УДК 501.1

РЕШЕНИЕ ОДНОРОДНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ РИМАНА С БЕСКОНЕЧНЫМ ИНДЕКСОМ ЛОГАРИФМИЧЕСКОГО ПОРЯДКА НА ЛУЧЕ НОВЫМ МЕТОДОМ

Р. Б. Салимов[1], **Э. Н. Хасанова**[2]

[1]Салимов Расих Бахтигареевич, доктор физико-математических наук, профессор кафедры высшей математики, Казанский государственный архитектурно-строительный университет, 420043, Россия, Казань, Зеленая, 1, salimov.rsb@gmail.com

[2]Хасанова Энже Назиповна, ассистент кафедры высшей математики, Казанский государственный архитектурно-строительный университет, 420043, Россия, Казань, Зеленая, 1, enkarabasheva@bk.ru

Рассматривается однородная краевая задача Римана с краевым условием на луче — положительной действительной оси с началом в точке с координатой, равной единице, для функции, аналитической в комплексной плоскости с разрезом по указанному лучу. В краевом условии значение искомой аналитической функции в любой точке левого (при движении в положительном направлении) берега разреза представляется как произведение значения заданной функции, называемой коэффициентом, и значения искомой функции в указанной точке правого берега разреза. Предполагая, что модуль коэффициента удовлетворяет условию Гельдера всюду на луче, включая бесконечно удаленную точку, а аргумент коэффициента удовлетворяет условию Гельдера на любой конечной части луча и неограниченно растет как степень логарифма координаты точки луча при неограниченном удалении этой точки от начала луча. Выводится формула, определяющая аналитическую в верхней полуплоскости функцию, мнимая часть которой при стремлении координаты точки луча к бесконечности является бесконечно большой того же порядка, что и аргумент коэффициента краевого условия. Далее строится соответствующая функция в нижней полуплоскости. Использование указанных двух функций позволяет устранить бесконечный разрыв аргумента коэффициента краевого условия аналогично тому, как это делается в случае конечных разрывов этого коэффициента. На основе приемов, применяемых Ф. Д. Гаховым, задача с условием на луче приводится к задаче с краевым условием на всей действительной оси, для точек которой, нележащих на указанном луче, коэффициент краевого условия равен единице. Для решения последней задачи используется метод Ф. Д. Гахова. Найденное решение зависит от произвольной целой функции нулевого порядка, модуль которой подчинен одному условию, в то время как в случае конечного индекса решение задачи зависит от произвольного многочлена степени не выше индекса задачи.

Ключевые слова: краевая задача Римана, аналитическая функция, бесконечный индекс, логарифмический порядок.

DOI: 10.18500/1816-9791-2017-17-2-160-171

1. ВВЕДЕНИЕ. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Пусть D — область в плоскости комплексного переменного $z = x + iy$, границей которой служит L^* — положительная действительная ось с началом в точке $x = 1$:

$1 \leqslant x < \infty$. Требуется определить функцию $\Phi(z)$, аналитическую и ограниченную в области D, если её граничные значения удовлетворяют условию

$$\Phi^+(t) = G(t)\Phi^-(t), \qquad t \in L^*, \tag{1}$$

где $\Phi^+(t)$, $\Phi^-(t)$ — предельные значения функции $\Phi(t)$ при $z \to t$ слева и справа, когда $\operatorname{Im} z > 0$ и $\operatorname{Im} z < 0$ соответственно, коэффициент $G(t)$ — заданная функция, удовлетворяющая условиям:

1) $\ln|G(t)|$ удовлетворяет условию Гельдера на L^* — условию $H_{L^*}(\ln|G(t)| \in H_{L^*})$;

2) для $\arg G(t)$ справедливо представление

$$\arg G(t) = \nu^-(\ln t)^\alpha + \nu(t), \qquad t \in L^*, \tag{2}$$

где ν^-, α — заданные числа, $\nu^- > 0$, $\alpha > 0$, $(\ln t)^\alpha > 0$, $\nu(t)$ — заданная функция, $\nu(t) \in H_{L^*}$.

Рассматриваемая задача является задачей с бесконечным индексом, так как $\arg\ G(t) \to +\infty$ при $t \to +\infty$.

Эта задача впервые была исследована П. Г. Юровым [1] путём построения канонической функции непосредственно из задачи (1), случай, когда условие (1) задано на всей действительной оси рассмотрен в работе П. Ю. Алекны [2] аналогичным способом.

Для решения поставленной задачи применяется основанный на построении вспомогательной аналитической функции, имеющей тот же разрыв, что и $i\arg G(t)$, метод, аналогичный использованному в работах [3,4], в последней из которых рассмотрена задача (1) с бесконечным индексом степенного порядка, в первой — эта задача в случае, когда краевое условие (1) выполняется на всей действительной оси при индексе того же порядка.

