УДК 517.9

ГАРМОНИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ ПЕРИОДИЧЕСКИХ НА БЕСКОНЕЧНОСТИ ФУНКЦИЙ В ПРОСТРАНСТВАХ СТЕПАНОВА

И. И. Струкова

Струкова Ирина Игоревна, кандидат физико-математических наук, Воронежский государственный университет, 394036, Россия, Воронеж, Университетская пл., 1, irina.k.post@yandex.ru

В статье рассматриваются пространства Степанова функций, определенных на $\mathbb{R}$ со значениями в комплексном банаховом пространстве. Вводятся понятия медленно меняющихся и периодических на бесконечности функций из пространства Степанова. Основные результаты статьи связаны с гармоническим анализом периодических на бесконечности функций из пространства Степанова. Вводится понятие обобщенного ряда Фурье, коэффициенты которого являются медленно меняющимися на бесконечности функциями (не обязательно постоянными). Получен ряд аналогов классических результатов о суммируемости ряда Фурье методом Чезаро (теоремы 2 и 3). Результаты статьи получены с использованием теории изометрических представлений.

Ключевые слова: банахово пространство, $L^1(\mathbb{R})$-модуль, пространство Степанова, медленно меняющаяся на бесконечности функция, периодическая на бесконечности функция, ряд Фурье.

DOI: 10.18500/1816-9791-2017-17-2-172-182

1. ОСНОВНЫЕ ПРОСТРАНСТВА

Пусть X — комплексное банахово пространство, $\operatorname{End} X$ — банахова алгебра линейных ограниченных операторов (эндоморфизмов), действующих в X. Символом $L^1_{loc}(\mathbb{R}, X)$ обозначим пространство локально суммируемых (измеримых по Бохнеру) на $\mathbb{R}$ функций со значениями в банаховом пространстве X. Через $L^p(\mathbb{R}, X)$, $p \in [1, \infty]$, обозначим банахово пространство функций $x \in L^1_{loc}(\mathbb{R}, X)$, для которых конечна величина (принимаемая за норму в соответствующем пространстве)

$$\|x\|_p = \left(\int_{\mathbb{R}} \|x(t)\|_X^p dt \right)^{1/p}, \quad p \in [1, \infty), \qquad \|x\|_\infty = \operatorname{vrai}\sup_{t \in \mathbb{R}} \|x(t)\|_X, \quad p = \infty.$$

Если $X = \mathbb{C}$, то символ X в обозначениях этих пространств будет опускаться.

Через $S^p(\mathbb{R}, X)$, где $p \in [1, \infty)$, будет обозначаться пространство Степанова [1], состоящее из функций $x \in L^1_{loc}(\mathbb{R}, X)$, для которых конечна величина

$$\|x\|_{S^p} = \sup_{s \in \mathbb{R}} \left(\int_0^1 \|x(s+t)\|_X^p dt \right)^{1/p}, \qquad p \in [1, \infty).$$

Пространства Степанова играют важную роль при изучении дифференциальных уравнений в банаховом пространстве [2, 3].

Также рассматриваются подпространства $C_b(\mathbb{R}, X)$ и $C_{b,u}(\mathbb{R}, X)$ пространства $L^\infty(\mathbb{R}, X)$ соответственно непрерывных ограниченных и равномерно непрерывных ограниченных на $\mathbb{R}$ функций с нормой $\|x\|_\infty = \sup\limits_{t\in\mathbb{R}} \|x(t)\|_X$.

В $S^p(\mathbb{R}, X)$ определена и ограничена группа $S(t)$, $t \in \mathbb{R}$, операторов сдвигов функций

$$(S(t)x)(s) = x(s+t), \qquad s,t \in \mathbb{R}, \qquad x \in S^p(\mathbb{R}, X).$$

Для любых функций $f \in L^1(\mathbb{R})$, $x \in S^p(\mathbb{R}, X)$ их свертка

$$(f * x)(t) = \int\limits_{\mathbb{R}} f(\tau)x(t-\tau)d\tau = \int\limits_{\mathbb{R}} f(\tau)(S(-\tau)x)(t)d\tau, \qquad t \in \mathbb{R}, \tag{1}$$

принадлежит $S^p(\mathbb{R}, X)$. Через $S^p_c(\mathbb{R}, X)$ обозначим замкнутое подпространство из $S^p(\mathbb{R}, X)$ вида $\{x \in S^p(\mathbb{R}, X)$: функция $t \mapsto S(t)x : \mathbb{R} \to S^p(\mathbb{R}, X)$ непрерывна$\}$. Через $S^p_0(\mathbb{R}, X)$ обозначим наименьшее замкнутое подпространство из $S^p(\mathbb{R}, X)$, содержащее все функции φx, $x \in S^p(\mathbb{R}, X)$, $\varphi \in C_b(\mathbb{R}, X)$, $\operatorname{supp}\varphi$ — компакт.

Если $X = \mathbb{C}$, то вместо $S^p(\mathbb{R}, X)$ будем писать просто $S^p(\mathbb{R})$.

