УДК 514.76

ПРОДОЛЖЕННЫЕ СТРУКТУРЫ НА КОРАСПРЕДЕЛЕНИЯХ КОНТАКТНЫХ МЕТРИЧЕСКИХ МНОГООБРАЗИЙ

С. В. Галаев

Галаев Сергей Васильевич, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры геометрии, Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского, 410012, Россия, Саратов, Астраханская, 83, sgalaev@mail.ru

В статье вводится понятие AP-многообразия — почти контактного метрического многообразия, локально эквивалентного прямому произведению контактного метрического многообразия и почти эрмитова многообразия. Нормальное AP-многообразие с замкнутой фундаментальной формой является квазисасакиевым. Квазисасакиево AP-многообразие названо в статье специальным квазисасакиевым многообразием (SQS-многообразием). SQS-многообразие локально эквивалентно произведению сасакиева и кэлерова многообразий. В качестве вспомогательного результата доказывается предложение, утверждающее, что контактное метрическое многообразие с распределением нулевой кривизны является K-контактным метрическим пространством. Кораспределение D^* контактной метрической структуры $(M, \vec{\xi}, \eta, \varphi, g, D)$ определяется как подрасслоение кокасательного расслоения T^*M, состоящее из всех 1-форм, обращающихся в нуль на структурном векторе $\vec{\xi}$. На кораспределении D^* задается продолженная почти контактная метрическая структура $(D^*, \vec{u} = \partial_n, \mu = \eta\circ\pi_*, J, G, \tilde{D})$. Выводятся структурные уравнения, на основе которых доказывается, что продолженная почти контактная метрическая структура задает структуру AP-многообразия тогда и только тогда, когда тензор кривизны Схоутена контактного метрического многообразия M равен нулю. Статью завершает теорема, утверждающая, что продолженная почти контактная метрическая структура является SQS-структурой тогда и только тогда, когда в качестве исходного многообразия выбирается сасакиево многообразие с распределением нулевой кривизны.

Ключевые слова: квазисасакиево многообразие, внутренняя связность, ассоциированная связность, тензор кривизны Схоутена, распределение нулевой кривизны..

DOI: 10.18500/1816-9791-2017-17-2-138-147

ВВЕДЕНИЕ

Пусть M — гладкое многообразие нечетной размерности $n = 2m + 1$ с заданной на нем контактной метрической структурой $(M, \vec{\xi}, \eta, \varphi, g, D)$. Кораспределение D^* почти контактного метрического многообразия M образовано всеми допустимыми 1-формами: $\lambda \in D^* \leftrightarrow \lambda(\vec{\xi}) = 0$ и является нечетномерным аналогом кокасательного расслоения T^*M. Геометрия кокасательного расслоения T^*M с метрикой Сасаки изучалась в работах [1–3]. Использованные в указанных работах методы получили свое развитие в исследованиях геометрии касательных расслоений TM (см., например, [3–9]). Нечетномерным аналогом касательного расслоения является распределение D почти контактной метрической структуры. В работе [10] с помощью внутренней и N-продолженной связностей на распределении D была определена почти контактная метрическая структура, названная продолженной почти контактной метрической структурой. Результаты дальнейших исследований продолженных почти контактных метрических структур и их обобщений отражены в работах [11–16]. Так, в частности, в [12] на распределении D задается геодезическая пульверизация связности над распределением, являющаяся аналогом геодезической пульверизации, заданной на пространстве касательного расслоения TM и имеющая ясную физическую интерпретацию: проекции интегральных кривых геодезической пульверизации связности над распределением совпадают с допустимыми геодезическими (траекториями движения механической системы со связями). В настоящей статье понятие продолженной почти контактной метрической структуры рассматривается применительно к кораспределению D^*. Основная задача предлагаемой работы сводится к нахождению условий, при которых продолженная почти контактная метрическая структура является структурой AP-многообразия. Предположим, что распределение D почти контактной метрической структуры разлагается в прямую сумму вида $D = L \oplus L^{\perp}$, где $L^{\perp} = K \cap D$ — ядро формы $\omega = d\eta$, распределение L ортогонально распределению $L^{\perp}$ и инвариантно относительно действия эндоморфизма φ. Таким образом, $\dim L = \operatorname{rk} d\eta = 2p \leqslant 2m$. Если дополнительно распределение $\tilde{L} = L \oplus D^{\perp}$ интегрируемо и имеет место равенство $d\eta(\vec{x},\vec{y}) = \Omega(\vec{x},\vec{y})$, $\vec{x},\vec{y} \in \Gamma(L)$, где $\Gamma(L)$ — модуль сечений распределения L, то многообразие M будем называть AP-многообразием. AP-многообразие локально эквивалентно прямому произведению контактного метрического многообразия и почти эрмитова многообразия. Квазисасакиево AP-многообразие названо в статье специальным квазисасакиевым многообразием (SQS-многообразием). SQS-многообразие локально эквивалентно произведению сасакиева и кэлерова многообразий.