В статье [3] указаны основные этапы развития изучаемого научного направления. Ключевая роль в развитии теории краевых задач Римана для аналитических функций принадлежит Ф. Д. Гахову [5], Н. И. Мусхелишвили [6], а также Н. В. Говорову [7], рассмотревшему впервые случай бесконечного индекса.

2. ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ СООТНОШЕНИЯ

Пусть $\ln z = \ln|z| + i\arg z$, $0 \leqslant \arg z \leqslant \pi$, есть функция, непрерывная в полуплоскости $\operatorname{Im} z \geqslant 0$, кроме точек $z = 0$, $z = \infty$.

Взяв произвольное положительное число α, под $(\ln z - i\pi)^\alpha$ будем понимать непрерывную однозначную ветвь, аналитическую в полуплоскости $\operatorname{Im} z \geqslant 0$, кроме точек $z = 0$, $z = \infty$ и точки $z = e^{i\pi}$ в случае, когда число α отличается от натурального, считая, что указанная ветвь принимает положительное значение $(\ln|x|)^\alpha$ при $z = |x|e^{i\pi}$, $|x| > 1$ $(\arg(\ln|x|)^\alpha = 0)$ и $\arg(\ln z - i\pi)^\alpha \to 0$ при $z \to x \to +\infty$.

В дальнейшем нам понадобится представление функции $(\ln z - i\pi)^{\alpha+1}$ для больших положительных значений $z = x$.

При $z = x > e^\pi$ будем иметь

$$(\ln x - i\pi)^{\alpha+1} = (\ln x)^{\alpha+1}\left(1 - \frac{i\pi}{\ln x}\right)^{\alpha+1}, \tag{3}$$

считая, что $(\ln x)^{\alpha+1} > 0$, $\left(1 - \dfrac{i\pi}{\ln x}\right)^{\alpha+1} \to 1$ при $x \to +\infty$.

Пользуясь разложением [8, с. 302]

$$(1+z)^{\alpha_*} = \sum_{j_*=0}^{\infty} \binom{\alpha_*}{j_*} z^{j_*}, \qquad |z| < 1, \tag{4}$$

где α_* — произвольное комплексное число, $\dbinom{\alpha_*}{j_*} = \dfrac{\alpha_*(\alpha_* - 1)(\alpha_* - 2)\dots(\alpha_* - j_* + 1)}{j_*!}$ при $j_* > 0$, $\dbinom{\alpha_*}{j_*} = 1$ при $j_* = 0$, получим представление второго множителя правой части формулы (3) для $x > e^{\pi}$. Учитывая последнее, для мнимой части функции (3) при $x > e^{\pi}$ получим выражение

$$\mathrm{Im}\,(\ln x - i\pi)^{\alpha+1} = (\ln x)^{\alpha} \sum_{j=0}^{\infty} \binom{\alpha+1}{2j+1} \pi\,(-1)^{j+1} \left(\frac{\pi}{\ln x}\right)^{2j}. \tag{5}$$

Будем считать пока $\alpha > 1$. Выберем натуральное число k так, чтобы выполнялось соотношение

$$-3 < \alpha - 2k \leqslant -1 \tag{6}$$

(когда $k \geqslant 2$). В разложении (5) выделим первые k слагаемых и запишем его так

$$\mathrm{Im}\,(\ln x - i\pi)^{\alpha+1} = -\pi(\alpha+1)\,(\ln x)^{\alpha} +$$
$$+ \sum_{j=1}^{k-1} \binom{\alpha+1}{2j+1} \pi^{2j+1}\,(-1)^{j+1}\,(\ln x)^{\alpha-2j} + r_{\alpha-2k}(x,\alpha), \qquad x > e^{\pi}, \tag{7}$$

где

$$r_{\alpha-2k}(x,\alpha) = (\ln x)^{\alpha-2k}\,\pi^{2k+1} \sum_{j=k}^{\infty} \binom{\alpha+1}{2j+1} (-1)^{j+1} \left(\frac{\pi}{\ln x}\right)^{2j-2k}. \tag{8}$$

В формуле (7) число α заменим на $\alpha - 2m$, число k — на $k - m$, считая, что m принимает значения $1, 2, \dots, k-1$. Тогда сумме первых k слагаемых правой части формулы (7) будет соответствовать сумма $k - m$ слагаемых:

$$\sum_{j_1=0}^{k-m-1} \binom{\alpha - 2m + 1}{2j_1 + 1} \pi^{j_1+1} (-1)^{j_1+1}\,(\ln x)^{\alpha-2m-2j_1},$$