2. О ГАРМОНИЧЕСКОМ АНАЛИЗЕ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ВЕКТОРОВ

Пусть $\mathscr{X}$ — комплексное банахово пространство и $\operatorname{End}\mathscr{X}$ — банахова алгебра линейных ограниченных операторов, действующих в $\mathscr{X}$. Будем считать, что $\mathscr{X}$ является невырожденным банаховым $L^1(\mathbb{R})$-модулем [4, 5], структура которого ассоциирована с некоторым ограниченным изометрическим представлением $T : \mathbb{R} \to \operatorname{End}\mathscr{X}$. Это означает, что выполняются два свойства следующего предположения:

Предположение 1. *Для банахова $L^1(\mathbb{R})$-модуля $\mathscr{X}$ выполняются следующие условия:*

1) *из равенства $fx = 0$, справедливого для любой функции $f \in L^1(\mathbb{R})$, следует, что вектор $x \in \mathscr{X}$ — нулевой (свойство невырожденности банахова модуля $\mathscr{X}$);*
2) *для всех $f \in L^1(\mathbb{R})$, $x \in \mathscr{X}$, $t \in \mathbb{R}$, имеют место равенства (свойство ассоциированности модульной структуры на $\mathscr{X}$ с представлением $T : \mathbb{R} \to \operatorname{End}\mathscr{X}$):*
$$T(t)(fx) = (T(t)f)x = f(T(t)x).$$

Далее символом $T(f) \in \operatorname{End}\mathscr{X}$ обозначается оператор свертки $T(f)x = fx$ вектора $x \in \mathscr{X}$ с функцией $f \in L^1(\mathbb{R})$. Если $T : \mathbb{R} \to \operatorname{End}\mathscr{X}$ — сильно непрерывное ограниченное представление, то формула

$$T(f)x = fx = \int\limits_{\mathbb{R}} f(t)T(-t)x dt, \qquad f \in L^1(\mathbb{R}), \qquad x \in \mathscr{X}, \tag{2}$$

определяет на $\mathscr{X}$ структуру банахова $L^1(\mathbb{R})$-модуля, удовлетворяющего условиям предположения 2, причем эта модульная структура ассоциирована с представлением T [6].

Замечание 1. С каждым невырожденным банаховым $L^1(\mathbb{R})$-модулем $\mathscr{X}$ ассоциировано единственное представление $T : \mathbb{R} \to \operatorname{End} \mathscr{X}$ [2, 4, 6–9]. Чтобы это подчеркнуть, иногда используется обозначение $(\mathscr{X}, T)$.

Определение 1. Вектор из банахова $L^1(\mathbb{R})$-модуля $\mathscr{X}$ назовем T-*непрерывным*, если функция $\varphi_x : \mathbb{R} \to \mathscr{X}$, $\varphi_x(t) = T(t)x$, $t \in \mathbb{R}$, непрерывна в нуле (и, значит, непрерывна на $\mathbb{R}$).

Совокупность всех T-непрерывных векторов из банахова $L^1(\mathbb{R})$-модуля $\mathscr{X}$ обозначим через $\mathscr{X}_c$. Непосредственно из последнего определения следует, что $\mathscr{X}_c$ — замкнутый подмодуль из $\mathscr{X}$, причем представление T на нем сильно непрерывно.

Пространства $S^p(\mathbb{R}, X)$ являются банаховыми $L^1(\mathbb{R})$-модулями с модульной структурой, определяемой равенствами (1), и эта структура ассоциирована с представлением (группой сдвигов функций) $S : \mathbb{R} \to \operatorname{End} S^p(\mathbb{R}, X)$. Далее через $\widehat{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ обозначается преобразование Фурье

$$\widehat{f}(\lambda) = \int\limits_{\mathbb{R}} f(t) e^{-i\lambda t} dt, \ \lambda \in \mathbb{R}, \tag{3}$$

функции $f \in L^1(\mathbb{R})$.

Определение 2. Пусть $\omega > 0$. Вектор $x_0 \in \mathscr{X}$ назовем ω-*периодическим* (относительно представления T), если $T(\omega)x_0 = x_0$.

Множество ω-периодических векторов обозначим через $\mathscr{X}_\omega = \mathscr{X}_\omega(T)$. Оно образует замкнутое подпространство в $\mathscr{X}$, инвариантное относительно операторов $T(t)$, $t \in \mathbb{R}$.

Из равенств $T(t+\omega)x - T(t)x = T(t)(T(\omega)x - x) = 0$, $t \in \mathbb{R}$, для любого $x \in \mathscr{X}_\omega$ следует, что функция $\varphi_x : \mathbb{R} \to \mathscr{X}$, $\varphi_x(t) = T(t)x$, является непрерывной периодической функцией. Рассмотрим ее ряд Фурье $\varphi_x(t) \sim \sum\limits_{n \in \mathbb{Z}} x_n e^{i \frac{2\pi n}{\omega} t}$, где $x_n = \frac{1}{\omega} \int\limits_0^\omega T(\tau) x e^{-i \frac{2\pi n}{\omega} \tau} d\tau$, $n \in \mathbb{Z}$.

Определение 3. Ряд

$$x \sim \sum_{n \in \mathbb{Z}} x_n \tag{4}$$

назовем *рядом Фурье вектора* $x \in \mathscr{X}_\omega$, а векторы x_n, $n \in \mathbb{Z}$, — *коэффициентами Фурье вектора* x.