1. ПОЧТИ КОНТАКТНЫЕ МЕТРИЧЕСКИЕ МНОГООБРАЗИЯ СПЕЦИАЛЬНОГО ВИДА

Пусть M — гладкое многообразие нечетной размерности $n = 2m + 1$, $\Gamma(TM)$ — модуль гладких векторных полей на M. Все многообразия, тензорные поля и другие геометрические объекты предполагаются гладкими класса C^{∞}. Предположим, что на M задана почти контактная метрическая структура $(M, \vec{\xi}, \eta, \varphi, g, D)$, где φ — тензор типа (1,1), называемый структурным эндоморфизмом или допустимой почти комплексной структурой, $\vec{\xi}$ и η — вектор и ковектор, называемые соответственно структурным вектором и контактной формой, g — (псевдо) риманова метрика. При этом выполняются следующие условия:

1) $\varphi^2 = -I + \eta \otimes \vec{\xi}$;

2) $\eta(\vec{\xi}) = 1$;

3) $g(\varphi\vec{x}, \varphi\vec{y}) = g(\vec{x},\vec{y}) - \eta(\vec{x})\eta(\vec{y})$;

4) $d\eta(\vec{\xi}, \vec{x}) = 0$, где $\vec{x},\vec{y} \in \Gamma(TM)$.

Гладкое распределение $D = \ker \eta$ называется распределением почти контактной структуры.

В качестве следствия условий 1)–4) получаем:

5) $\varphi(\vec{\xi}) = 0$;

6) $\eta \circ \varphi = 0$;

7) $\eta(\vec{x}) = g(\vec{x},\vec{\xi})$, $\vec{x} \in \Gamma(TM)$.

Если $\operatorname{rk}\omega = 2m$, где $\omega = d\eta$, вектор $\vec{\xi}$ однозначно определяется из условий $\eta(\vec{\xi}) = 1$, $\ker\omega = Span(\vec{\xi})$.

Кососимметрический тензор $\Omega(\vec{x},\vec{y}) = g(\vec{x},\varphi\vec{y})$ называется фундаментальной формой структуры. Почти контактная метрическая структура называется контактной метрической структурой, если выполняется равенство $\Omega = d\eta$. Гладкое распределение $D^{\perp} = Span(\vec{\xi})$, ортогональное распределению D, называется оснащением распределения D. Имеет место разложение $TM = D \oplus D^{\perp}$.

Многообразие Сасаки — контактное метрическое пространство, удовлетворяющее дополнительному условию

$$N_{\varphi} + 2d\eta \otimes \vec{\xi} = 0,$$

где $N_{\varphi}(\vec{x},\vec{y}) = [\varphi\vec{x},\varphi\vec{y}] + \varphi^2[\vec{x},\vec{y}] - \varphi[\varphi\vec{x},\vec{y}] - \varphi[\vec{x},\varphi\vec{y}]$ — тензор Нейенхейса эндоморфизма φ. Выполнение условия $N_{\varphi} + 2d\eta \otimes \vec{\xi} = 0$ означает, что пространство Сасаки является нормальным пространством. Символы $\Gamma(E)$ будем использовать для обозначения модуля сечений распределения $E \subset TM$.

Предположим, что $\operatorname{rk} d\eta = 2p$, $0 \leqslant 2p \leqslant 2m$. Хорошо известно, что ядро формы $\omega = d\eta$ является интегрируемым распределением, которое в дальнейшем будем обозначать символом K. Пусть $P : TM \to D$, $Q : TM \to D^{\perp}$, $h : TM \to L$, $v : TM \to L^{\perp}$ — проекторы, определяемые разложением $TM = L \oplus L^{\perp} \oplus D^{\perp} = D \oplus D^{\perp}$, где $L^{\perp} = K \cap D$, а L — ортогональное ему распределение в D.

