



МЕХАНИКА

УДК 539.3

РАЗВИТИЕ АСИМПТОТИЧЕСКИХ МЕТОДОВ АНАЛИЗА ДИСПЕРСИОННЫХ СООТНОШЕНИЙ ДЛЯ НАСЛЕДСТВЕННО-УПРУГОГО СПЛОШНОГО ЦИЛИНДРА

М. В. Вильде¹, Н. В. Сергеева²

¹Вильде Мария Владимировна, доктор физико-математических наук, профессор кафедры математической теории упругости и биомеханики, Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского, Россия, 410012, Саратов, Астраханская, 83, mv_wilde@mail.ru

²Сергеева Надежда Викторовна, старший преподаватель кафедры теории функций и стохастического анализа, Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского, 410012, Россия, Саратов, Астраханская, 83, knickknack@bk.ru

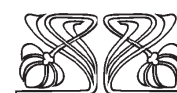
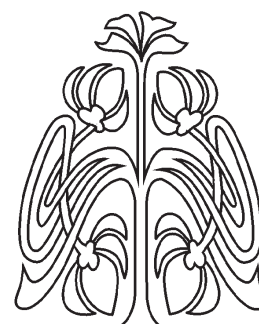
Рассматривается задача о распространении гармонических по времени волн в вязкоупругом сплошном цилиндре. Для описания колебаний цилиндра применяются трехмерные уравнения вязкоупругости в цилиндрической системе координат. Поверхность цилиндра считается свободной от напряжений. Для описания вязкоупругих свойств применяются интегральные операторы с дробно-экспоненциальным ядром. Для случая рационального значения параметра сингулярности предложен метод асимптотического анализа дисперсионных соотношений, основанный на разложении в обобщенный степенной ряд. Для случая осесимметричных волн получены асимптотики корней дисперсионного уравнения при малых и больших значениях частоты. Приведены численные результаты, подтверждающие применимость предложенного метода.

Ключевые слова: дисперсионное уравнение, сплошной цилиндр, вязкоупругость, асимптотика, параметр сингулярности, параметр дробности, дробно-экспоненциальная функция.

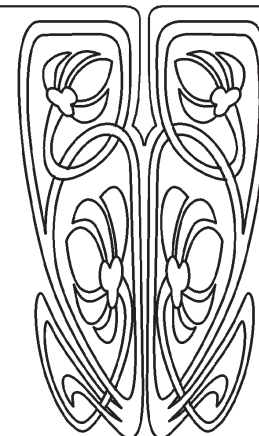
DOI: 10.18500/1816-9791-2017-17-2-183-195

ВВЕДЕНИЕ

Проблема исследования корней дисперсионных уравнений является необходимым этапом решения целого ряда практических важных задач. В частности, исследова-



НАУЧНЫЙ
ОТДЕЛ





ние асимптотического поведения корней при стремлении волновых параметров к нулю либо бесконечности играет важную роль в анализе распространения нестационарных волн при действии ударной нагрузки [1], в задачах акустической спектроскопии [2], при изучении краевых колебаний упругих тел [3] и во многих других теоретических и прикладных задачах динамики деформируемых тел.

В отличие от упругих волноводов, особенности дисперсии волн деформации в наследственно-упругих телах изучены недостаточно. Первые исследования по данной проблеме принадлежат А. Ю. Ишлинскому, А. Н. Герасимову, А. Р. Ржаницыну [4], Ю. Н. Работнову [5]. Дисперсия волн, требующих для своего описания постановки двумерных и трехмерных задач (волны в плоском слое, распространяющиеся вдоль срединной поверхности, или волны в сплошном или полом цилиндре, распространяющиеся вдоль оси), исследовалась до сих пор только на основе численного решения [6–9]. Асимптотический анализ применяется, как правило, для случая стандартного вязкоупругого тела [10]. В недавних работах [11–13] асимптотические методы развиваются для наследственно-упругих тел, описываемых дробно-экспоненциальной функцией Работнова с параметром сингулярности $\alpha = -0.5$. Между тем обработка экспериментальных данных для реальных материалов дает различные значения из интервала $-1 < \alpha < 0$ [14–17]. Таким образом, требуется разработать метод построения асимптотик дисперсионных кривых для произвольного значения параметра α .