Лемма 1. *Для любой функции* $f \in L^1(\mathbb{R})$ *и* $x \in \mathscr{X}_\omega$ *вектор* $fx \in \mathscr{X}_\omega$ *и имеет ряд Фурье вида* $fx \sim \sum\limits_{k=-\infty}^{\infty} \widehat{f}\left(\frac{2\pi k}{\omega}\right) x_k$.

Доказательство. Непосредственно из формулы (2) следует, что $fx \in \mathscr{X}_\omega$. Далее вектор fx обозначим через y. Для коэффициентов Фурье периодического вектора y

справедлива формула $y_k = \frac{1}{\omega}\int\limits_0^\omega T(\tau)(fx)e^{-i\frac{2\pi k}{\omega}\tau}d\tau$. Используя формулы (2) и (3) и меняя порядок интегрирования, получаем следующую цепочку равенств:

$$y_k = \frac{1}{\omega}\int\limits_0^\omega T(\tau)\left(\int\limits_{\mathbb{R}} f(s)T(-s)xds\right)e^{-i\frac{2\pi k}{\omega}\tau}d\tau =$$

$$= \frac{1}{\omega}\int\limits_0^\omega \left(\int\limits_{\mathbb{R}} f(s)T(\tau-s)xds\right)e^{-i\frac{2\pi k}{\omega}\tau}d\tau = \int\limits_{\mathbb{R}} f(s)\left(\frac{1}{\omega}\int\limits_0^\omega T(\tau-s)xe^{-i\frac{2\pi k}{\omega}\tau}d\tau\right)ds =$$

$$= \int\limits_{\mathbb{R}} f(s)\left(\frac{-e^{i\frac{2\pi k}{\omega}s}}{\omega}\int\limits_0^\omega T(t)xe^{-i\frac{2\pi k}{\omega}t}dt\right)ds = \int\limits_{\mathbb{R}} f(s)x_ke^{-i\frac{2\pi k}{\omega}s}ds = \widehat{f}\left(\frac{2\pi k}{\omega}\right)x_k.$$

□

Отметим работы [8, 9], в которых многие классические результаты теории рядов Фурье для периодических функций обобщались на векторы из банаховых пространств, в которых действует однопараметрическая группа операторов. Подпространство $\mathscr{X}_\omega$ периодических векторов и следующая лемма фактически рассматривались в [10, теорема 16.7.2]. Из указанных источников следует

Лемма 2. *Пусть $x \in \mathscr{X}_\omega$. Тогда операторы*

$$P_nx = \frac{1}{\omega}\int\limits_0^\omega T(\tau)xe^{-i\frac{2\pi n}{\omega}\tau}d\tau,\ n \in \mathbb{Z},$$

являются проекторами, $x_n = P_nx$, $n \in \mathbb{Z}$, — коэффициенты Фурье вектора x, $T(t)P_n = e^{i\frac{2\pi n}{\omega}t}P_n$, $t \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{Z}$, и $\|P_n\| = 1$, если $P_n \neq 0$.

Лемма 3. *Для любого $x \in \mathscr{X}_\omega$ справедливо соотношение*

$$\lim_{n\to\infty}\|x_n\| = 0,$$

где x_n, $n \in \mathbb{Z}$, — коэффициенты Фурье вектора x.

Доказательство. Возьмем произвольный вектор x из области определения $D(A)$ генератора A («infinitesimal generator» в [11]) полугруппы операторов T. Справедлива следующая оценка:

$$\|x_n\| = \|\frac{1}{\omega}\int\limits_0^\omega T(\tau)xe^{-i\frac{2\pi n}{\omega}\tau}d\tau\| = \|\frac{1}{\omega}\int\limits_0^\omega T(\tau)Ax\frac{1}{-i\frac{2\pi n}{\omega}}e^{-i\frac{2\pi n}{\omega}\tau}d\tau\| \leqslant \frac{\|Ax\|}{|n|},\quad n \in \mathbb{Z}\backslash\{0\},$$

т. е. $\lim\limits_{n\to\infty}\|x_n\| = 0$. Поскольку $D(A)$ плотно в $\mathscr{X}_\omega$, то свойство $\lim\limits_{n\to\infty}\|x_n\| = 0$ верно для любого $x \in \mathscr{X}_\omega$. □

Определение 4. Функция $\omega(\cdot, x) : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$, $\omega(\delta, x) = \sup_{|t|\leqslant\delta}\|T(t)x - x\|$, называется *модулем непрерывности* вектора x.