Имеет место

Предложение 1. *Распределение $L^{\perp}$ интегрируемо.*

Доказательство. Пусть $\vec{x},\vec{y} \in \Gamma(L^{\perp})$. Покажем, что $[\vec{x},\vec{y}] \in \Gamma(L^{\perp})$. Имеем, $2d\eta(\vec{x},\vec{y}) = -\eta([\vec{x},\vec{y}]) = 0$. Отсюда следует, $[\vec{x},\vec{y}] \in \Gamma(D)$. Далее, для произвольного $\vec{z} \in \Gamma(TM)$ получаем: $0 = 3d\omega(\vec{x},\vec{y},\vec{z}) = -\omega([\vec{x},\vec{y}],\vec{z})$. Таким образом, $[\vec{x},\vec{y}] \in \Gamma(L^{\perp})$, что и доказывает предложение. $\square$

Многообразие M с почти контактной метрической структурой $(M,\vec{\xi},\eta,\varphi,g,D)$ назовем AP-многообразием, если выполняются следующие три условия.

1. Распределение L инвариантно относительно действия эндоморфизма φ.
2. Распределение $\tilde{L} = L \oplus D^{\perp}$ — интегрируемо.
3. Имеет место равенство

$$d\eta(\vec{x},\vec{y}) = \Omega(\vec{x},\vec{y}),\ \vec{x},\vec{y} \in \Gamma(L).$$

Квазисасакиево многообразие, являющееся одновременно AP-многообразием, назовем специальным квазисасакиевым многообразием (SQS-многообразием).

Используя интегрируемость распределения K, определим на многообразии M адаптированную карту $K(x^{\alpha})$ $(A,B,C = 1,\dots,2p;\ \alpha,\beta,\gamma = 1,\dots,n = 2m+1;\ a,b,c = 1,\dots,2m;\ i,j,k = 2p+1,\dots,2m)$, полагая $L^{\perp} = \mathrm{Span}(\partial_i)$, $\partial_n = \vec{\xi}$. Мы здесь использовали обозначение $\frac{\partial}{\partial x^{\alpha}} = \partial_{\alpha}$.

Пусть $K(x^{\alpha})$ и $K'(x^{\alpha'})$ — адаптированные карты, тогда получаем следующие формулы преобразования координат:

$$x^A = x^A(x^{A'}), \qquad x^i = x^i(x^{a'}), \qquad x^n = x^{n'} + x^n(x^{a'}).$$

Векторные поля $h(\partial_A) = \vec{e}_A = \partial_A - \Gamma^i_A\partial_i - \Gamma^n_A\partial_n$ линейно независимы и в области определения соответствующей карты порождают распределение L: $L = \mathrm{Span}(\vec{e}_A)$. Таким образом, мы имеем на многообразии M неголономное поле базисов $(\vec{e}_\alpha) = (\vec{e}_A, \partial_i, \partial_n)$ и соответствующее ему поле кобазисов

$$(dx^A, dx^i + \Gamma^i_A dx^A, dx^n + \Gamma^n_A dx^A).$$

Непосредственно проверяется, что в случае AP-многообразия $[\vec{e}_A, \vec{e}_B] = 2\omega_{BA}\partial_n$, $\partial_n\Gamma^n_A = \partial_i\Gamma^n_A = 0$.

Используя интегрируемость распределения $\tilde{L}$, потребуем дополнительно выполнение равенства $\Gamma^i_A = 0$.

Пример SQS-многообразия. Пусть $M = \mathbb{R}^5 = \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^2$, (∂_α) — стандартный базис арифметического пространства. Определим на M 1-форму η, полагая, что $\eta = dx^3 + x^2dx^1$. Очевидно, что $\eta(\partial_3) = 1$, $\eta(\partial_2) = \eta(\partial_4) = \eta(\partial_5) = \eta(\vec{e}_1) = 0$, где $\vec{e}_1 = \partial_1 - x^2\partial_3$. Структуру риманова многообразия на M определим, считая базис $(\vec{e}_1, \partial_2, \partial_3, \partial_4, \partial_5)$ ортонормированным. И наконец, положим $\varphi\vec{e}_1 = \partial_2$, $\varphi\partial_4 = \partial_5$, $\varphi\partial_2 = -\vec{e}_1$, $\varphi\partial_5 = -\partial_4$, $\varphi\partial_3 = 0$.

