_2)} \times$$

$$\times \mathrm{sgn}\, (x_{\pi(1)} \cdots x_{\pi(m)} w_{\tau(1)} \cdots w_{\tau(u)}) =$$

$$= (-1)^{h(\mathscr{N}(\bar{n})\cdot(\tau\alpha\bar{w}')^T)} \mathrm{sgn}\, \pi\, \mathrm{sgn}\, (w_{\tau(1)} \cdots w_{\tau(u)}) = (-1)^{h(\mathscr{N}(\bar{n})\cdot(\tau\alpha\bar{w}')^T)} \mathrm{sgn}\, \pi \mathrm{sgn}\, (\tau w). \qquad \square$$

Следствие 3. *Справедливо равенство*

$$\mathscr{H}(\bar{x}, \bar{y}|\bar{w}) = \sum_{\bar{n} \in B_1} \sum_{\pi \in S_m} \sum_{\tau \in S_u} (-1)^{h(\mathscr{N}(\bar{n})\cdot(\tau\alpha\bar{w}')^T)} \mathrm{sgn}\, \pi\, \mathrm{sgn}\, (\tau w) M(\bar{n}, \pi\bar{x}, \tau\bar{w}).$$

Следствие 4. *Пусть* $|w_1| = |w_2| = \ldots = |w_u| = 2s-1$, $s \in \mathbf{N}$. *Тогда справедливо равенство*

$$\mathrm{sgn}\, M(\bar{n}, \pi\bar{x}, \tau\bar{w}) = (-1)^{\|\mathscr{N}(\bar{n})\|} \mathrm{sgn}\, \pi\, \mathrm{sgn}\, \tau,$$

и значит,

$$\mathscr{H}(\bar{x}, \bar{y}|\bar{w}) = \sum_{\bar{n} \in B_1} \sum_{\pi \in S_m} \sum_{\tau \in S_u} (-1)^{\|\mathscr{N}(\bar{n})\|} \mathrm{sgn}\, \pi\, \mathrm{sgn}\, \tau\, M(\bar{n}, \pi\bar{x}, \tau\bar{w}).$$

Доказательство. Вытекает из леммы 2 и следствия 1. $\square$

Следствие 5. *Пусть* $|w_1| = |w_2| = \ldots = |w_u| = 2s$, $s \in \mathbf{N}$. *Тогда справедливо равенство* $\mathrm{sgn}\ M(\bar{n}, \pi\bar{x}, \tau\bar{w}) = \mathrm{sgn}\, \pi$ *и, значит,*

$$\mathscr{H}(\bar{x}, \bar{y}|\bar{w}) = \sum_{\bar{n} \in B_1} \sum_{\pi \in S_m} \sum_{\tau \in S_u} \mathrm{sgn}\, \pi\, M(\bar{n}, \pi\bar{x}, \tau\bar{w}).$$

Доказательство. Вытекает из леммы 2 и следствия 2. □

Очевидно, что значение $(-1)^{h(\mathscr{N}(\bar{n})\cdot(\tau\alpha\bar{w}')^T)}$ можно найти по любой формуле из леммы 1, однако работать с ними все же неудобно. В связи с этим определим отображения $\Phi : B_1 \to \mathbf{Z}^u$, $\Psi : \mathbf{Z}^u \to \mathbf{Z}^u$, положив для любого $\bar{n} = (n_1 \dots n_{u+1}) \in B_1$, $\bar{p} = (p_1 \dots p_u) \in \mathbf{Z}^u$

$$\Phi(\bar{n}) = (\Phi(\bar{n})_1 \dots \Phi(\bar{n})_u), \qquad \Psi(\bar{p}) = (\Psi(\bar{p})_1 \dots \Psi(\bar{p})_u),$$

где $\Phi(\bar{n})_s = \sum\limits_{i=s+1}^{u+1} n_i - 2\left[\frac{1}{2}\sum\limits_{i=s+1}^{u+1} n_i\right]$, $\Psi(\bar{p})_s = |p_s| - 2[|p_s|/2]$, $s \in I_u$, $[a]$ — целая часть числа a. Нетрудно видеть, что для произвольных $\tau \in S_u$, $\bar{n} \in B_1$, справедливы равенства

$$\Psi(\tau\bar{w}') = \tau\Psi(\bar{w}'), \qquad (-1)^{h(\mathscr{N}(\bar{n})\cdot(\tau\alpha\bar{w}')^T)} = (-1)^{(\Phi(\bar{n}),\tau\Psi(\bar{w}'))},$$

где $(\Phi(\bar{n}), \tau\Psi(\bar{w}')) = \sum\limits_{s=1}^{u} \Phi(\bar{n})_s \cdot (\tau\Psi(\bar{w}'))_s$.