Теорема 1. *Для любого $x \in \mathscr{X}_\omega$ с рядом Фурье вида* (4) *справедливо равенство*

$$\lim_{n\to\infty} \|x - \sum_{k=-n}^{n} \left(1 - \frac{|k|}{n+1}\right) x_k\| = 0.$$

Доказательство. Возьмем произвольный периодический вектор $x \in \mathscr{X}_\omega$. Рассмотрим функции $f_n \in L^1(\mathbb{R})$ следующего вида:

$$f_n(t) = \frac{\omega \sin^2 \frac{(n+1)\pi t}{\omega}}{4\pi^4 t^2 (n+1)}, \qquad t \in \mathbb{R}, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Отметим, что преобразование Фурье данных функций имеет вид

$$\widehat{f_n}(\lambda) = \begin{cases} 1 - \frac{\omega|\lambda|}{2\pi(n+1)}, & |\lambda| \leqslant \frac{2\pi(n+1)}{\omega}, \\ \quad 0, & |\lambda| > \frac{2\pi(n+1)}{\omega}, \quad \lambda \in \mathbb{R}, \quad n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Тогда

$$\widehat{f_n}\left(\frac{2\pi k}{\omega}\right) = \begin{cases} 1 - \frac{|k|}{n+1}, & |k| \leqslant n+1, \\ \quad 0, & |k| > n+1, \quad k \in \mathbb{Z}, \quad n \in \mathbb{N}, \end{cases}$$

и из леммы 1 следует, что свертка функции f_n с вектором x определяется равенством

$$f_n x = \sum_{k=-n}^{n} \left(1 - \frac{|k|}{n+1}\right) x_k, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Тогда имеет место оценка

$$\left\| x - \sum_{k=-n}^{n} \left(1 - \frac{|k|}{n+1}\right) x_k \right\| = \|x - f_n x\| = \left\| \int_{\mathbb{R}} f_n(\tau) x \, d\tau - \int_{\mathbb{R}} f_n(\tau) T(-\tau) x \, d\tau \right\| =$$

$$= \left\| \int_{\mathbb{R}} f_n(\tau) \left(x - T(-\tau)x\right) d\tau \right\| \leqslant \left\| \int_{-\delta_n}^{\delta_n} f_n(\tau) \omega(\delta_n, x) d\tau \| + 2\|x\| \| \int_{\mathbb{R}\setminus(-\delta_n,\delta_n)} f_n(\tau) d\tau \right\| \leqslant$$

$$\leqslant \omega(\delta_n, x) \int_{-\delta_n}^{\delta_n} f_n(\tau) d\tau + 2\|x\| \int_{\mathbb{R}\setminus(-\delta_n,\delta_n)} f_n(\tau)\, d\tau \leqslant$$

$$\leqslant \omega(\delta_n, x) \int_{-\infty}^{\infty} f_n(\tau)\, d\tau + \frac{\omega\|x\|}{2\pi^4(n+1)} \int_{\mathbb{R}\setminus(-\delta_n,\delta_n)} \frac{\sin^2 \frac{(n+1)\pi\tau}{\omega}}{\tau^2} d\tau \leqslant$$

$$\leqslant \omega(\delta_n, x) + \frac{\omega\|x\|}{\pi^4(n+1)} \int_{\delta_n}^{\infty} \frac{d\tau}{\tau^2} \leqslant \omega(\delta_n, x) + \frac{\omega\|x\|}{\pi^4(n+1)\delta_n} \to 0, \quad n \to \infty,$$

для любой последовательности $\{\delta_n\}_{n=0}^{\infty}$, удовлетворяющей условиям $\lim\limits_{n\to\infty} \delta_n = 0$ и $\lim\limits_{n\to\infty} (n+1)\delta_n = \infty$. □

3. МЕДЛЕННО МЕНЯЮЩИЕСЯ И ПЕРИОДИЧЕСКИЕ НА БЕСКОНЕЧНОСТИ ФУНКЦИИ ИЗ ПРОСТРАНСТВ СТЕПАНОВА

Определение 5. Функция $x \in S_c^p(\mathbb{R}, X)$ называется *медленно меняющейся на бесконечности,* если $(S(t)x - x) \in S_0^p(\mathbb{R}, X)$ для любого $t \in \mathbb{R}$.

Например, медленно меняющейся на бесконечности является функция $x \in \in S_c^p(\mathbb{R}, X)$ вида $x(t) = c + x_0(t)$, $t \in \mathbb{R}$, где c — вектор из банахова пространства X и x_0 — любая функция из $S_0^p(\mathbb{R}, X)$. В теории дифференциальных уравнений [12, п. 3.6.3] использовалось эквивалентное (если рассматривать функции из $C_{b,u}(\mathbb{R}, X)$) определение, при этом функции назывались *стационарными на бесконечности.* Медленно меняющиеся функции находят свое применение в теории тригонометрических рядов [13], в теории вероятности [14], а также в теории целых функций [15].

Определение 6. Функция $x \in S_c^p(\mathbb{R}, X)$ называется *периодической на бесконечности периода $\omega > 0$ (ω-периодической на бесконечности)*, если $(S(\omega)x - x) \in \in S_0^p(\mathbb{R}, X)$ или, что эквивалентно, $\lim\limits_{|t|\to\infty} \|x(t + \omega) - x(t)\|_X = 0$.

Таким образом, каждая ω-периодическая на бесконечности функция x является решением разностного уравнения вида $x(t+\omega)-x(t) = y(t)$, $t \in \mathbb{R}$, где $y \in S_0^p(\mathbb{R}, X)$, а каждая медленно меняющаяся на бесконечности функция является периодической на бесконечности любого периода. В [16,17] получены аналоги теоремы Винера об абсолютно сходящихся рядах Фурье для непрерывных периодических на бесконечности функций с абсолютно сходящимися рядами Фурье и с рядами Фурье, суммируемыми с весом. В работах [18,19] изучаются вопросы гармонического анализа непрерывных периодических на бесконечности функций нескольких переменных. В [20] описан спектр алгебры непрерывных периодических на бесконечности функций, определенных на полуоси.