Данная работа посвящена обобщению асимптотических методов исследования дисперсионных соотношений для наследственно-упругого сплошного цилиндра на случай произвольного рационального значения параметра сингулярности ядра релаксации при использовании дробно-экспоненциальной функции Работнова [14].

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим задачу о колебаниях бесконечного сплошного кругового цилиндра радиуса R из наследственно-упругого материала. В цилиндрической системе координат (r, φ, z) (рис. 1) динамическое напряженно-деформированное состояние цилиндра описывается следующей системой уравнений:

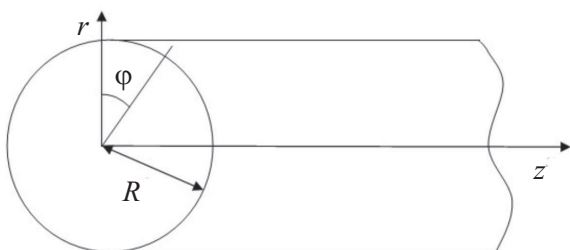


Рис. 1. Бесконечный сплошной круговой цилиндр радиуса R

Fig. 1. An infinite solid circular cylinder of radius R

уравнения движения:

$$\frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{r\varphi}}{\partial \varphi} + \frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial z} + \frac{\sigma_{rr}}{r} - \frac{\sigma_{\varphi\varphi}}{r} = \rho \frac{\partial^2 u_r}{\partial t^2},$$

$$\frac{\partial \sigma_{\varphi r}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{\varphi\varphi}}{\partial \varphi} + \frac{\partial \sigma_{\varphi z}}{\partial z} + \frac{2\sigma_{\varphi r}}{r} = \rho \frac{\partial^2 u_\varphi}{\partial t^2}, \quad (1)$$

$$\frac{\partial \sigma_{zr}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{z\varphi}}{\partial \varphi} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + \frac{\sigma_{zr}}{r} = \rho \frac{\partial^2 u_z}{\partial t^2},$$

уравнения состояния:

$$\tilde{E} \frac{\partial u_r}{\partial r} = \sigma_{rr} - \tilde{\nu}(\sigma_{\varphi\varphi} + \sigma_{zz}), \quad \frac{1}{r} \tilde{E} \left(u_r + \frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} \right) = \sigma_{\varphi\varphi} - \tilde{\nu}(\sigma_{rr} + \sigma_{zz}), \quad (2)$$

$$\tilde{E} \frac{\partial u_z}{\partial z} = \sigma_{zz} - \tilde{\nu}(\sigma_{rr} + \sigma_{\varphi\varphi}), \quad \frac{1}{2} \tilde{E} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \varphi} + r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{u_\varphi}{r} \right) \right) = (1 + \tilde{\nu}) \sigma_{r\varphi}, \quad (3)$$



$$\frac{1}{2} \tilde{E} \left(\frac{\partial u_r}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial r} \right) = (1 + \tilde{\nu}) \sigma_{rz}, \quad \frac{1}{2} \tilde{E} \left(\frac{\partial u_\varphi}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_z}{\partial \varphi} \right) = (1 + \tilde{\nu}) \sigma_{\varphi z}, \quad (4)$$

где $\sigma_{rr}, \sigma_{r\varphi}, \sigma_{rz}, \sigma_{\varphi\varphi}, \sigma_{\varphi z}, \sigma_{zz}$ — компоненты тензора напряжений, u_r, u_φ, u_z — компоненты вектора перемещений, ρ — плотность материала, t — время, $\tilde{E}, \tilde{\nu}$ — интегральные операторы, определяемые формулами

$$\tilde{E} = E(1 - \Gamma^*), \quad \tilde{\nu} = \nu + \frac{1 - 2\nu}{2} \Gamma^*, \quad \Gamma^* f(t) = k \int_{-\infty}^t \mathfrak{D}_\alpha(-\beta, t - \tau) f(\tau) d\tau, \quad (5)$$

E, ν — мгновенные значения модуля Юнга и коэффициента Пуассона, k, β — параметры материала, α — параметр сингулярности, $-1 < \alpha \leq 0$ ($\alpha = 0$ соответствует модели стандартного вязкоупругого тела). Объемная деформация считается упругой.