2. ДОПОЛНЕНИЕ К ТЕОРЕМЕ ЧЕНГА

Представим многочлен $\mathscr{H}(\bar{x}, \bar{y}|\bar{w})$ в виде $\mathscr{H}^+(\bar{x}, \bar{y}|\bar{w}) + \mathscr{H}^-(\bar{x}, \bar{y}|\bar{w})$, где многочлен $\mathscr{H}^+(\bar{x}, \bar{y}|\bar{w})$ $(\mathscr{H}^-(\bar{x}, \bar{y}|\bar{w}))$ состоит из всех мономов многочлена $\mathscr{H}(\bar{x}, \bar{y}|\bar{w})$, для которых $(-1)^{h(\mathscr{N}(\bar{n})\cdot(\tau\alpha\bar{w}')^T)}\operatorname{sgn}(\tau w) = 1(-1)$. Таким образом,

$$\mathscr{H}^+(\bar{x}, \bar{y}|\bar{w}) = \sum_{\bar{n}\in B_1}\sum_{\pi\in S_m}\sum_{\tau\in S_u} \delta_{1\,(-1)^{h(\mathscr{N}(\bar{n})(\tau\alpha\bar{w}')^T)}\operatorname{sgn}(\tau w)} \operatorname{sgn}\pi M(\bar{n}, \pi\bar{x}, \tau\bar{w}),$$

$$\mathscr{H}^-(\bar{x}, \bar{y}|\bar{w}) = \sum_{\bar{n}\in B_1}\sum_{\pi\in S_m}\sum_{\tau\in S_u} -\delta_{-1\,(-1)^{h(\mathscr{N}(\bar{n})(\tau\alpha\bar{w}')^T)}\operatorname{sgn}(\tau w)} \operatorname{sgn}\pi M(\bar{n}, \pi\bar{x}, \tau\bar{w}),$$

где δ_{ij} — символ Кронекера.

В частности, при $t = u = 1$, $w = w_1 = y_1$ имеет место равенство

$$\mathscr{H}(\bar{x}, y_1|w_1) = \sum_{n=1}^{m-1}\sum_{\pi\in S_m} (-1)^{m-n}\operatorname{sgn}\pi x_{\pi(1)}\cdots x_{\pi(n)}y_1x_{\pi(n+1)}\cdots x_{\pi(m)},$$

тогда если $m = 2k$, то

$$\mathscr{H}^+(\bar{x}, y_1|w_1) = \sum_{n=1}^{k-1}\sum_{\pi\in S_m} \operatorname{sgn}\pi x_{\pi(1)}\cdots x_{\pi(2n)}y_1x_{\pi(2n+1)}\cdots x_{\pi(m)},$$

если $m = 2k - 1$, то

$$\mathscr{H}^+(\bar{x}, y_1|w_1) = \sum_{n=1}^{k-1}\sum_{\pi\in S_m} \operatorname{sgn}\pi x_{\pi(1)}\cdots x_{\pi(2n-1)}y_1x_{\pi(2n)}\cdots x_{\pi(m)}$$

(см. также [6, теорема 26]).

Пусть $t \in I_{m-1}$, $i_1, \dots, i_t \in I_m$, причем $i_1 < i_2 < \dots < i_t$, $\tau \in S_t$. Определим эндоморфизм $\varphi_{i_1,\dots,i_t,\tau}$ алгебры $F\{Z\}$, положив

$$\varphi_{i_1,\dots,i_t,\tau}(z) = \begin{cases} x_{i_j}y_{\tau(j)}, \text{ если } z = x_{i_j},\ j \in I_t, \\ z, \text{ если } z \notin \{x_{i_1}, \dots, x_{i_t}\}. \end{cases}$$

Далее, представим многочлен $\sum\limits_{1\leqslant i_1<\ldots<i_t\leqslant m}\sum\limits_{\tau\in S_t}\varphi_{i_1,\ldots,i_t,\tau}(S_m^-(\bar{x}))$ в виде суммы

$$\mathscr{H}_{\{2\}}(\bar{x},\bar{y}|\bar{w})+\sum_{j=1}^{t}Q(\bar{x},\bar{y}_{\hat{j}}|\bar{w}_{\hat{j}})y_j,$$