в которой будем считать, что $j_1 = j - m$, $j = \overline{m, k-1}$, поэтому формула (7) перейдет в следующую

$$\sum_{j=m}^{k-1} \binom{\alpha - 2m + 1}{2(j-m)+1} \pi^{2(j-m)+1} (-1)^{j-m+1} (\ln x)^{\alpha-2j} =$$
$$= \mathrm{Im}\,(\ln x - i\pi)^{\alpha-2m+1} - r_{\alpha-2k}(x, \alpha - 2m), \qquad m = \overline{1, k-1}, \qquad x > e^{\pi}, \tag{9}$$

где

$$r_{\alpha-2k}(x,\alpha-2m) = (\ln x)^{\alpha-2k}\,\pi^{2(k-m)+1}\sum_{j=k}^{\infty}\binom{\alpha-2m+1}{2(j-m)+1}(-1)^{j-m+1}\left(\frac{\pi}{\ln x}\right)^{2j-2k} \quad (10)$$

при $j = j_1 + m$.

Соотношения (9) будем рассматривать как систему $(k-1)$ уравнений с неизвестными $(\ln x)^{\alpha-2j}$, $j=\overline{1,k-1}$, с треугольной матрицей коэффициентов системы, элементы определителя Δ которой обозначим a_{mj}. Согласно (9) имеем, в частности, $a_{mj}=0$ при $j<m$, $a_{mm}=(\alpha-2m+1)(-\pi)$, $m=\overline{1,k-1}$. Поэтому

$$\Delta = (-\pi)^{k-1}\prod_{m=1}^{k-1}(\alpha-2m+1)\,,$$

причём $\Delta \neq 0$, так как согласно (6) имеем $-3<\alpha-2k$ и $0<\alpha-2(k-1)+1$ (при $k>1$).

Пусть A_{mj} — алгебраическое дополнение для элемента a_{mj} определителя Δ.

Обозначим Δ_j определитель, получаемый из Δ, заменой элементов j-го столбца на соответствующие свободные члены системы (9). Тогда по формулам Крамера выражаем

$$(\ln x)^{\alpha-2j} = \frac{\Delta_j}{\Delta}, \qquad j=\overline{1,k-1}, \qquad x>e^{\pi},$$

поэтому

$$(\ln x)^{\alpha-2j} = \frac{1}{\Delta}\sum_{m=1}^{k-1}A_{mj}\left[\,\mathrm{Im}\,(\ln x - i\pi)^{\alpha-2m+1} - r_{\alpha-2k}(x,\alpha-2m)\right], \\ j=\overline{1,k-1}, \qquad x>e^{\pi}.$$

Последнее выражение подставим в формулу (7), обозначая

$$B_m = \frac{1}{\Delta}\sum_{j=1}^{k-1}A_{mj}\binom{\alpha+1}{2j+1}\pi^{2j+1}(-1)^{j+1}\,,$$

получим

$$\mathrm{Im}\left[(\ln x - i\pi)^{\alpha+1} - \sum_{m=1}^{k-1}B_m(\ln x - i\pi)^{\alpha-2m+1}\right] = \\ = -\pi(\alpha+1)(\ln x)^{\alpha} + r_{\alpha-2k}(x,\alpha) - \sum_{m=1}^{k-1}B_m r_{\alpha-2k}(x,\alpha-2m), \qquad x>e^{\pi}. \quad (11)$$

Введем в рассмотрение функцию

$$T_0(z) = (\ln z - i\pi)^{\alpha+1} - \sum_{m=1}^{k-1}B_m(\ln z - i\pi)^{\alpha-2m+1}\,, \quad (12)$$

каждое слагаемое которой есть однозначная ветвь в полуплоскости $\operatorname{Im} z > 0$, определяемая как указано выше.

Мнимая часть этой функции при $z = |x|e^{i\pi}$, $|x| > 1$, обращается в нуль, а при $z = x$, $x > e^{\pi}$ имеет представление, определяемое формулой (11), в которой все слагаемые правой части, кроме первого, стремятся к нулю при $x \to +\infty$ в силу (6), (8), (10).

Функция (12) здесь играет вспомогательную роль, так как в точке $z = 0$ она имеет особенность. В дальнейшем нам понадобится функция с аналогичными свойствами для точек $z = x$ при достаточно больших значениях $|x|$, которая является аналитической в полуплоскости $\operatorname{Im} z > 0$ и непрерывной во всех конечных точках действительной оси. В качестве такой функции возьмём

$$T(z) = (\ln(z+i) - i\pi)^{\alpha+1} - \sum_{m=1}^{k-1} B_m \left(\ln(z+i) - i\pi\right)^{\alpha-2m+1}, \tag{13}$$

считая, что $T(z) = T_0(z+i)$, $\operatorname{Im} z > 0$.