2. ТЕНЗОР КРИВИЗНЫ СХОУТЕНА

Тензорное поле t типа (p, q), заданное на почти контактном метрическом многообразии, назовем допустимым (к распределению D), если t обращается в нуль каждый раз, когда среди его аргументов встречаются $\vec{\xi}$ или η. Координатное представление допустимого тензорного поля в адаптированной карте имеет вид

$$t = t^{a_1\dots a_p}_{b_1\dots b_q}\vec{e}_{a_1} \otimes \dots \otimes \vec{e}_{a_p} \otimes dx^{b_1} \otimes \dots \otimes dx^{b_q}.$$

Преобразование компонент допустимого тензорного поля в адаптированных координатах подчиняется следующему закону:

$$t^a_b = A^a_{a'}A^{b'}_b t^{a'}_{b'},$$

где $A^{a'}_a = \frac{\partial x^{a'}}{\partial x^a}$.

Из формул преобразования компонент допустимого тензорного поля следует, что производные $\partial_n t^a_b$ компонент допустимого тензорного поля являются компонентами допустимого тензорного поля того же типа. Заметим, что обращение в нуль производных $\partial_n t^a_b$ не зависит от выбора адаптированных координат.

Внутренней линейной связностью ∇ [16] на многообразии с почти контактной структурой называется отображение

$$\nabla : \Gamma(D) \times \Gamma(D) \to \Gamma(D),$$

удовлетворяющее следующим условиям:

1) $\nabla_{f_1\vec{x}+f_2\vec{y}} = f_1\nabla_{\vec{x}} + f_2\nabla_{\vec{y}}$;

2) $\nabla_{\vec{x}}f\vec{y} = (\vec{x}f)\vec{y} + f\nabla_{\vec{x}}\vec{y}$;

3) $\nabla_{\vec{x}}(\vec{y} + \vec{z}) = \nabla_{\vec{x}}\vec{y} + \nabla_{\vec{x}}\vec{z}$,

где $\Gamma(D)$ — модуль допустимых векторных полей.

Внутренняя связность определяет дифференцирования допустимых тензорных полей. Так, например, для допустимой почти комплексной структуры выполняется равенство

$$(\nabla_{\vec{x}}\varphi)\vec{y} = \nabla_{\vec{x}}(\varphi\vec{y}) - \varphi(\nabla_{\vec{x}}\vec{y}), \qquad \vec{x}, \vec{y} \in \Gamma(D).$$

Коэффициенты внутренней линейной связности определяются из соотношения $\nabla_{\vec{e}_a}\vec{e}_b = \Gamma^c_{ab}\vec{e}_c$. Из равенства $\vec{e}_a = A^{a'}_a\vec{e}_{a'}$, где $A^{a'}_a = \frac{\partial x^{a'}}{\partial x^a}$, обычным образом следует формула преобразования для коэффициентов внутренней связности:

$$\Gamma^c_{ab} = A^{a'}_a A^{b'}_b A^c_{c'} \Gamma^{c'}_{a'b'} + A^c_{c'}\vec{e}_a A^{c'}_b.$$

Кручением внутренней связности назовем допустимое тензорное поле

$$S(\vec{x}, \vec{y}) = \nabla_{\vec{x}}\vec{y} - \nabla_{\vec{y}}\vec{x} - P[\vec{x}, \vec{y}], \qquad \vec{x}, \vec{y} \in \Gamma(D).$$

Внутреннюю связность будем называть симметричной, если ее кручение равно нулю. В случае симметричности внутренней связности в адаптированных координатах получаем:

$$S^c_{ab} = \Gamma^c_{ab} - \Gamma^c_{ba}, \qquad \text{или} \qquad \Gamma^c_{ab} = \Gamma^c_{ba}.$$

Допустимое тензорное поле, определяемое равенством

$$R(\vec{x}, \vec{y})\vec{z} = \nabla_{\vec{x}}\nabla_{\vec{y}}\vec{z} - \nabla_{\vec{y}}\nabla_{\vec{x}}\vec{z} - \nabla_{P[\vec{x},\vec{y}]}\vec{z} - P[Q[\vec{x}, \vec{y}], \vec{z}],$$

где $Q = I - P$, названо Вагнером тензором кривизны Схоутена [17, 18]. Тензор Схоутена будем называть тензором кривизны внутренней связности. Координатное представление тензора Схоутена в адаптированных координатах имеет вид

$$R^d_{abc} = 2\vec{e}_{[a}\Gamma^d_{b]c} + 2\Gamma^d_{[a||e||}\Gamma^e_{b]c}.$$

Тензор кривизны внутренней связности возникает в результате альтернирования вторых ковариантных производных:

$$2\nabla_{[a}\nabla_{b]}v^c = R^c_{abe}v^e + 4\omega_{ba}\partial_n v^c.$$

Назовем тензор кривизны внутренней связности тензором кривизны распределения D, а распределение D, в случае обращения в нуль тензора Схоутена, — распределением нулевой кривизны.