В качестве ядра релаксации будем использовать дробно-экспоненциальную функцию Работнова [14]:

$$\mathfrak{D}_\alpha(-\beta, t) = t^\alpha \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\beta)^n t^{n(1+\alpha)}}{\Gamma((n+1)(1+\alpha))},$$

где $\Gamma(n) = \int_0^\infty y^{n-1} \exp(-y) dy$ — гамма-функция.

При таком выборе ядра отношения длительных и мгновенных модулей упругости и сдвига определяются следующими формулами:

$$e = \frac{E_\infty}{E} = \frac{\beta - k}{\beta}, \quad g = \frac{G_\infty}{G} = \frac{2(1 + \nu)(\beta - k)}{2\beta(1 + \nu) + k(1 - 2\nu)}.$$

Изучим распространение волн, гармонических по времени. Тогда решение для перемещений \bar{u} следует представить в виде

$$\bar{u} = (\text{grad } \Phi + \text{rot } \bar{H}) \exp(i\omega t), \quad (6)$$

где Φ, \bar{H} — потенциалы, ω — частота.

Применяя операторы (5) к функциям (6), приходим к уравнениям состояния вида (2)–(4), в которых операторы \tilde{E} и $\tilde{\nu}$ заменяются соответственно на константы EE^F и ν^F , выражающиеся следующими формулами:

$$E^F = 1 - \frac{k}{\beta + (i\omega)^{1+\alpha}}, \quad \nu^F = \nu + \frac{1 - 2\nu}{2} \frac{k}{\beta + (i\omega)^{1+\alpha}}, \quad (7)$$

при этом однозначная ветвь степенной функции выделяется условием $-\pi < \arg(i\omega) < \pi$.

Введем безразмерные переменные:

$$\xi = \frac{r}{R}, \quad \zeta = \frac{z}{R}, \quad t_* = \frac{tc_2}{R} \quad (8)$$

и безразмерные величины

$$u_\eta^* = \frac{u_\eta}{R}, \quad \sigma_{\eta\gamma}^* = \frac{\sigma_{\eta\gamma}}{E}, \quad \{\beta_*, k_*\} = \left(\frac{R}{c_2} \right)^{1+\alpha} \{\beta, k\}, \quad \omega_* = \frac{R}{c_2} \omega, \quad (9)$$



где $c_2 = \sqrt{\frac{E}{2(1+\nu)\rho}}$, $\eta, \gamma = r, \varphi, z$. В дальнейшем звездочки будут опущены.

Выражая напряжения через перемещения из полученных уравнений состояния и подставляя их в уравнения движения (1), с учетом (8) и (9) получаем уравнения движения в перемещениях:

$$\nabla^2 \bar{u} + (k_F^{-2} - 1) \text{grad div } \bar{u} - \Omega^2 \bar{u} = 0, \quad (10)$$

где

$$k_F^{-2} = \frac{2 - 2\nu^F}{1 - 2\nu^F}, \quad \Omega^2 = \omega^2 \frac{1 + \nu^F}{(1 + \nu)E^F}.$$