Для $\operatorname{Im} T(x)$ при $x > e^{\pi}$ можно получить представление, аналогичное (11). Но проще воспользоваться представлением (11) и учесть, что $\operatorname{Im}\left(T(x) - T_0(x)\right) \to 0$ при $x \to +\infty$.

Чтобы установить последнее, заметим, что при любом числе $\alpha_1 > 0$ имеем

$$(\ln(x+i) - i\pi)^{\alpha_1} - (\ln x - i\pi)^{\alpha_1} = (\ln x - i\pi)^{\alpha_1}\left[\left(1 + \frac{\ln\left(1+\frac{i}{x}\right)}{\ln x - i\pi}\right)^{\alpha_1} - 1\right], \tag{14}$$

здесь в правой части первое слагаемое в квадратных скобках разложим по формуле (4), считая $x > e^{\pi}$, и придём к соотношению

$$\left[(\ln(x+i) - i\pi)^{\alpha_1} - (\ln x - i\pi)^{\alpha_1}\right] \sim \frac{i\alpha_1}{x}(\ln x)^{\alpha_1 - 1} \quad \text{при} \quad x \to +\infty. \tag{15}$$

Аналогично, дифференцируя равенство (14) и учитывая формулу (4), получим соотношение

$$\left[(\ln(x+i) - i\pi)^{\alpha_1} - (\ln x - i\pi)^{\alpha_1}\right]'_x \sim -\frac{i\alpha_1}{x^2}(\ln x)^{\alpha_1 - 1} \quad \text{при} \quad x \to +\infty. \tag{16}$$

Обозначим

$$V(z) = \operatorname{Im}\left(T(z) - T_0(z)\right). \tag{17}$$

Подставим сюда выражения (12), (13). При $z = x > e^{\pi}$ разности одинаковых степеней вида левой части формулы (15) заменим по последней формуле, полагая $\alpha_1 = \alpha - 2m + 1$, $m = \overline{0, k-1}$, и придем к соотношению

$$V(x) \sim \left(\frac{\alpha+1}{x}(\ln x)^{\alpha} - \sum_{m=1}^{k-1} \frac{\alpha - 2m + 1}{x}(\ln x)^{\alpha-2m}\right) \sim \frac{\alpha+1}{x}(\ln x)^{\alpha}, \quad x \to +\infty. \tag{18}$$

Используя (16), аналогично получим

$$V'(x) \sim -\frac{\alpha+1}{x^2}(\ln x)^{\alpha}, \qquad x \to +\infty.$$

Отсюда видно, что отношение $\frac{V'(x)}{\left[\frac{\alpha+1}{x^2}(\ln x)^\alpha\right]}$ при $x > e^\pi$ есть непрерывная функция, имеющая конечный предел при $x \to +\infty$. Используя последнее, заключаем [7, с. 127], что $V(x)$ — функция, удовлетворяющая условию Гёльдера в окрестности точки $x = +\infty$ (дифференцируемая в любой конечной точке $x > e^\pi$).

При $z = x = |x|e^{i\pi} < 0$, $|x| > e^\pi$ на основании соотношений, аналогичных (15), (16), получим

$$\begin{aligned} V(x) &\sim -\frac{\alpha+1}{|x|}(\ln|x|)^\alpha, \qquad x \to -\infty, \\ V'(x) &\sim -\frac{\alpha+1}{|x|^2}(\ln|x|)^\alpha, \qquad x \to -\infty, \end{aligned} \tag{19}$$

и убедимся в том, что функция $V(x)$ удовлетворяет условию Гельдера в окрестности точки $x = -\infty$ (и дифференцируема в любой конечной точке $x < -e^\pi$).

Сумму функций $r_{\alpha-2k}(x,\alpha)$ формулы (11) обозначим

$$R_{\alpha-2k}(x,\alpha) = r_{\alpha-2k}(x,\alpha) - \sum_{m=1}^{k-1} B_m r_{\alpha-2k}(x,\alpha-2m).$$

Эту формулу с учётом (8), (10) запишем так:

$$R_{\alpha-2k}(x,\alpha) = (\ln x)^{\alpha-2k} \sum_{j=k}^{\infty} N_j \left(\frac{\pi}{\ln x}\right)^{2j-2k}, \qquad x > e^\pi, \tag{20}$$

где

$$N_j = -(-1)^j \pi^{2k+1} \left[\binom{\alpha+1}{2j+1} - \sum_{m=1}^{k-1} B_m \binom{\alpha-2m+1}{2(j-m)+1} (-1)^m \pi^{-2m}\right].$$