Аналогом связности Леви – Чивита является внутренняя симметричная связность ∇ такая, что $\nabla g = 0$, где g — допустимое тензорное поле, определяемое метрическим тензором исходной почти контактной метрической структуры. Назовем связность ∇ внутренней метрической связностью. Известно, что внутренняя симметричная метрическая связность существует и определена единственным образом. Ее коэффициенты задаются равенствами

$$\Gamma^a_{bc} = \frac{1}{2}g^{ad}(\vec{e}_b g_{cd} + \vec{e}_c g_{bd} - \vec{e}_d g_{bc}).$$

Предложение 2. *Контактное метрическое многообразие размерности с распределением нулевой кривизны является K-контактным пространством.*

Доказательство. Пусть ∇ — внутренняя метрическая связность:

$$\vec{z}g(\vec{x},\vec{y}) = g(\nabla_{\vec{z}}\vec{x},\vec{y}) + g(\vec{x},\nabla_{\vec{z}}\vec{y}) = 0, \qquad \vec{x},\vec{y},\vec{z} \in \Gamma(D).$$

Дифференцируя последнее равенство повторно и альтернируя полученный результат, получаем:

$$2\omega_{ea}\partial_n g_{bc} - g_{dc}R^d_{eab} - g_{bd}R^d_{eac} = 0.$$

Учитывая невырожденность формы ω, заключаем, что равенство $R^d_{eac} = 0$ влечет равенство $\partial_n g_{bc} = 0$. Что и доказывает предложение. □

Используя равенство $\Gamma^a_{bc} = \frac{1}{2}g^{ad}(\vec{e}_b g_{cd} + \vec{e}_c g_{bd} - \vec{e}_d g_{bc})$, получаем

Следствие. *Пусть M — многообразие, наделенное контактной метрической структурой, тогда обращение в нуль тензора кривизны Схоутена влечет равенство $P^a_{bc} = 0$.*

Следующая теорема позволяет сформулировать более сильный результат.

Теорема 1 (см. [14]). *Пусть $(M,\vec{\xi},\eta,\varphi)$ — контактная метрическая структура, заданная на многообразии M. Тогда обращение в нуль тензора Схоутена эквивалентно существованию такого атласа, состоящего из адаптированных карт, для которого выполняются равенства $\Gamma^a_{bc} = 0$.*

3. ПРОДОЛЖЕННЫЕ ПОЧТИ КОНТАКТНЫЕ МЕТРИЧЕСКИЕ СТРУКТУРЫ

Пусть M — гладкое многообразие нечетной размерности $n = 2m+1$ с заданной на нем контактной метрической структурой $(M,\vec{\xi},\eta,\varphi,g,D)$. Введем на кораспределении D^* структуру гладкого многообразия, поставив в соответствие каждой адаптированной карте $K(x^\alpha)$ многообразия M сверхкарту $\tilde{K}(x^\alpha,p_a)$ на многообразии D^*, где p_a — координаты допустимого ковектора в кобазисе

$$(dx^a, \eta = dx^n + \Gamma^n_a dx^a),$$

сопряженном базису

$$(\vec{e}_a = \partial_a - \Gamma^n_a\partial_n, \partial_n).$$

Построенную сверхкарту также будем называть адаптированной. Поставим каждому допустимому векторному полю $\vec{x} \in \Gamma(D)$, $\vec{x} = x^a\vec{e}_a$, и каждому допустимому ковекторному полю $\lambda \in \Gamma(D^*)$, $\lambda = \lambda_a dx^a$, векторные поля $\vec{x}^h = x^a\vec{\varepsilon}_a$, $\lambda^v = \lambda_a\partial^a$ соответственно, где $\vec{\varepsilon}_a = \partial_a - \Gamma^n_a\partial_n + p_b\Gamma^b_{ac}\partial^c$, $\partial^a = \frac{\partial}{\partial p_a}$.

На тотальном пространстве D^* векторного расслоения (D^*,π,M), где $\pi : D^* \to M$ — естественная проекция, таким образом, возникает гладкое распределение $\tilde{D} = H \oplus V$, где $H = \mathrm{Span}(\vec{\varepsilon}_a)$, $V = \mathrm{Span}(\partial^a)$.

Замечание 1. Иногда мы не делаем различие между распределением и модулем сечений распределения, что не приводит к недоразумениям.