На поверхности цилиндра будем требовать выполнения условий

$$\sigma_{rr} = \sigma_{r\varphi} = \sigma_{rz} = 0.$$

2. ВЫВОД ДИСПЕРСИОННЫХ УРАВНЕНИЙ

Рассмотрим осесимметричную задачу. Тогда для нахождения решения в случае продольно-радиальных колебаний потенциалы Φ и \bar{N} можно взять в виде

$$\Phi = f(\xi) \exp(-i\tilde{\chi}\zeta), \quad H_\varphi = q_\varphi(\xi) \exp(-i\tilde{\chi}\zeta), \quad H_r = H_z = 0, \quad (11)$$

где $\tilde{\chi} = \chi - i\delta$, χ — волновое число, $\delta > 0$ — коэффициент затухания, определяющий убывание амплитуды волны с увеличением координаты ζ . В случае крутильных колебаний

$$H_z = q_z(\xi) \exp(-i\tilde{\chi}\zeta), \quad \Phi = H_r = H_\varphi = 0. \quad (12)$$

Получим сначала дисперсионное уравнение для случая продольно-радиальных колебаний. Подставляя выражения (11) в (10), будем иметь для функций $f(\xi)$ и $q_\varphi(\xi)$ следующие уравнения:

$$f''(\xi) + \frac{1}{\xi} f'(\xi) + a^2 f(\xi) = 0, \quad q_\varphi''(\xi) + \frac{1}{\xi} q_\varphi'(\xi) - \left(\frac{1}{\xi^2} - b^2 \right) q_\varphi(\xi) = 0,$$

где $a^2 = k_F^2 \Omega^2 - \tilde{\chi}^2$, $b^2 = \Omega^2 - \tilde{\chi}^2$.

Последние два уравнения для случая сплошного цилиндра имеют следующие решения:

$$f(\xi) = A_1 J_0(a\xi), \quad q_\varphi(\xi) = A_2 J_1(b\xi), \quad (13)$$

где $J_n(\bullet)$ — функции Бесселя n -го порядка, A_1, A_2 — неизвестные постоянные.

Подставляя (13) в (11) и удовлетворяя граничным условиям, приходим к дисперсионному уравнению:

$$(\Omega^2 - 2\tilde{\chi}^2)^2 J_0(a)J_1(b) + 4\tilde{\chi}^2 ab J_0(b)J_1(a) - 2\Omega^2 a J_1(a)J_1(b) = 0. \quad (14)$$

Используя представление (12) для функций Φ и \bar{N} и выполняя аналогичные действия, получим в случае крутильных колебаний дисперсионное уравнение:

$$bJ_0(b) - 2J_1(b) = 0. \quad (15)$$

Уравнения (14), (15) имеют бесконечное счетное множество корней $\tilde{\chi}_n(\omega)$. Введем фазовую скорость n -й моды, вычисляемую по формуле $c_n^{ph} = \omega/\chi$.



3. АСИМПТОТИКИ КОРНЕЙ ДИСПЕРСИОННЫХ УРАВНЕНИЙ

Дисперсионные уравнения (14) и (15), совпадающие по форме с соответствующими дисперсионными уравнениями для упругого сплошного цилиндра [18], содержат функции (7). В случае дробного значения α стандартная техника получения асимптотических разложений корней дисперсионного уравнения [19, 20], основанная на представлении искомой величины в виде асимптотического степенного ряда, оказывается неприменимой из-за наличия точек ветвления $\omega = 0$ и $\omega = \infty$. Рассмотрим обобщение этой техники для случая рационального значения параметра сингулярности $\alpha = -\frac{l}{m}$, где l, m ($l < m$) — натуральные числа. В этом случае $\omega = 0$ и $\omega = \infty$ являются алгебраическими точками ветвления конечного порядка m . В окрестности таких точек ветвления функция допускает разложение в обобщенный степенной ряд [21].