При $0 < \alpha \leqslant 1$ мы должны взять $k = 1$, и в предыдущих формулах будут отсутствовать конечные суммы, в которых $m = \overline{1, k-1}$, при $\alpha = 1$ дополнительно будем иметь $r_{\alpha-2k}(x,\alpha) = 0$ и $R_{\alpha-2k}(x,\alpha) = 0$, причём последние два равенства выполняются и в случае $\alpha = 2k-1 > 1$. В дальнейшем будем считать, что $\alpha - 2k < -1$, при $\alpha = 2k-1$ надо положить $r_{\alpha-2k}(x,\alpha-2m) = 0$, $m = \overline{0, k-1}$.

В силу (20) получаем

$$R_{\alpha-2k}(x,\alpha) = \frac{1}{(\ln x)^{2k-\alpha}} M(x), \qquad x > e^\pi, \tag{21}$$

где $M(x)$ — сумма ряда правой части формулы (20),

$$M'(x) = -\frac{\pi}{x(\ln x)^2} \sum_{j=k+1}^{\infty} N_j (2j-2k) \left(\frac{\pi}{\ln x}\right)^{2j-2k-1}.$$

С учётом (12), (20) формулу (11) можно представить в виде

$$\operatorname{Im} T_0(x) = -\pi(\alpha+1)(\ln x)^\alpha + R_{\alpha-2k}(x,\alpha), \qquad x > e^\pi.$$

Поэтому, принимая во внимание (17), будем иметь

$$\operatorname{Im} T(x) = V(x) - \pi(\alpha+1)(\ln x)^\alpha + R_{\alpha-2k}(x,\alpha), \qquad x > e^\pi. \tag{22}$$

При $z = x = |x|e^{i\pi} < 0$, $|x| > e^{\pi}$ согласно (12) получаем $\operatorname{Im} T_0(x) = 0$ и с учётом (17) приходим к равенству

$$\operatorname{Im} T(x) = V(x), \qquad x < -e^{\pi}. \tag{23}$$

Таким образом, в случае $\alpha > 0$ приходим к следующей лемме.

Лемма 1. *Для значений мнимой части аналитической в полуплоскости* $\operatorname{Im} z > 0$ *функции* $T(z)$ *формулы* (13) *при* $z = x$, $|x| > e^{\pi}$ *справедливы представления* (22), (23), *в которых* $V(x)$ *— функция, удовлетворяющая условию Гельдера и обращающаяся в нуль на бесконечности,* $R_{\alpha-2k}$ *выражается формулой* (21) *и исчезает при натуральном числе* α.

Наряду с функцией $T(x)$ формулы (13) в дальнейшем нами будет использована аналитическая в полуплоскости $\operatorname{Im} z < 0$ функция, определяемая формулой [6, с. 140, 141]

$$\overline{T}(z) = \overline{T(\overline{z})}. \tag{24}$$

Для точек действительной оси $z = \overline{z} = x$ здесь имеем $\overline{T}(x) = \overline{T(x)}$, поэтому

$$\operatorname{Im} \overline{T}(x) = -\operatorname{Im} T(x). \tag{25}$$

Полуплоскости $\operatorname{Im} z > 0$, $\operatorname{Im} z < 0$ будем обозначать D^+, D^- соответственно.

3. ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Значения искомой функции $\Phi(z)$ будем обозначать $\Phi^+(z) = \Phi(z)$ при $\operatorname{Im} z > 0$, $\Phi^-(z) = \Phi(z)$ при $\operatorname{Im} z < 0$. Для предельных значений этих функций при $z \to t < 1$ будем иметь $\Phi^+(t) = \Phi^-(t)$, следовательно, как и в [5, с. 440], с учётом (1) приходим к заключению, что искомые функции $\Phi^+(z)$, $\Phi^-(z)$ удовлетворяют краевому условию. заданному на всей действительной оси L

$$\Phi^+(t) = G_0(t)\Phi^-(t), \qquad t \in L, \tag{26}$$

где

$$G_0(t) = G(t), \qquad t \in L^*,$$
$$G_0(t) = 1, \qquad t \in L' = L \setminus L^*.$$

Здесь будем считать, что

$$\arg G_0(t) = \arg G(t), \qquad t \in L^*, \tag{27}$$
$$\arg G_0(t) = 0, \qquad t \in L'. \tag{28}$$

Для простоты предположим, что слагаемое $\nu(t)$ формулы (2) удовлетворяет условиям

$$\nu(1) = \nu(1+0) = 0, \qquad \nu(+\infty) = 0, \tag{29}$$

кроме того,

$$|G(1)| = |G(1+0)| = 1, \qquad |G(+\infty)| = 1. \tag{30}$$

Используя функции $T(z)$, $\overline{T}(z)$, определяемые формулами (13), (24) соответственно, с учётом (25) краевое условие (26) представим следующим образом:

$$\Phi^+(t)e^{\beta T(t)} = G_1(t)\Phi^-(t)e^{\beta\overline{T}(t)}, \qquad t \in L, \tag{31}$$

где

$$G_1(t) = G_0(t)\frac{e^{\beta T(t)}}{e^{\beta\overline{T}(t)}} = |G_0(t)|e^{i(\arg G_0(t)+2\beta\operatorname{Im}T(t))},$$

β — действительная постоянная.