Определим на пространстве D^* метрический тензор G, полагая, что

$$G(\vec{\varepsilon}_a,\, \vec{\varepsilon}_b) = G(\partial^a, \partial^b) = g_{ab}, \qquad G(\partial_n, \partial_n) = 1,$$
$$G(\vec{\varepsilon}_a, \partial^b) = G(\vec{\varepsilon}_a, \partial_n) = G(\partial^a, \partial_n) = 0,$$

и допустимую почти комплексную структуру J, таким образом,

$$J\vec{x}^h = -(\varphi\vec{x})^h, \qquad J\lambda^v = (\varphi\lambda)^v, \qquad J(\vec{u}) = \vec{0}.$$

Имеют место следующие структурные уравнения:

$$[\vec{\varepsilon}_a,\, \vec{\varepsilon}_b] = 2\omega_{ba}\vec{u} + p_c R^c_{abe}\partial^e, \qquad [\vec{\varepsilon}_a, \partial^b] = -\Gamma^b_{ac}\partial^c, \qquad [\vec{\varepsilon}_a,\, \partial_n] = -p_b\partial_n\Gamma^b_{ac}\partial^c.$$

Здесь $R^d_{abc} = 2\vec{e}_{[a}\Gamma^d_{b]c} + 2\Gamma^d_{[a||e||}\Gamma^e_{b]c}$ — компоненты тензора Схоутена:

$$R(\vec{x},\vec{y})\vec{z} = \nabla_{\vec{x}}\nabla_{\vec{y}}\vec{z} - \nabla_{\vec{y}}\nabla_{\vec{x}}\vec{z} - \nabla_{P[\vec{x},\vec{y}]}\vec{z} - P[Q[\vec{x},\vec{y}],\vec{z}].$$

Проводя необходимые рассуждения, убеждаемся в справедливости следующей теоремы.

Теорема 2. *Система $(D^*, \vec{u} = \partial_n, \mu = \eta \circ \pi_*, J, G, \tilde{D})$ является почти контактной метрической структурой.*

Назовем полученную структуру продолженной (до распределения D^*) почти контактной метрической структурой.

Имеет место следующее

Предложение 3. *Почти контактная метрическая структура $(D^*, \vec{u} = \partial_n, \mu = \eta \circ \pi_*, J, G, \tilde{D})$ задает структуру AP-многообразия тогда и только тогда, когда тензор кривизны Схоутена равен нулю.*

Доказательство. 1. Распределение H инвариантно относительно действия эндоморфизма J в следствии с определением J: $J\vec{x}^h = -(\varphi\vec{x})^h$.

2. Как следует из равенств

$$[\vec{\varepsilon}_a, \vec{\varepsilon}_b] = 2\omega_{ba}\vec{u} + p_c R^c_{abe}\partial^e, \qquad [\vec{\varepsilon}_a, \partial_n] = -p_b\partial_n\Gamma^b_{ac}\partial^c,$$

распределение $\tilde{L} = H \oplus D^\perp$, где $D^\perp = \mathrm{Span}(\partial_n)$, — интегрируемо тогда и только тогда, когда $R^c_{bae} = 0$, $\partial_n\Gamma^b_{ac} = 0$. Как следует из предложения 2, второе из последних двух равенств является следствием первого.

3. Справедливость равенства $d\mu(\vec{x},\vec{y}) = \Omega(\vec{x},\vec{y})$ следует из того, что исходное многообразие является контактным метрическим пространством. Тем самым, предложение доказано. □

Опираясь на предложение 3 и координатное представление тензора Нейенхейса эндоморфизма J, убеждаемся в справедливости следующей теоремы.

Теорема 3. *Почти контактная метрическая структура $(D^*, \vec{u} = \partial_n, \mu = \eta\circ\pi_*, J, G, \tilde{D})$ определяет структуру SQS-многообразия тогда и только тогда, когда распределение D является распределением нулевой кривизны сасакиева многообразия.*