где $\bar{w}=(w_1\ldots w_t)$, $w_j=y_j$ $(j\in I_t)$, $\bar{w}_{\hat{j}}=(w_1\ldots w_{j-1}w_{j+1}\ldots w_t)$, $\bar{y}_{\hat{j}}=(y_1\ldots y_{j-1}y_{j+1}\ldots y_t)$, а многочлен $\mathscr{H}_{\{2\}}(\bar{x},\bar{y}|\bar{w})$ не имеет мономов, оканчивающихся на переменную y. Отсюда получаем, что

$$\mathscr{H}_{\{2\}}(\bar{x},\bar{y}|\bar{w})=\sum_{1\leqslant i_1<\ldots<i_t\leqslant m}\sum_{\tau\in S_t}\varphi_{i_1,\ldots,i_t,\tau}(S_m^-(\bar{x}))-\sum_{j=1}^{t}Q(\bar{x},\bar{y}_{\hat{j}}|\bar{w}_{\hat{j}})y_j=$$
$$=\sum_{\bar{n}\in B_1}\sum_{\pi\in S_m}\sum_{\tau\in S_t}\operatorname{sgn}\pi M(\bar{n},\pi\bar{x},\tau\bar{w}).$$

Теорема 3. *Для любого натурального числа $t\in I_{m-1}$ и произвольного поля F многочлен $\mathscr{H}_{\{2\}}(\bar{x},\bar{y}|\bar{w})=\sum\limits_{\bar{n}\in B_1}\sum\limits_{\pi\in S_m}\sum\limits_{\tau\in S_t}\operatorname{sgn}\pi M(\bar{n},\pi\bar{x},\tau\bar{w})$ следует из $S_m^-(\bar{x})$.*

Доказательство. Проведем методом математической индукции по числу t. Пусть $t=1$. Тогда

$$\sum_{i=1}^{m}\varphi_i(S_m^-(\bar{x}))=\sum_{n=1}^{m-1}\sum_{\pi\in S_m}\operatorname{sgn}\pi x_{\pi(1)}\cdots x_{\pi(n)}y_1x_{\pi(n+1)}\cdots x_{\pi(m)}+S_m^-(\bar{x})y_1.$$

Отсюда получаем, что

$$\mathscr{H}_{\{2\}}(\bar{x},y_1|w_1)=\sum_{n=1}^{m-1}\sum_{\pi\in S_m}\operatorname{sgn}\pi x_{\pi(1)}\cdots x_{\pi(n)}y_1x_{\pi(n+1)}\cdots x_{\pi(m)}=\sum_{i=1}^{m}\varphi_i(S_m^-(\bar{x}))-S_m^-(\bar{x})y_1.$$

Поскольку $\{S_m^-(\bar{x})\}^T\lhd_T F\{Z\}$, то $\sum\limits_{i=1}^{m}\varphi_i(S_m^-(\bar{x}))$, $S_m^-(\bar{x})y_1\in\{S_m^-(\bar{x})\}^T$ и, значит,

$$\mathscr{H}_{\{2\}}(\bar{x},y_1|w_1)\in\{S_m^-(\bar{x})\}^T.$$

Пусть теперь $1<t\leqslant m-1$. Предположим, что для всякого $a<t$ теорема 3 верна. Покажем, что она будет верна и для числа t. Нетрудно видеть, что

$$\mathscr{H}_{\{2\}}(\bar{x},\bar{y}|\bar{w})=\sum_{1\leqslant i_1<\ldots<i_t\leqslant m}\sum_{\tau\in S_t}\varphi_{i_1,\ldots,i_t,\tau}(S_m^-(\bar{x}))-\sum_{j=1}^{t}\mathscr{H}_{\{2\}}(\bar{x},\bar{y}_{\hat{j}}|\bar{w}_{\hat{j}})y_j=$$
$$=\sum_{1\leqslant i_1<\ldots<i_t\leqslant m}\sum_{\tau\in S_t}\varphi_{i_1,\ldots,i_t,\tau}(S_m^-(\bar{x}))-\sum_{j=1}^{t}\xi_j(\mathscr{H}_{\{2\}}(\bar{x},\bar{y}_{\hat{t}}|\bar{w}_{\hat{t}}))y_j,$$