Принимая во внимание (2), (22), (27), выберем постоянную β так, чтобы

$$\nu^- - 2\beta(\alpha+1)\pi = 0,$$

тогда в силу вышеуказанных формул для $\arg G_1(t) = \arg G_0(t) + 2\beta\operatorname{Im}T(t)$, $t \in L$, получим выражение

$$\arg G_1(t) = \nu(t) + 2\beta V(t) + 2\beta R_{\alpha-2k}(t,\alpha), \qquad t > e^{\pi}, \tag{32}$$

и на основании (23), (28) будем иметь

$$\arg G_1(t) = 2\beta V(t), \qquad t < -e^{\pi}. \tag{33}$$

Далее по известным значениям $\arg G_1(t)$, как и в книге [5, с. 119], находим функцию

$$\Gamma(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_L \ln G_1(\tau)\frac{d\tau}{\tau - z}, \tag{34}$$

учитывая, что при $\operatorname{Im}z \neq 0$ несобственный интеграл правой части сходится, так как имеют место соотношения (21), (32), (33), (18), (19) и $\alpha - 2k < -1$.

Переходя в последней формуле к пределу при $z \to t \in L$, $t \neq \infty$, получим

$$\Gamma^{\pm}(t) = \pm\frac{1}{2}\ln G_1(t) + \frac{1}{2\pi i}\int\limits_L \ln G_1(\tau)\frac{d\tau}{\tau - t}. \tag{35}$$

Здесь верхние знаки относятся к случаю $\operatorname{Im}z > 0$, нижние – к случаю $\operatorname{Im}z < 0$, сингулярный интеграл последней формулы удовлетворяет условию Гельдера на любом конечном интервале действительной оси L, так как этим свойством обладает его плотность $\ln G_1(\tau)$ [6, с. 61]. Принимая во внимание формулы (32), (33) и представление (21), можно показать, что сингулярный интеграл формулы (35) есть функция непрерывная в окрестности точки $t = \infty$ и имеющая конечный предел при $t \to \infty$. (При $\alpha = 2k - 1 \geqslant 1$ сказанное является следствием того, что $\ln G_1(t) \in H_L$, так как $R_{\alpha-2k}(t,\alpha)$=0.) Поэтому функции $\Gamma^{\pm}(t)$ формулы (35) являются непрерывными, ограниченными на L функциями, а $\Gamma^+(z)$, $\Gamma^-(z)$, определяемые по формуле (34) соответственно при $\operatorname{Im}z > 0$, $\operatorname{Im}z < 0$, представляют собой аналитические функции, ограниченные в соответствующих полуплоскостях.

Согласно (35) имеем

$$\Gamma^+(t) - \Gamma^-(t) = \ln G_1(t), \qquad \frac{e^{\Gamma^+(t)}}{e^{\Gamma^-(t)}} = G_1(t).$$

Отсюда, обозначая $X(z) = e^{\Gamma(z)}$, $X^{\pm}(z) = e^{\Gamma^{\pm}(z)}$, получим $X^+(t) = G_1(t)X^-(t)$.

Учитывая последнее, краевое условие (31) запишем в виде

$$\frac{\Phi^+(t)e^{\beta T(t)}}{X^+(t)} = \frac{\Phi^-(t)e^{\beta \overline{T}(t)}}{X^-(t)}, \qquad t \in L.$$

Отсюда, обозначая

$$T_*(z) = \begin{cases} T(z), & \operatorname{Im} z \geqslant 0, \\ \overline{T}(z), & \operatorname{Im} z < 0, \end{cases}$$