Библиографический список

1. *Salimov A. A., Agca F.* On para-Nordenian structures // Ann. Polon. Math. 2010. Vol. 99, № 2. P. 193–200. DOI: 10.4064/ap99-2-6.
2. *Salimov A. A., Agca F.* Some properties of Sasakian metrics in cotangent bundles // Mediterr. J. Math. 2011. Vol. 8, iss. 2. P. 243–255. DOI: 10.1007/s00009-010-0080-x.
3. *Yano K., Ishihara S.* Tangent and cotangent bundles. N. Y. : Marcel Dekker, 1973. 434 p.
4. *Aso K.* Notes on some properties of the sectional curvature of the tangent bundle // Yokohama Math. J. 1981. Vol. 5. P. 1–5.
5. *Gudmundsson S., Kappos E.* On the geometry of the tangent bundles // Expo. Math. 2002. Vol. 20, iss. 1. P. 1–41.
6. *Kowalski O.* Curvature of the induced Riemannian metric on the tangent bundle of Riemannian manifold // J. Reine Angew. Math. 1971. Vol. 250. P. 124–129.
7. *Musso E., Tricerri F* Riemannian metric on tangent bundles // Ann. Math. Pura. Appl. 1988. Vol. 150, iss. 1. P. 1–19. DOI: 10.1007/BF01761461.
8. *Salimov A. A.* Tensor operators and their applications. N. Y. : Nova Science Publ., 2013. 692 p.
9. *Sasaki S.* On the Differential geometry of tangent bundles of Riemannian manifols // Tohoku Math. J. 1958. Vol. 10, № 3. P. 338–358.
10. *Букушева А. В., Галаев С. В.* Почти контактные метрические структуры, определяемые связностью над распределением с допустимой финслеровой метрикой // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2012. Т. 12, вып. 3. С. 17–22.
11. *Букушева А. В.* Слоения на распределениях с финслеровой метрикой // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2014. Т. 14, вып. 3. С. 247–251.
12. *Букушева А. В., Галаев С. В.* Связности над распределением и геодезические пульверизации // Изв. вузов. Матем. 2013. № 4. С. 10–18.
13. *Галаев С. В.* Геометрическая интерпретация тензора кривизны Вагнера для случая многообразия с контактной метрической структурой // Сиб. матем. журн. 2016. Т. 57, № 3(337). С. 632–640. DOI: 10.17377/smzh.2016.57.310.
14. *Галаев С. В.* Допустимые гиперкомплексные структуры на распределениях сасакиевых многообразий // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2016. Т. 16, вып. 3. С. 263–272. DOI: 10.18500/1816-9791-2016-16-3-263-272.
15. *Букушева А. В.* О геометрии контактных метрических пространств с φ-связностью // Науч. ведомости Белгород. гос. ун-та. Сер. Математика. Физика. 2015. № 17(214), вып. 40. С. 20–24.
16. *Галаев С. В.* N-продолженные симплектические связности в почти контактных метрических пространствах // Изв. вузов. Матем. 2017. № 3. С. 15–23.
17. *Вагнер В. В.* Геометрия $(n-1)$-мерного неголономного многообразия в n-мерном пространстве // Тр. семинара по векторному и тензорному анализу. М. : Изд-во Моск. ун-та, 1941. Вып 5. С. 173–255.
18. *Вагнер В. В.* Геометрическая интерпретация движения неголономных динамических систем // Тр. семинара по векторному и тензорному анализу. М. : Изд-во Моск. ун-та, 1941. Вып. 5. С. 301–327.

Образец для цитирования:

Галаев С. В. Продолженные структуры на кораспределениях контактных метрических многообразий // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2017. Т. 17, вып. 2. С. 138–147. DOI: 10.18500/1816-9791-2017-17-2-138-147.

Extended Structures on Codistributions of Contact Metric Manifolds

S. V. Galaev

Sergei V. Galaev, ORCID: 0000-0002-1129-7159, Saratov State University, 83, Astrakhanskaya str., Saratov, Russia, 410012, sgalaev@mail.ru

In the paper, the notion of an AP-manifold is introduced. Such a manifold is an almost contact metric manifold that is locally equivalent to the direct product of a contact metric manifold and an Hermitian manifold. A normal AP-manifold with a closed fundamental form is a quasi-Sasakian manifold. A quasi-Sasakian AP-manifold is called in the paper a special quasi-Sasakian manifold (SQS-manifold). A SQS-manifold is locally equivalent to the product of a Sasakian manifold and a Kählerian manifold. As a subsidiary result, a proposition is proved stating that a contact metric space with a zero curvature distribution is a K–contact metric space. The codistribution D^* of a contact metric structure $(M, \vec{\xi}, \eta, \varphi, g, D)$ is defined as the subbundle of the cotangent bundle T^*M, consisting of all 1-forms annihilating the structure vector $\vec{\xi}$. On the codistribution D^*, the extended almost contact metric structure $(D^*, \vec{u} = \partial_n, \mu = \eta \circ \pi_*, J, G, \tilde{D})$. is defined. Structural equations are introduced. These equations were used to prove the statement that the extended almost contact metric structure defines a structure of an AP-manifold if and only if the Schouten tensor of the contact metric manifold M is equal to zero. Finally we prove the theorem stating that the extended almost contact metric structure is a SQS-structure if and only if the initial manifold is a Sasakian manifold with a zero curvature distribution.