где ξ_j $(j\in I_t)$ — эндоморфизм алгебры $F\{Z\}$ такой, что

$$\xi_j(z)=\begin{cases}y_{j+s+1}, \text{ если } z=y_{j+s},\ s\in\{0,1,\ldots,t-1-j\},\\ z, \text{ если } z\notin\{y_j,\ldots,y_{t-1}\}.\end{cases}$$

Так как ассоциированное с многочленом $\mathscr{H}_{\{2\}}(\bar{x}, \bar{y}_{\hat{t}}|\bar{w}_{\hat{t}})$ число $t-1<t$, то по индуктивному предположению он является следствием стандартного многочлена $S_m^-(\bar{x})$. Учитывая, что $\{S_m^-\}^T \triangleleft_T F\{Z\}$, получаем, что $\mathscr{H}_{\{2\}}(\bar{x}, \bar{y}|\bar{w}) \in \{S_m^-(\bar{x})\}^T$. Таким образом, теорема 3 верна для всякого $t \in I_{m-1}$. □

Следствие 6. *Для любого натурального числа $m>1$ и произвольного поля F многочлен $\mathscr{H}_{\{2\}}(\bar{x}, y_1|w_1) = \sum\limits_{n=1}^{m-1}\sum\limits_{\pi\in S_m} \operatorname{sgn}\pi x_{\pi(1)}\cdots x_{\pi(n)}y_1x_{\pi(n+1)}\cdots x_{\pi(m)}$ следует из $S_m^-(\bar{x})$.*

Доказательство. Полагая в теореме 3 $t=1$, получаем требуемый результат. □

Следствие 7. *Для любого натурального числа $m>1$ и произвольного поля F многочлен $\mathscr{H}_{2m-1,\{2\}}(\bar{x}, \bar{y}|\bar{w}) = \sum\limits_{\pi\in S_m}\sum\limits_{\tau\in S_{m-1}} sgn\,\pi x_{\pi(1)}y_{\tau(1)}x_{\pi(2)}\cdots y_{\tau(m-1)}x_{\pi(m)}$ следует из $S_m^-(\bar{x})$.*

Доказательство. Полагая в теореме 3 $t=m-1$, получаем требуемый результат. □

Замечание 1. Основные свойства многочлена $\mathscr{H}_{2m-1,\{2\}}(\bar{x}, \bar{y}|\bar{w})$ хорошо известны. Этот многочлен имеет специальное обозначение $C_{2m-1,\{2\}}(\bar{x}, \bar{y})$ и называется двойным многочленом Капелли типа $(2, m, 1; \{2\})$.

Предложение 1. *Для любых $t, u, m \in \mathbf{N}$ таких, что $u=t<m$, и произвольного поля F характеристики не два многочлен $\mathscr{H}^+(\bar{x}, \bar{y}|\bar{w})$ следует из $S_m^-(\bar{x})$.*

Доказательство. По теореме 2 $\mathscr{H}(\bar{x}, \bar{y}|\bar{w}) \in \{S_m^-(\bar{x})\}^T$, по теореме 3

$$\mathscr{H}_{\{2\}}(\bar{x}, \bar{y}|\bar{w}) \in \{S_m^-(\bar{x})\}^T,$$

но тогда и

$$\mathscr{H}^+(\bar{x}, \bar{y}|\bar{w}) = \frac{1}{2}(\mathscr{H}(\bar{x}, \bar{y}|\bar{w}) + \mathscr{H}_{\{2\}}(\bar{x}, \bar{y}|\bar{w})) \in \{S_m^-(\bar{x})\}^T.$$ □

Теорема 4. *Для любого натурального числа $m>1$ и произвольного поля F характеристики не два многочлен $\mathscr{H}^+(\bar{x}, \bar{y}|\bar{w})$ следует из $S_m^-(\bar{x})$.*

Доказательство. Проведем методом математической индукции по парам $(t,u) \in A(\preceq) = \{(t,u) \in \mathbf{N}^2 \,|\, t \geqslant u, u<m\}$ с минимальными элементами (t,t), $t \in I_{m-1}$, где $\preceq$ — лексикографический порядок. В силу предложения 1 теорема 4 верна для любого минимального элемента $(t,t) \in A(\preceq)$.