Множества медленно меняющихся и периодических на бесконечности функций из $S_c^p(\mathbb{R}, X)$ обозначим через $S_{sl,\infty}^p = S_{sl,\infty}^p(\mathbb{R}, X)$ и $S_{\omega,\infty}^p = S_{\omega,\infty}^p(\mathbb{R}, X)$ соответственно. Отметим,что они оба образуют линейные замкнутые подпространства банахова пространства $S_c^p(\mathbb{R}, X)$. Таким образом, имеют место включения $S_{sl,\infty}^p(\mathbb{R}, X) \subset \subset S_{\omega,\infty}^p(\mathbb{R}, X) \subset S_c^p(\mathbb{R}, X)$, при этом все указанные пространства инвариантны относительно операторов $S(t)$, $t \in \mathbb{R}$. Символом $S_\omega^p(\mathbb{R}, X)$ обозначим подпространство банахова пространства $S_c^p(\mathbb{R}, X)$, состоящее из ω-периодических функций, т. е. функций $x \in S_c^p(\mathbb{R}, X)$, для которых выполнено условие $S(\omega)x = x$. Примерами периодических на бесконечности функций из $S_c^p(\mathbb{R}, X)$ являются:

1) предельно периодические функции, т. е. функции $x : \mathbb{R} \to X$, представимые в виде $x = y + y_0$, где $y \in S_\omega^p(\mathbb{R}, X)$, $y_0 \in S_0^p(\mathbb{R}, X)$;

2) функция $\overline{x} \in S_c^p(\mathbb{R}, X)$ такая, что она совпадает с $x \in S_\omega^p(\mathbb{R}, X)$ на $\mathbb{R}_+$ и $\lim\limits_{t\to-\infty} \|\overline{x}(t)\|_X = 0$;

3) любая функция из $S_{sl,\infty}^p(\mathbb{R}, X)$;

4) любая функция $x \in S_c^p(\mathbb{R}, X)$, представимая в виде $x = \sum\limits_{k=-n}^{n} x_k(t)e^{i\frac{2\pi k}{\omega}t}$, $t \in \mathbb{R}$,

$n \in \mathbb{N}$, где $x_k \in S^p_{sl,\infty}(\mathbb{R}, X)$, $k \in \mathbb{Z}$. Далее введем определение рядов Фурье функций из $S^p_{\omega,\infty}(\mathbb{R}, X)$.

Определение 7. *Каноническим рядом Фурье функции* $x \in S^p_{\omega,\infty}(\mathbb{R}, X)$ будем называть ряд вида

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} x_n(t)e^{i\frac{2\pi n}{\omega}t}, \ t \in \mathbb{R},$$

где функции $x_n : \mathbb{R} \to X$, $n \in \mathbb{Z}$, определяются формулами

$$x_n(t) = \frac{1}{\omega}\int\limits_0^\omega x(t+\tau)e^{-i\frac{2\pi n}{\omega}(t+\tau)}d\tau, \ t \in \mathbb{R}, \ n \in \mathbb{Z}, \tag{5}$$

и называются *каноническими коэффициентами Фурье функции* x.

Ясно, что если $x \in C_\omega(\mathbb{R}, X)$, то $x_k(t) \equiv x_k = \frac{1}{\omega}\int\limits_0^\omega x(\tau)e^{-i\frac{2\pi k}{\omega}\tau}d\tau$, $t \in \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{Z}$, — обычные коэффициенты Фурье непрерывной периодической функции x.

Определение 8. *Обобщенным рядом Фурье функции* $x \in S^p_{\omega,\infty}(\mathbb{R}, X)$ называется любой ряд вида

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} y_n(t)e^{i\frac{2\pi n}{\omega}t}, \qquad t \in \mathbb{R}, \tag{6}$$

где y_n, $n \in \mathbb{Z}$, — такие функции из $S^p(\mathbb{R}, X)$, для которых $y_n - x_n \in S^p_0(\mathbb{R}, X)$, $n \in \mathbb{Z}$, а функции x_n, $n \in \mathbb{Z}$, определяются формулой (5).

Лемма 4. *Канонические коэффициенты Фурье* x_n, $n \in \mathbb{Z}$ (*определенные формулой* (5)) *являются медленно меняющимися на бесконечности функциями из* $S^p_c(\mathbb{R}, X)$, *т. е.* $x_n \in S^p_{sl,\infty}(\mathbb{R}, X)$, $n \in \mathbb{Z}$.