Примем далее для простоты, что параметр сингулярности имеет вид $\alpha = -\frac{m-1}{m}$. Анализ, аналогичный случаю упругого цилиндра, показывает, что при $\omega \rightarrow 0$ уравнение (14) имеет один корень $\chi \sim \omega$ и бесконечное множество корней $\chi \sim 1$. То же самое верно для уравнения (15). Таким образом, асимптотики корней при $\omega \rightarrow 0$ следует искать в виде

$$\tilde{\chi} = \sum_{p=p_0}^{\infty} c_p \omega^{p(1+\alpha)}, \quad (16)$$

где $p_0 = m$ для первого корня и $p_0 = 0$ для остальных корней. Для нахождения коэффициентов разложения (16) подставим его в соответствующее дисперсионное уравнение и разложим все функции, входящие в него, в обобщенные степенные ряды по степеням $\omega^{1+\alpha}$. Приравнявая нулю коэффициенты при одинаковых степенях ω , получим бесконечную систему зацепляющихся уравнений для определения искомого коэффициентов разложения. Решая полученную систему, находим коэффициенты разложения (16). Для выполнения описанных выкладок удобно использовать средства компьютерной алгебры пакета Maple.

В случае продольно-радиальных колебаний для первого корня получена асимптотика

$$\tilde{\chi}_1^s = c_0^s \omega \left[1 + \frac{k}{2\beta} \sum_{j=1}^{4m-1} \frac{(-1)^j i^{\frac{j}{m}}}{(\beta - k)^j} d_j^{(0)} \omega^{\frac{j}{m}} + \omega^2 \sum_{j=0}^{2m-1} i^{\frac{j}{m}} d_j^{(1)} \omega^{\frac{j}{m}} + O(\omega^4) \right], \quad (17)$$

где $c_0^s = \frac{1}{\sqrt{2(1+\nu)e}}$, $d_1^{(0)} = 1$, $d_2^{(0)} = 1 - \frac{1}{4} \frac{k}{\beta}$, $d_3^{(0)} = 1 - \frac{1}{2} \frac{k}{\beta} + \frac{1}{8} \frac{k^2}{\beta^2}$, $d_0^{(1)} = \frac{(2\beta\nu + k(1 - 2\nu))^2}{32\beta(\beta - k)(1 + \nu)}$, $d_j^{(0)}$ ($j > 3$) — коэффициенты, зависящие только от параметров k и β , $d_j^{(1)}$ ($j > 3$) — коэффициенты, зависящие от параметров k , β , ν .

Асимптотики корней дисперсионного уравнения (13) для мод с номерами $n = 2, 3, \dots$ имеют вид

$$\tilde{\chi}_n^s = \frac{1}{2} \ln(4\pi(n-1)) + i\pi(n-1) + O(\omega^{1+\alpha}). \quad (18)$$

Для нахождения коэффициентов разложений (16) в случае крутильных колебаний, подставляем (16) в уравнение (15). Действуя аналогичным образом, получим



асимптотики корней дисперсионного уравнения (15) в виде

$$\tilde{\chi}_1^t = \frac{1}{\sqrt{g}}\omega - \frac{3k(-1)^{\frac{1+\alpha}{2}}}{4} \frac{\sqrt{g}}{(1+\nu)(\beta-k)^2} \omega^{2+\alpha} - \left(\frac{1}{2\sqrt{g}} - \frac{3k(-1)^{1+\alpha}\sqrt{g}}{4(1+\nu)(\beta-k)^3} \right) \omega^{3+2\alpha} + O(\omega^{4+3\alpha}), \quad (19)$$

$$\tilde{\chi}_n^t = o(1) + i\left(-\frac{\pi}{4} + \pi n\right) + O(\omega^{1+\alpha}), \quad n = 2, 3, \dots \quad (20)$$

На рис. 2 представлены графики фазовой скорости для первой моды в случае продольно-радиальных колебаний при $k = 0.5$, $\beta = 1$.