Пусть (t,u) — произвольный элемент множества A, отличный от минимального. Предположим, что для любого $(t_1, u_1) \in A$ такого, что $(t_1,u_1) \prec (t,u)$, теорема 4 верна. Покажем, что она будет верной и для пары (t,u). Для элемента (t,u) возможны следующие случаи: 1) среди подслов $w_1, \ldots, w_u$ существует хотя бы одно w_s, для которого $|w_s| \geqslant 3$; 2) для любого $i \in I_u$ $|w_i| \leqslant 2$, при этом найдется w_r такое, что $|w_r|=2$. Рассмотрим каждый из них по порядку.

Пусть $w_s = b_s y_{i_{s+1}-2} y_{i_{s+1}-1} y_{i_{s+1}}$ (если $|w_s| = 3$, то слово b_s полагаем пустым). Нетрудно видеть, что для любых $\bar{n} \in B_1$, $\tau \in S_u$ справедливо равенство

$$(-1)^{(\Phi(\bar{n}),\tau\Psi(\bar{w}'))}\operatorname{sgn}(\tau w) = (-1)^{\left(\Phi(\bar{n}),\tau\Psi\left(\bar{w}'_{\widehat{i_{s+1}-1},\hat{i}_{s+1}}\right)\right)}\operatorname{sgn}\left(\tau w_{\widehat{i_{s+1}-1},\hat{i}_{s+1}}\right),$$

здесь $w_{\widehat{i_{s+1}-1},\hat{i}_{s+1}} = w_1 \cdots w_{s-1}(b_s y_{i_{s+1}-2}) w_{s+1} \cdots w_u$. Отсюда следует, что

$$\mathscr{H}^+(\bar{x},\bar{y}|\bar{w}) = \varphi\mathscr{H}^+\left(\bar{x},\bar{y}_{\widehat{i_{s+1}-1},\hat{i}_{s+1}}|\bar{w}_{\widehat{i_{s+1}-1},\hat{i}_{s+1}}\right),$$

где φ — эндоморфизм алгебры $F\{Z\}$ такой, что $\varphi(y_{i_{s+1}-2}) = y_{i_{s+1}-2} y_{i_{s+1}-1} y_{i_{s+1}}$ и $\varphi(z) = z$, если $z \neq y_{i_{s+1}-2}$. Так как ассоциированная с многочленом $\mathscr{H}^+\left(\bar{x},\bar{y}_{\widehat{i_{s+1}-1},\hat{i}_{s+1}}|\bar{w}_{\widehat{i_{s+1}-1},\hat{i}_{s+1}}\right)$ пара $(t-2,u) \prec (t,u)$, то по индуктивному предположению он следует из $S_m^-(\bar{x})$, но тогда и $\mathscr{H}^+(\bar{x},\bar{y}|\bar{w})$ следует из $S_m^-(\bar{x})$.

Во втором случае предположим, что $w_r = y_{i_r+1} y_{i_r+2}$. Рассмотрим эндоморфизмы $\varphi_1,\ldots,\varphi_m,\psi_{i_1+1},\ldots,\psi_{i_u+1}$ алгебры $F\{Z\}$, определенные следующим образом:

$$\varphi_i(z) = \begin{cases} x_i w_r, \text{ если } z = x_i, \\ z, \text{ если } z \neq x_i, \end{cases} \qquad \psi_{i_j+1}(z) = \begin{cases} w_r y_{i_j+1}, \text{ если } z = y_{i_j+1}, \\ z, \text{ если } z \neq y_{i_j+1}, \end{cases}$$

где $i \in I_m$, $j \in C = I_u \backslash \{r\}$, $i_1 = 0$. Нетрудно видеть, что

$$\mathscr{H}^+(\bar{x},\bar{y}|\bar{w}) = \sum_{i=1}^{m}\varphi_i\mathscr{H}^+(\bar{x},\bar{y}_{\widehat{i_r+1},\widehat{i_r+2}}|\bar{w}_{\hat{r}}) - \sum_{j\in C}\psi_{i_j+1}\mathscr{H}^+(\bar{x},\bar{y}_{\widehat{i_r+1},\widehat{i_r+2}}|\bar{w}_{\hat{r}}) - \\ -\mathscr{H}^+(\bar{x},\bar{y}_{\widehat{i_r+1},\widehat{i_r+2}}|\bar{w}_{\hat{r}})w_r,$$

где $\bar{w}_{\hat{r}} = (w_1 \ldots w_{r-1} w_{r+1} \ldots w_u)$. Так как ассоциированная с многочленом $\mathscr{H}^+\left(\bar{x},\bar{y}_{\widehat{i_r+1},\widehat{i_r+2}}|\bar{w}_{\hat{r}}\right)$ пара $(t-2,u-1) \prec (t,u)$, то по индуктивному предположению он является следствием $S_m^-(\bar{x})$, но тогда и $\mathscr{H}^+(\bar{x},\bar{y}|\bar{w})$ следует из $S_m^-(\bar{x})$. □