Утверждение леммы следует из равенств

$$x_n(t+\omega) - x_n(t) = \frac{1}{\omega}\int\limits_0^\omega (S(\omega)x - x)(t+\tau)e^{-i\frac{2\pi n}{\omega}(t+\tau)}\,d\tau, \qquad t \in \mathbb{R}, \qquad n \in \mathbb{Z}.$$

Непосредственно из определения 8 и леммы 4 следует, что коэффициенты любого обобщенного ряда Фурье обладают свойством: $y_n \in S^p_{sl,\infty}(\mathbb{R}, X)$, $n \in \mathbb{Z}$. Введем в рассмотрение функции e_k, $k \in \mathbb{Z}$, вида $e_k(t) = e^{i\frac{2\pi k}{\omega}t}$, $t \in \mathbb{R}$. Основными результатами данной статьи являются следующие две теоремы:

Теорема 2. *Для любой функции* $x \in S^p_{\omega,\infty}(\mathbb{R}, X)$ *существует последовательность функций* (x^0_n) *из* $S^p_0(\mathbb{R}, X)$ *такая, что*

$$\lim_{n\to\infty} \|x - \sum_{k=-n}^{n}\left(1 - \frac{|k|}{n+1}\right)x_k e_k + x^0_n\|_{S^p} = 0,$$

где x_k, $k \in \mathbb{Z}$, *— канонические коэффициенты Фурье функции* x.

Теорема 3. *Для любой функции $x \in S^p_{\omega,\infty}(\mathbb{R}, X)$ и для любого $\varepsilon > 0$ существует последовательность функций (x^0_n) из $S^p_0(\mathbb{R}, X)$ и последовательность функций (y_n) из $S^p_{sl,\infty}(\mathbb{R}, X)$ такие, что*

$$\lim_{n\to\infty} \|x - \sum_{k=-n}^{n} \left(1 - \frac{|k|}{n+1}\right) y_k e_k + x^0_n\|_{S^p} = 0.$$

При этом каждая из функций y_k ($k \in \mathbb{Z}$) эквивалентна функции x_k, определяемой формулой (5)*, и допускает продолжение на всю комплексную плоскость до целой функции экспоненциального типа не выше ε.*

Определение 9. Будем говорить, что обобщенный ряд Фурье (6) периодической на бесконечности функции $x \in S^p_{\omega,\infty}(\mathbb{R}, X)$ *сходится* к x *относительно подпространства* $S^p_0(\mathbb{R}, X)$, если существует последовательность функций (x^0_n) из $S^p_0(\mathbb{R}, X)$ такая, что $\lim\limits_{n\to\infty} \left\| x - \sum\limits_{k=-n}^{n} y_k e_k + x^0_n \right\|_{S^p} = 0$.

Важно отметить, что данное определение корректно, т. е. сходимость не зависит от выбора обобщенного ряда Фурье функции x. Это объясняется тем, что $y_n - x_n \in S^p_0(\mathbb{R}, X)$, где x_n, $n \in \mathbb{Z}$, — канонические коэффициенты Фурье функции x, определяемые по формуле (5).

4. ДОКАЗАТЕЛЬСТВА ОСНОВНЫХ ТЕОРЕМ

Рассмотрим фактор-пространство $\mathscr{X} = S^p_c(\mathbb{R}, X)/S^p_0(\mathbb{R}, X)$, которое является банаховым пространством с нормой $\|\widetilde{x}\| = \inf\limits_{y \in x + S^p_0(\mathbb{R}, X)} \|y\|$, где $\widetilde{x} = x + S^p_0(\mathbb{R}, X)$ — класс эквивалентности, содержащий функцию $x \in S^p_c(\mathbb{R}, X)$. Отметим, что банахово пространство $\mathscr{X}$ становится банаховой алгеброй, если умножение вводится следующим образом: $\widetilde{x}\widetilde{y} = \widetilde{xy}$, $\widetilde{x}, \widetilde{y} \in \mathscr{X}$. В $\mathscr{X}$ действует сильно непрерывная изометрическая группа операторов $\widetilde{S} : \mathbb{R} \to \operatorname{End} \mathscr{X}$, действующая по правилу $\widetilde{S}(t)\widetilde{x} = \widetilde{S(t)x} = S(t)x + S^p_0(\mathbb{R}, X)$, $x \in S^p_c(\mathbb{R}, X)$, $t \in \mathbb{R}$. Фактор-пространство $\mathscr{X}$ наделяется структурой банахова $L^1(\mathbb{R})$-модуля с помощью формулы $f\widetilde{x} = \int\limits_{\mathbb{R}} f(\tau)\widetilde{S}(-\tau)\widetilde{x}d\tau$, $f \in L^1(\mathbb{R})$, $\widetilde{x} \in \mathscr{X}$. Подпространство $\mathscr{X}_{\omega,\infty} = S^p_{\omega,\infty}(\mathbb{R}, X)/S^p_0(\mathbb{R}, X)$ является замкнутым подмодулем из $L^1(\mathbb{R})$-модуля $\mathscr{X}$. Непосредственно из определения представления $\widetilde{S} : \mathbb{R} \to \operatorname{End} \mathscr{X}$ следует, что $\widetilde{S}(\omega)\widetilde{x} = \widetilde{x}$, $\widetilde{x} \in \mathscr{X}$. Таким образом, функция $t \mapsto \widetilde{S}(t)\widetilde{x} : \mathbb{R} \to \mathscr{X}_{\omega,\infty}$, $\widetilde{x} \in \mathscr{X}_{\omega,\infty}$, является непрерывной ω-периодической функцией, т. е. она принадлежит банахову пространству $C_\omega(\mathbb{R}, \mathscr{X}_{\omega,\infty})$. Следовательно, имеет место