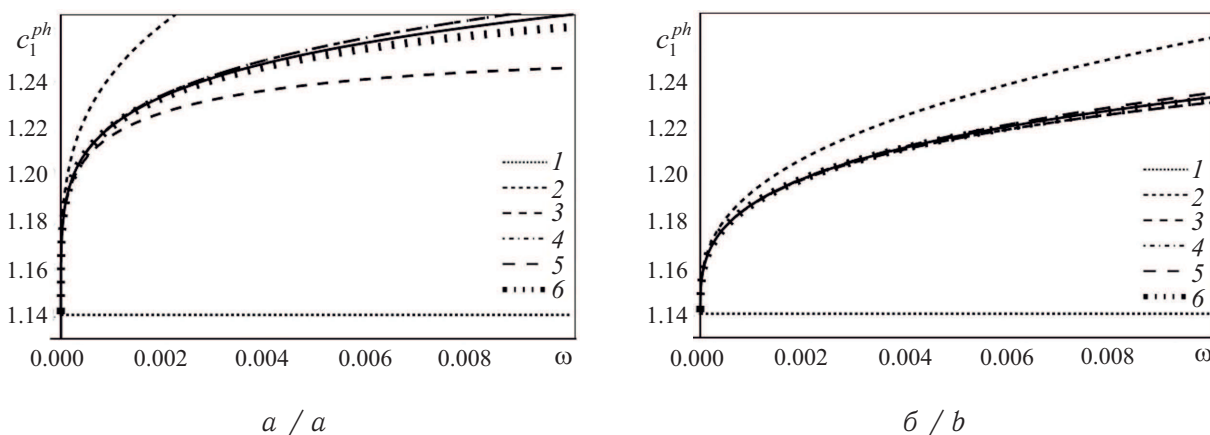


Рис. 2. Фазовая скорость первой моды: $a - \alpha = -3/4$; $b - \alpha = -2/3$
 Fig. 2. Phase velocity of the first mode: $a - \alpha = -3/4$; $b - \alpha = -2/3$

Кривые 1–6 построены по асимптотике (17), номер кривой соответствует числу членов разложения. Сплошной линией представлено численное решение дисперсионного уравнения (14).

На рис. 3 представлены графики величин δ_1/ω для той же моды при тех же значениях параметров материала.

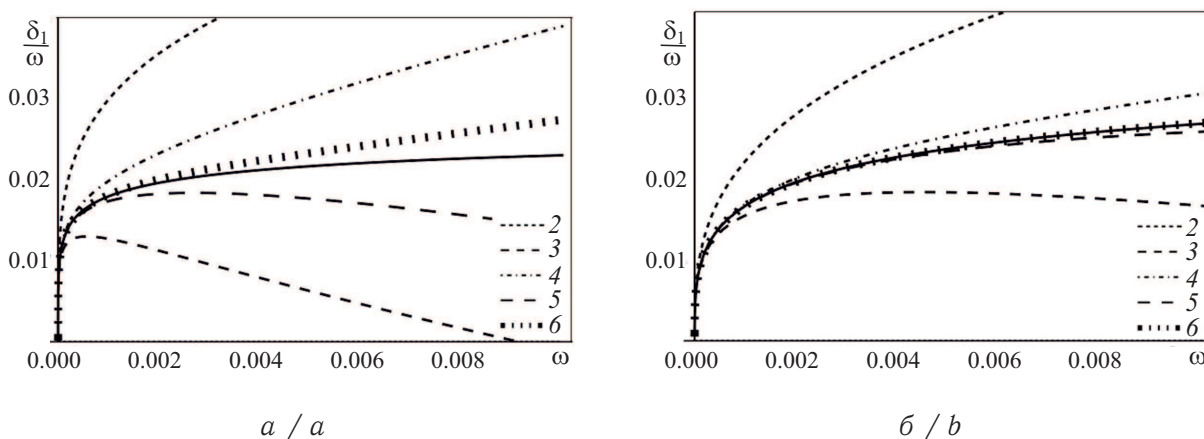


Рис 3. Мнимая часть первого корня: $a - \alpha = -3/4$; $b - \alpha = -2/3$
 Fig. 3. Imaginary part of the first root: $a - \alpha = -3/4$; $b - \alpha = -2/3$



Из графиков видно, что при небольшом числе членов разложения асимптотики по дробным степеням применимы только при весьма малых значениях ω .