Предложение 2. *Для любого натурального числа $m > 1$ и произвольного поля F характеристики не два многочлен $\mathscr{H}^-(\bar{x},\bar{y}|\bar{w})$ следует из $S_m^-(\bar{x})$.*

Доказательство. По теореме 2 многочлен $\mathscr{H}(\bar{x},\bar{y}|\bar{w}) \in \{S_m^-(\bar{x})\}^T$, а по теореме 4 $\mathscr{H}^+(\bar{x},\bar{y}|\bar{w}) \in \{S_m^-(\bar{x})\}^T$, но тогда $\mathscr{H}^-(\bar{x},\bar{y}|\bar{w}) = \mathscr{H}(\bar{x},\bar{y}|\bar{w}) - \mathscr{H}^+(\bar{x},\bar{y}|\bar{w}) \in \in \{S_m^-(\bar{x})\}^T$. □

Следствие 8. *Для любого натурального числа $m > 1$ и произвольного поля F характеристики не два многочлены*

$$b_{2m-1}(\bar{x},\bar{y}) = \sum_{\pi\in S_m}\sum_{\tau\in A^+_{m-1}} \operatorname{sgn}\pi\, x_{\pi(1)} y_{\tau(1)} x_{\pi(2)} \cdots y_{\tau(m-1)} x_{\pi(m)},$$

$$h_{2m-1}(\bar{x},\bar{y}) = \sum_{\pi\in S_m}\sum_{\tau\in A^-_{m-1}} \operatorname{sgn}\pi\, x_{\pi(1)} y_{\tau(1)} x_{\pi(2)} \cdots y_{\tau(m-1)} x_{\pi(m)},$$

где $A^+_{m-1} = \{\tau \in S_{m-1}|\ \operatorname{sgn}\tau = 1\}$, $A^-_{m-1} = \{\tau \in S_{m-1}|\ \operatorname{sgn}\tau = -1\}$, являются следствиями стандартного многочлена $S_m^-(\bar{x})$.

Доказательство. Полагая в следствии 1 $s = r = 1$, $u = m - 1$ и учитывая следствие 4, получаем, что

$$\mathscr{H}^{+}(\bar{x}, \bar{y}|\bar{w}) = \sum_{\pi \in S_m} \sum_{\tau \in A_{m-1}^{sgn(-1)^{m(m-1)/2}}} \operatorname{sgn} \pi x_{\pi(1)} y_{\tau(1)} x_{\pi(2)} \cdots y_{\tau(m-1)} x_{\pi(m)},$$

$$-\mathscr{H}^{-}(\bar{x}, \bar{y}|\bar{w}) = \sum_{\pi \in S_m} \sum_{\tau \in A_{m-1}^{-\operatorname{sgn}(-1)^{m(m-1)/2}}} \operatorname{sgn} \pi x_{\pi(1)} y_{\tau(1)} x_{\pi(2)} \cdots y_{\tau(m-1)} x_{\pi(m)}.$$

Нетрудно видеть, что в зависимости от числа m наши суммы совпадают либо с многочленом $b_{2m-1}(\bar{x}, \bar{y})$, либо с многочленом $h_{2m-1}(\bar{x}, \bar{y})$, но по теореме 4 и предложению 2 они следуют из $S_m^{-}(\bar{x})$. □

Замечание 2. Выше мы определили многочлен $\mathscr{H}_{\{2\}}(\bar{x}, \bar{y}|\bar{w})$ для случая, когда $(t, u) = (t, t)$, $t < m$, и доказали теорему 3. Оказывается, что она верна и для общего случая, когда $t \geqslant u$, $m > u$, при этом доказательство почти дословно повторяет доказательство теоремы 4 с заменой $\mathscr{H}^{+}(\bar{x}, \bar{y}|\bar{w})$ на $\mathscr{H}_{\{2\}}(\bar{x}, \bar{y}|\bar{w})$ и соответствующих ссылок.

В заключении докажем одно предложение о некоторых тождествах матричной алгебры. Пусть A — произвольная ассоциативная алгебра над полем F.