Теорема 4. *Функция $x \in S^p_c(\mathbb{R}, X)$ является ω-периодической на бесконечности тогда и только тогда, когда класс эквивалентности $\widetilde{x} = x + S^p_0(\mathbb{R}, X)$ является ω-периодическим вектором относительно представления $\widetilde{S} \in \operatorname{End} \mathscr{X}$.*

Доказательства теорем 2 и 3 следуют из теорем 4 и 1, где в качестве пространства $\mathscr{X}_\omega$ взято пространство $S^p_{\omega,\infty}(\mathbb{R}, X)/S^p_0(\mathbb{R}, X)$.

Благодарности. Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 16-01-00197, выполняемый в Воронежском госуниверситете).

Библиографический список

1. *Левитан Б. М., Жиков В. В.* Почти-периодические функции и дифференциальные уравнения. М. : Изд-во Моск. ун-та, 1978. 206 с.
2. *Баскаков А. Г.* Исследование линейных дифференциальных уравнений методами спектральной теории разностных операторов и линейных отношений // УМН. 2013. Т. 68, № 1. С. 77–128. DOI: 10.4213/rm9505.
3. *Баскаков А. Г.* Спектральный анализ дифференциальных операторов с неограниченными операторными коэффициентами, разностные отношения и полугруппы разностных отношений // Изв. РАН. Сер. матем. 2009. Т. 73, № 2. С. 3–68. DOI: 10.4213/im2643.
4. *Баскаков А. Г.* Теория представлений банаховых алгебр, абелевых групп и полугрупп в спектральном анализе линейных операторов // СМФН. 2004. Т. 9. С. 3–151.
5. *Баскаков А. Г.* Гармонический анализ линейных операторов. Воронеж : Изд-во Воронеж. гос. ун-та, 1987. 165 с.
6. *Баскаков А. Г., Криштал И. А.* Гармонический анализ каузальных операторов и их спектральные свойства // Изв. РАН. Сер. матем. 2005. Т. 69, № 3. С. 3–54. DOI: 10.4213/im639.
7. *Баскаков А. Г.* Гармонический и спектральный анализ операторов с ограниченными степенями и ограниченных полугрупп операторов на банаховом пространстве // Матем. заметки. 2015. Т. 97, № 2. С. 174–190. DOI: 10.4213/mzm10285.
8. *Баскаков А. Г.* Спектральные критерии почти периодичности решений функциональных уравнений // Матем. заметки. 1978. Т. 24, № 2. С. 195–206.
9. *Баскаков А. Г.* Неравенства бернштейновского типа в абстрактном гармоническом анализе // Сиб. матем. журн. 1979. Т. 20, № 5. С. 942–952.
10. *Хилле Э., Филлипс Р.* Функциональный анализ и полугруппы. М. : Изд-во иностр. лит., 1962. 829 с.
11. *Engel K.-J., Nagel R.* A short course on operator semigroups. N. Y. : Universitext, Springer, 2006. 247 p.
12. *Далецкий Ю. Л., Крейн М. Г.* Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве. М. : Наука, 1970. 535 с.
13. *Hardy G. H.* A theorem concerning trigonometrical series // J. London Math. Soc. 1928. iss. 3. P. 12–13.
14. *Сенета Е.* Правильно меняющиеся функции. М. : Наука, 1985. 144 с.
15. *Левин Б. Я.* Распределение корней целых функций. М. : Гостехиздат, 1956. 632 с.
16. *Струкова И. И.* Теорема Винера для периодических на бесконечности функций // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2012. Т. 12, вып. 4. С. 34–41.
17. *Струкова И. И.* О теореме Винера для периодических на бесконечности функций // Сиб. матем. журн. 2016. Т. 57, № 1. С. 186–198.
18. *Струкова И. И.* О гармоническом анализе периодических на бесконечности функций // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2014. Т. 14, вып. 1. С. 28–38.
19. *Струкова И. И.* Гармонический анализ периодических векторов и периодических на бесконечности функций // Вестн. НГУ. Сер. матем., мех., информ. 2014. Т. 14, № 1. С. 98–111.

20. *Струкова И. И.* Спектры алгебр медленно меняющихся и периодических на бесконечности функций и банаховы пределы // Вестн. ВГУ. Сер. Физика. Математика. 2015. № 3. С. 161–165.

Образец для цитирования:
Струкова И. И. Гармонический анализ периодических на бесконечности функций в пространствах Степанова // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2017. Т. 17, вып. 2. С. 172–182. DOI: 10.18500/1816-9791-2017-17-2-172-182.

Harmonic Analysis of Periodic at Infinity Functions from Stepanov Spaces

I. I. Strukova

Irina I. Strukova, Voronezh State University, 1, Universitetskaya pl., Voronezh, Russia, 394036, irina.k.post@yandex.ru

We consider Stepanov spaces of functions defined on $\mathbb{R}$ with their values in a complex Banach space. We introduce the notions of slowly varying and periodic at infinity functions from Stepanov space. The main results of the article are concerned with harmonic analysis of periodic at infinity functions from Stepanov space. For this class of functions we introduce the notion of a generalized Fourier series; the Fourier coefficients in this case may not be constants, they are functions that are slowly varying at infinity. We prove analogs of the classical results on Ćesaro summability. Basic results are derived with the use of isometric representations theory.