Key words: quasi-Sasakian manifold, interior connection, associated connection, Schouten curvature tensor, distribution of zero curvature.

References

1. Salimov A. A., Agca F. On para-Nordenian structures. *Ann. Polon. Math.*, 2010, vol. 99, no. 2, pp. 193–200. DOI: 10.4064/ap99-2-6.
2. Salimov A. A, Agca F. Some properties of Sasakian metrics in cotangent bundles. *Mediterr. J. Math.*, 2011, vol. 8, iss. 2, pp. 243–255. DOI: 10.1007/s00009-010-0080-x.
3. Yano K., Ishihara S. *Tangent and cotangent bundles*. New York, Marcel Dekker, 1973. 434 p.
4. Aso K. Notes on some properties of the sectional curvature of the tangent bundle. *Yokohama Math. J.*, 1981, vol. 5, pp. 1–5.
5. Gudmundsson S., Kappos E. On the geometry of the tangent bundles. *Expo. Math.*, 2002, vol. 20, iss. 1, pp. 1–41.
6. Kowalski O. Curvature of the induced Riemannian metric on the tangent bundle of Riemannian manifold. *J. Reine Angew. Math.*, 1971, vol. 250, pp. 124–129.
7. Musso E., Tricerri F. Riemannian metric on tangent bundles. *Ann. Math. Pura. Appl.*, 1988, vol. 150, iss. 1, pp. 1–19. DOI: 10.1007/BF01761461.
8. Salimov A. A. *Tensor operators and their applications*. New York, Nova Science Publ., 2013. 692 p.
9. Sasaki S. On the Differential geometry of tangent bundles of Riemannian manifols. *Tohoku Math. J.*, 1958, vol. 10, no. 3, pp. 338–358.
10. Bukusheva A. V., Galaev S. V. Almost contact metric structures defined by connection over distribution with admissible Finslerian metric. *Izv. Saratov Univ. (N. S.), Ser. Math. Mech. Inform.*, 2012, vol. 12, iss. 3, pp. 17–22 (in Russian).

11. Bukusheva A. V. Foliation on distribution with Finslerian metric. *Izv. Saratov Univ. (N. S.), Ser. Math. Mech. Inform.*, 2014, vol. 14, iss. 3, pp. 247—251 (in Russian).
12. Bukusheva A. V., Galaev S. V. Connections on distributions and geodesic sprays. *Russian Math.*, 2013, vol. 57, iss. 4, pp. 7–13. DOI: 10.3103/S1066369X13040026.
13. Galaev S. V. Geometric interpretation of the Wagner curvature tensor in the case of a manifold with contact metric structure. *Sib. Math. J.*, 2016, vol. 57, no. 3, pp. 498–504. DOI: 10.1134/S0037446616030101.
14. Galaev S. V. Admissible hypercomplex structures on distributions of Sasakian manifolds. *Izv. Saratov Univ. (N. S.), Ser. Math. Mech. Inform.*, 2016, vol. 16, iss. 3, pp. 263–272 (in Russian). DOI: 10.18500/1816-9791-2016-16-3-263-272.
15. Bukusheva A. V. The geometry of the contact metric spaces φ-connection. *Belgorod State University Scientific Bulletin. Mathematics & Physics*, 2015, no. 17 (214), iss. 40, pp. 20–24 (in Russian).
16. Galaev S. V. N-extended symplectic connections in almost contact metric spaces. *Russian Math.*, 2017, iss. 3, pp. 15–23.
17. Vagner V. V. The geometry of an $(n-1)$-dimensional nonholonomic manifold in an n-dimensional space. *Trudy Sem. Vektor. Tenzor. Analiza* [Proc. of the Seminar on Vector and Tensor Analysis]. Moscow, Moscow Univ. Press, 1941, iss. 5, pp. 173–255 (in Russian).
18. Vagner V. V. Geometric interpretation of the motion of nonholonomic dynamical systems. *Trudy Sem. Vektor. Tenzor. Analiza* [Proc. of the Seminar on Vector and Tensor Analysis]. Moscow, Moscow Univ. Press, 1941, iss. 5, pp. 301–327 (in Russian).

Cite this article as:

Galaev S. V. Extended Structures on Codistributions of Contact Metric Manifolds. *Izv. Saratov Univ. (N. S.), Ser. Math. Mech. Inform.*, 2017, vol. 17, iss. 2, pp. 138–147 (in Russian). DOI: 10.18500/1816-9791-2017-17-2-138-147.