Определение 2. Многочлен $d \in F\{Z\}$ называется *полиномиальным тождеством алгебры* A, если для любого гомоморфизма $\varphi \in Hom_F(F\{Z\}, A)$ справедливо равенство $\varphi(d) = 0$.

Нетрудно видеть, что множество всех полиномиальных тождеств алгебры A является T-идеалом алгебры $F\{Z\}$. Этот идеал называется идеалом тождеств алгебры A и обозначается символом $T[A]$. Заметим, что всякая конечномерная алгебра A обладает хотя бы одним полиномиальным тождеством, например, им является стандартный многочлен $S_n^{-}(\bar{z})$ при $n > \dim A$. В частности, если $A = M_m(F)$ — матричная алгебра над F, то в силу теоремы Амицура – Левицкого [7] наименьшее n, при котором $S_n^{-}(\bar{z}) \in T[M_m(F)]$, равно $2m$ (см. также [8, 9]), а наименьшее n, при котором двойные и кратные многочлены Капелли будут тождествами алгебры $M_m(F)$, найдено в работах [1, 10, 11]. Дополнением к этим результатам является приводимое ниже предложение.

Предложение 3. *Наименьшее $n \in \mathbf{N}$, при котором каждый из многочленов $b_{2n-1}, h_{2n-1} \in T[M_m(F)]$, равно $2m$.*

Доказательство. Проведем его для многочлена b_{2n-1}, поскольку для h_{2n-1} оно аналогично. Пусть $char\, F \neq 2$ и $d(m, F)$ означает наименьшее $n \in \mathbf{N}$, при котором $b_{2n-1} \in T[M_m(F)]$. Тогда из следствия 8 и теоремы Амицура – Левицкого заключаем, что $d(m, F) \leqslant 2m$, а из теоремы 4 работы [12] следует, что $d(m, F) > 2m - 1$. Отсюда $d(m, F) = 2m$. Так как коэффициенты многочлена b_{2n-1} равны ± 1, то ограничение $\operatorname{char} F \neq 2$ для матричной алгебры $M_m(F)$ становится несущественным и потому его можно снять. □

Продолжение следует.

Библиографический список

1. *Chang Q.* Some consequences of the standard polynomial // Proc. Amer. Math. Soc. 1988. Vol. 104, № 3. P. 707–710. DOI: 10.2307/2046778.
2. *Антонов С. Ю., Антонова А. В.* К теореме Ченга // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2015. Т. 15, вып. 3. С. 247–251. DOI: 10.18500/1816-9791-2015-15-3-247-251.
3. *Гатева Т. В.* Сложность произведения многообразий ассоциативных алгебр // УМН. 1981. Т. 36, вып. 1(217). С. 203–204.
4. *Кемер А. Р.* Замечание о стандартном тождестве // Матем. заметки. 1978. Т. 23, № 5. С. 753–757.
5. *Benanti F., Drensky V.* On the consequences of the standard polynomial // Comm. Algebra. 1998. Vol. 26. P. 4243–4275.
6. *Leron U.* Multilinear identities of the matrix ring // Trans. Amer. Math. Soc. 1973. Vol. 183. P. 175–202.
7. *Amitsur S. A., Levitzki* J.Minimal identities for algebras // Proc. Amer. Math. Soc. 1950. Vol. 1, № 4. P. 449–463.
8. *Owens F. W.* Applications of graph theory to matrix theory // Amer. Math. Soc. 1975. Vol. 51, № 1. P. 242–249.
9. *Rosset S.* A new proof of the Amitsur – Levitzki identity // Israel J. Math. 1976. Vol. 23. P. 187–188.
10. *Szigeti J., Tuza Z., Revesz G.* Eulerian polynomial identities on matrix rings // J. of Algebra. 1993. Vol. 161, iss. 1. P. 90–101.
11. *Lee A., Revesz G., Szigeti J., Tuza Z.* Capelli polynomials, almost-permutation matrices and sparse Eulerian graphs // Descrete Math. 2001. Vol. 230, № 1–3. P. 49–61.
12. *Антонов С. Ю.* Наименьшая степень тождеств подпространства $M_1^{(m,k)}(F)$ матричной супералгебры $M^{(m,k)}(F)$ // Изв. вузов. Матем. 2012. № 11. С. 3–19.

Образец для цитирования:

Антонов С. Ю., Антонова А. В. К теореме Ченга. II // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2017. Т. 17, вып. 2. С. 127–137. DOI: 10.18500/1816-9791-2017-17-2-127-137.