приходим к заключению, что выражение

$$\frac{\Phi(z)e^{\beta T_*(z)}}{X(z)} = F(z) \tag{36}$$

является целой функцией, причём

$$F(t) = \frac{\Phi^+(t)e^{\beta T(t)}}{X^+(t)}, \qquad t \in L^*. \tag{37}$$

Если задача (1) имеет ограниченное решение $\Phi(z)$ в области D, то, замечая, что функции $\Gamma^+(z)$, $\Gamma^-(z)$ являются ограниченными в областях соответственно D^+, D^- функциями, заключаем, что функция $[X(z)]^{-1} = e^{-\Gamma(z)}$ будет ограниченной в области D, следовательно, существует постоянная $C > 0$, для которой справедливо неравенство

$$\left| \frac{\Phi(z)}{X(z)} \right| < C, \qquad z \in D.$$

При этом согласно (36) будем иметь

$$|F(z)| < Ce^{\beta \operatorname{Re} T_*(z)}, \qquad z \in D, \tag{38}$$

а из формулы (37) получим

$$|F(t)| < Ce^{\beta \operatorname{Re} T(t)}, \qquad t \in L^*. \tag{39}$$

На основании формулы (38) с учётом (13) приходим к выводу, что порядок целой функции $F(z)$ равен нулю [9, с. 245; 10, с. 11]. Эта функция удовлетворяет условию (39). В силу (36) решение рассматриваемой задачи выражается формулой

$$\Phi(z) = e^{-\beta T_*(z)}X(z)F(z). \tag{40}$$

Таким образом, мы приходим к следующей теореме.

Теорема 1. *Если краевая задача* (1) *имеет ограниченное решение, то оно представляется формулой* (40)*, в которой* $F(z)$ *есть произвольная целая функция нулевого порядка, удовлетворяющая условию* (39).

Справедливо и обратное утверждение.

Теорема 2. *Если $F(z)$ — любая целая функция нулевого порядка, удовлетворяющая условию* (39)*, то ограниченное решение краевой задачи* (1) *определяется формулой* (40).

Последняя теорема доказывается аналогично тому, как это сделано в работе [7, с. 121] и статье [3].

Полученные результаты остаются в силе и в случае, когда α — натуральное число, при этом в них произойдут очевидные изменения, о которых было сказано выше.

4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Таким образом, рассматриваемая задача (1) имеет решение, определяемое теоремой 2. Это решение содержит произвольную целую функцию нулевого порядка, удовлетворяющую единственному действительному условию (39).

Следовательно, задача имеет бесконечное множество различных решений.

Замечание. Условие (29), (30) не ограничивают общности решения задачи. При их невыполнении решение задачи (1) с помощью методов, аналогичных указанным в книге [5, с. 428–436], можно привести к рассмотренному в данной статье случаю с новой искомой функцией, для которой точка $z = 1$ может оказаться особой и в ней функция может обращаться в бесконечность степенного порядка при «неудачном» задании $\nu(t)$ в окрестности точки $t = 1$ [7, с. 114, условие $-1 < \varphi(t_0) \leqslant 0$].

В случае, когда для точки $t = 1$ условия (29), (30) не выполняются, решение (40) остаётся в силе, его поведение вблизи точки $z = 1$ легко установить непосредственно, учитывая, что функция $X(z) = e^{\Gamma(z)}$ выражается через интеграл типа Коши, плотность которого $\ln G_1(t)$ в точке $t = 1$ имеет разрыв первого рода и для указанного интеграла справедливо известное представление вблизи точки $z = 1$ [5, с. 68].

Библиографический список

1. *Юров П. Г.* Однородная краевая задача Римана с бесконечным индексом логарифмического типа // Изв. вузов. Матем. 1966. № 2. С. 158–163.
2. *Алекна П. Ю.* Об однородной краевой задаче Римана с бесконечным индексом логарифмического порядка для полуплоскости // Литовский матем. сб. 1973. Т. XIII, № 3. С. 5–13.
3. *Салимов Р. Б., Карабашева Э. Н.* Новый подход к решению краевой задачи Римана с бесконечным индексом // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2014. Т. 14, вып. 2. С. 155–165.
4. *Салимов Р. Б.* О новом подходе к решению краевой задачи Римана с условием на луче в случае бесконечного индекса // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2016. Т. 16, вып. 1. С. 29–33. DOI: 10.18500/1816-9791-2016-16-1-29-33.
5. *Гахов Ф. Д.* Краевые задачи. М. : Наука, 1977. 640 с.
6. *Мусхелишвили Н. И.* Сингулярные интегральные уравнения. М. : Наука, 1968. 511 с.
7. *Говоров Н. В.* Краевая задача Римана с бесконечным индексом. М. : Наука, 1986. 289 с.

8. *Маркушевич А. И.* Теория аналитических функций : в 2 т. М. : Наука, 1968. Т. 1. 486 с.
9. *Маркушевич А. И.* Теория аналитических функций : в 2 т. М. : Наука, 1968. Т. 2. 624 с.
10. *Левин Б. Я.* Распределение корней целых функций. М. : Гостехиздат, 1956. 632 с.