Key words: Banach space, $L^1(\mathbb{R})$-module, Stepanov space, slowly varying at infinity function, periodic at infinity function, Fourier series.

Acknowledgements: This work was supported by the Russian Foundation for Basic Research (project no. 16-01-00197 performed in Voronezh State University).

References

1. Levitan B. M., Zhikov V. V. *Almost periodic functions and differential equations*. Cambridge, Cambridge Univ. Press, 1983. 224 p. (Russ. ed. : Levitan B. M., Zhikov V. V. *Pochti-periodicheskye funkcii i differencialnye uravneniya*. Moscow, Moscow. Univ. Press, 1978. 206 p.)
2. Baskakov A. G. Analysis of linear differential equations by methods of the spectral theory of difference operators and linear relations. *Russian Math. Surveys*, 2013, vol. 68, no. 1, pp. 69–116. DOI: 10.4213/rm9505.
3. Baskakov A. G. Spectral analysis of differential operators with unbounded operator-valued coefficients, difference relations and semigroups of difference relations. *Izv. Math.* 2009. vol. 73, no. 2, pp. 215–278. DOI: 10.4213/im2643.
4. Baskakov A. G. Theory of representations of Banach algebras, and abelian groups and semigroups in the spectral analysis of linear operators. *J. Math. Sci.*, 2006, vol. 137, iss. 4, pp. 4885–5036. DOI: 10.1007/s10958-006-0286-4.
5. Baskakov A. G. *Harmonic analysis of linear operators*. Voronezh, Voronezh Univ. Press, 1987. 165 p. (in Russian).

6. Baskakov A. G., Krishtal I. A. Harmonic analysis of causal operators and their spectral properties. *Izv. Math.*, 2005, vol. 69, no. 3, pp. 439–486. DOI: 10.4213/im639.
7. Baskakov A. G. Harmonic and spectral analysis of power bounded operators and bounded semigroups of operators on Banach spaces. *Math. Notes*, 2015, vol. 97, no. 2, pp. 164–178. DOI: 10.4213/mzm10285.
8. Baskakov A. G. Spectral tests for the almost periodicity of the solutions of functional equations. *Math. Notes*, 1978, vol. 24, no. 1–2, pp. 606–612.
9. Baskakov A. G. Bernšteĭn-type inequalities in abstract harmonic analysis. *Siberian Math. J.*, 1979, vol. 20, no. 5, pp. 665–672.
10. Hille E., Phillips R. *Functional analysis and semi-groups*. Amer. Math. Soc. Colloquim Publ., vol. 31. R. I., Amer. Math. Soc., 1957. 808 p.
11. Engel K.-J., Nagel R. *A short course on operator semigroups*. New York, Universitext, Springer, 2006. 247 p.
12. Daletsky Yu. L., Krein M. G. *Stability of Solutions of Differential Equations in Banach Space*. Moscow, Nauka, 1970. 535 p. (in Russian)
13. Hardy G. H. A theorem concerning trigonometrical series. *J. London Math. Soc.*, 1928, iss. 3, pp. 12–13.
14. Seneta E. *Regularly varying functions*. Lecture Notes in Mathematics, vol. 508, Berlin, Heidelberg, New York, Springer-Verlag, 1976. 112 p. DOI: 10.1007/BFb0079658.
15. Levin B. Ya. *Distribution of zeros of entire functions*. Moscow, Gostekhizdat, 1956. 632 p. (in Russian).
16. Strukova I. I. Wiener's theorem for periodic at infinity functions. *Izv. Saratov Univ. (N. S.), Ser. Math. Mech. Inform.*, 2012, vol. 12, iss. 4, pp. 34–41 (in Russian).
17. Strukova I. I. About Wiener theorem for periodic at infinity functions. *Siberian Math. J.*, 2016, vol. 57, no. 1, pp. 186–198 (in Russian).
18. Strukova I. I. About harmonic analysis of periodic at infinity functions. *Izv. Saratov Univ. (N. S.), Ser. Math. Mech. Inform.*, 2014, vol. 14, iss. 1, pp. 28–38 (in Russian).
19. Strukova I. I. Harmonic analysis of periodic vectors and functions periodic at infinity. *J. Math. Sci.*, 2015, vol. 211, no. 6, pp. 874–885.
20. Strukova I. I. Spectra of algebras of slowly varying and periodic at infinity functions and Banach limits. *Proc. Voronezh State Univ. Ser. Physics. Mathematics*, 2015, no. 3, pp. 161–165 (in Russian).

Cite this article as:

Strukova I. I. Harmonic Analysis of Periodic at Infinity Functions from Stepanov Spaces. *Izv. Saratov Univ. (N. S.), Ser. Math. Mech. Inform.*, 2017, vol. 17, iss. 2, pp. 172–182 (in Russian). DOI: 10.18500/1816-9791-2017-17-2-172-182.