To Chang Theorem. II

S. Yu. Antonov[1], A. V. Antonova[2]

[1]Stepan Yu. Antonov, ORCID: 0000-0003-1705-3929, Kazan State Power Engineering University, 51, Krasnosel'skaya str., Kazan, Russia, 420066, antonovst-vm@rambler.ru

[2]Alina V. Antonova, ORCID: 0000-0001-7047-7275, Kazan State Power Engineering University, 51, Krasnosel'skaya str., Kazan, Russia, 420066, antonovakazan@rambler.ru

Multilinear polynomials $\mathscr{H}^+(\bar{x},\bar{y}|\bar{w})$, $\mathscr{H}^-(\bar{x},\bar{y}|\bar{w}) \in F\{X\cup Y\}$, the sum of which is a polynomial $\mathscr{H}(\bar{x},\bar{y}|\bar{w})$ Chang (where $F\{X\cup Y\}$ is a free associative algebra over an arbitrary field F of characteristic not equal two, generated by a countable set $X\cup Y$) have been introduced in this paper. It has been proved that each of them is a consequence of the standard polynomial $S^-(\bar{x})$. In particular it has been shown that the Capelli quasi-polynomials $b_{2m-1}(\bar{x}_m,\bar{y})$ and $h_{2m-1}(\bar{x}_m,\bar{y})$ are also consequences of the polynomial $S_m^-(\bar{x})$. The minimal degree of the polynomials $b_{2m-1}(\bar{x}_m,\bar{y})$, $h_{2m-1}(\bar{x}_m,\bar{y})$ in which they are a polynomial identity of matrix algebra $M_n(F)$ has been also found in the paper. The obtained results are the translation of Chang results to some Capelli quasi-polynomials of odd degree.

Key words: T-ideal, standard polynomial, Capelli polynomial.

References

1. Chang Q. Some consequences of the standard polynomial. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 1988, vol. 104, no. 3, pp. 707–710. DOI: 10.2307/2046778.
2. Antonov S. Yu., Antonova A. V. To Chang theorem. *Izv. Saratov Univ. (N.S.), Ser. Math. Mech. Inform.*, 2015, vol. 15, iss. 3, pp. 247–251 (in Russian). DOI: 10.18500/1816-9791-2015-15-3-247-251.
3. Gateva T. V. The complexity of a bundle of varieties of associative algebras. *Russian Math. Surveys*, 1981, vol. 36, no. 1, pp. 233. DOI: 10.1070/RM1981v036n01ABEH002548.
4. Kemer A. R. Remark on the standard identity. *Math. Notes*, 1978, vol. 23, no. 5, pp. 414–416. DOI: 10.1007/BF01789011.
5. Benanti F., Drensky V. On the consequences of the standard polynomial. *Comm. Algebra*, 1998, vol. 26, pp. 4243–4275.
6. Leron U. Multilinear identities of the matrix ring. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 1973. vol. 183, pp. 175–202.
7. Amitsur S. A., Levitzki J. Minimal identities for algebras. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 1950, vol. 1, no. 4, pp. 449–463.
8. Owens F. W. Applications of graph theory to matrix theory. *Amer. Math. Soc.*, 1975, vol. 51, no. 1, pp. 242–249.
9. Rosset S. A new proof of the Amitsur – Levitzki identity. *Israel J. Math.*, 1976, vol. 23, pp. 187–188.
10. Szigeti J., Tuza Z., Revesz G. Eulerian polynomial identities on matrix rings. *J. of Algebra*, 1993, vol. 161, iss. 1, pp. 90–101. DOI: 10.1006/jabr.1993.1207.
11. Lee A., Revesz G., Szigeti J., Tuza Z. Capelli polynomials, almost-permutation matrices and sparse Eulerian graphs. *Descrete Math.*, 2001, vol. 230, no. 1–3, pp. 49–61.
12. Antonov S. Yu. The least degree identities subspace $M_1^{(m,k)}(F)$ of matrix superalgebra $M^{(m,k)}(F)$. *Russian Math. (Iz. VUZ)*, 2012, vol. 56, no. 11, pp. 1–16. DOI: 10.3103/S1066369X12110011.

Cite this article as:
Antonov S. Yu., Antonova A. V. To Chang Theorem. II. *Izv. Saratov Univ. (N. S.), Ser. Math. Mech. Inform.*, 2017, vol. 17, iss. 2, pp. 127–137 (in Russian). DOI: 10.18500/1816-9791-2017-17-2-127-137.