Образец для цитирования:

Салимов Р. Б., Хасанова Э. Н. Решение однородной краевой задачи Римана с бесконечным индексом логарифмического порядка на луче новым методом // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2017. Т. 17, вып. 2. С. 160–171. DOI: 10.18500/1816-9791-2017-17-2-160-171.

The Solution of the Homogeneous Boundary Value Problem of Riemann with Infinite Index of Logarithmic Order on the Beam by a New Method

R. B. Salimov[1], E. N. Khasanova[2]

[1]Rasih B. Salimov, ORCID: 0000-0002-4717-3676, Kazan State Architecture and Building University, 1, Zelenaya str., Kazan, Russia, 420043, salimov.rsb@gmail.com

[2]Enzhe N. Khasanova, ORCID: 0000-0002-0067-2224, Kazan State Architecture and Building University, 1, Zelenaya str., Kazan, Russia, 420043, enkarabasheva@bk.ru

In this paper we consider the homogeneous Riemann boundary value problem with infinite index of logarithmic order and boundary condition on the unlimited ray. This ray goes by the positive real axis and has a vertex at $(1, 0)$. We solve the problem for analytic function with the cut along the ray. The value of the function at any point of the left bank equals the product of the coefficient and the value of the function at the corresponding point of the right bank of the cut. Let the modulus of the coefficient meet the Holder condition at each point of the ray. Let the argument of the coefficient meet the Holder condition at each point of the finite part of the ray. Let the argument of the coefficient come arbitrarily close to infinity with the logarithmic order. We obtain the formula of analytic on the upper half-plane function. The imaginary component of this function is infinitely large when the point of the ray tends to infinity. The order of the imaginary component of this function at infinity is equal to the order of the coefficient. Then we obtain the formula of analytic on the lower half-plane function. These two functions permit us to eliminate the infinite discontinuity of the argument of the coefficient of the boundary condition exactly as in the case of finite discontinuities of coefficient. The problem with the condition on the ray is reduced to the problem with the boundary condition on the real axis. We solve the latter problem by the Gakhov method. The solution depends on an arbitrary entire function with zero order. The modulus of the solution meet one and only one condition.

Key words: Riemann boundary value problem, analytic function, infinite index of logarithmic order.

References

1. Yurov P. G. The homogeneous Riemann boundary value problem with an infinite index of logarithmic type. *Izv. Vyssh. Uchebn. Zaved. Mat.*, 1966, no. 2, pp. 158–163 (in Russian).
2. Alekna P. Ju. The homogeneous Riemann boundary value problem with infinite index of logarithmic order for the half-plane. *Litovsk. Mat. Sb.*, 1973, vol. 13, no. 3, pp. 5–13 (in Russian).

3. Salimov R. B., Karabasheva E. N. The new approach to solving the Riemann boundary value problem with infinite index. *Izv. Saratov Univ. (N.S.), Ser. Math. Mech. Inform.*, 2014, vol. 14, iss. 2, pp. 155–165 (in Russian).
4. Salimov R. B. About new approach to solution of Riemann's boundary value problem with condition on the half-line in case of infinite index. *Izv. Saratov Univ. (N.S.), Ser. Math. Mech. Inform.*, 2016, vol. 16, iss. 1, pp. 29–33 (in Russian). DOI: 10.18500/1816-9791-2016-16-1-29-33.
5. Gakhov F. D. *Boundary value problems*. Moscow, Nauka, 1977. 640 p. (in Russian).
6. Muskhelishvili N. I. *Singulyarnye integral'nye uravneniya* [Singular integral equations]. Moscow, Nauka, 1968. 511 p. (in Russian).
7. Govorov N. V. *Riemann's boundary problem with infinite index*. Moscow, Nauka, 1986. 289 p. (in Russian).
8. Markushevich A. I. *The theory of analytic functions* : in 2 vol. Moscow, Nauka, 1968, vol. 1. 486 p. (in Russian).
9. Markushevich A. I. *The theory of analytic functions* : in 2 vol. Moscow, Nauka, 1968, vol. 2. 624 p. (in Russian).
10. Levin B. Ya. *Distribution of zeros of entire functions*. Moscow, Gostechizdat, 1956. 632 p. (in Russian).

Cite this article as:

Salimov R. B., Khasanova E. N. The Solution of the Homogeneous Boundary Value Problem of Riemann with Infinite Index of Logarithmic Order on the Beam by a New Method. *Izv. Saratov Univ. (N. S.), Ser. Math. Mech. Inform.*, 2017, vol. 17, iss. 2, pp. 160–171 (in Russian). DOI: 10.18500/1816-9791-2017-17-2-160-171.