Сравнение рис. 2, а и 2, б, 3, а и 3, б показывает, что при увеличении $|\alpha|$ для сохранения заданной точности требуется увеличить число членов разложения.

Первые члены разложений (18), (20) не зависят от параметров материала и совпадают с соответствующими членами разложения для упругого сплошного цилиндра [3]. Соответствующие им моды описывают статический погранслои, не представляющий большого интереса в динамических задачах.

Аналогичные выводы справедливы и в случае крутильных колебаний.

Ограничиваясь только первым членом разложения и возвращаясь к размерным переменным, получим предельные значения фазовой скорости фундаментальной моды $c_\infty^s = \sqrt{\frac{E_\infty}{\rho}}$ для продольно-радиальных колебаний и $c_\infty^t = \sqrt{\frac{G_\infty}{\rho}}$ для крутильных колебаний. Величина c_∞^s соответствует длительной скорости по теории стержней [22], что подтверждает правильность полученной асимптотики.

Свойства корней дисперсионных уравнений (14) и (15) таковы, что при $\omega \rightarrow \infty$ корень $\tilde{\chi}_n(\omega)$ имеет порядок $O(\omega)$. Следовательно, асимптотики корней дисперсионных уравнений (14) и (15) при больших ω следует искать в виде

$$\tilde{\chi}_n^{(\infty)} = d_{n1}^{(\infty)}\omega + d_{n2}^{(\infty)}\omega^{-\alpha} + d_{n3}^{(\infty)}\omega^{-1-2\alpha} + O(\omega^{-2-3\alpha}). \quad (21)$$

Если коэффициент $d_{n1} > 1$, то a и b , введенные в параграфе 2, становятся чисто мнимыми. Используя асимптотики модифицированных функций Бесселя, запишем дисперсионное уравнение (14) в виде

$$\begin{aligned} (\Omega^2 - 2\tilde{\chi}^2)^2 \left(1 + O\left(\frac{1}{\omega}\right)\right) (1 + O(e^{-2b})) - 4\tilde{\chi}^2 ab \left(1 + O\left(\frac{1}{\omega}\right)\right) (1 + O(e^{-2b})) - \\ - 2\Omega^2 a \left(1 + O\left(\frac{1}{\omega}\right)\right) (1 + O(e^{-2b})) = 0. \end{aligned} \quad (22)$$

Подставим разложение (21) в уравнение (22) и разложим все функции, входящие в него, в обобщенные степенные ряды по степеням $\omega^{-(1+\alpha)}$, пренебрегая при этом экспоненциально убывающими членами. Приравнявая нулю коэффициенты при каждой из степеней, получим бесконечную систему зацепляющихся уравнений для определения искомых коэффициентов разложения. Решая полученную систему, находим коэффициенты разложения (21). Таким образом, асимптотика корней уравнения (14) для первой моды имеет вид

$$\tilde{\chi}_1^{s(\infty)} = \frac{1}{c_R}\omega + d_{12}^{s(\infty)}\omega^{-\alpha} + d_{13}^{s(\infty)}\omega^{-1-2\alpha} + O(\omega^{-2-3\alpha}), \quad (23)$$

где

$$d_{12}^{s(\infty)} = \frac{k(-i)^{1+\alpha}}{4c_R} \left[\frac{3}{1+\nu} - \frac{(1-2\nu)(1-c_R^2)}{(1-\nu)[3(1-c_R^2) - (1-2\nu)c_R^2 + (1-\nu)c_R^4]} \right],$$

c_R — скорость волны Рэлея, отнесенная к мгновенной скорости волны сдвига c_2 , $d_{13}^{s(\infty)}$ — комплексный коэффициент, зависящий от параметров материала k, β, ν .



Если коэффициент $d_{n1} = 1$, то a является мнимой величиной, а b — действительной. Дисперсионное уравнение (14) в этом случае можно заменить уравнением

$$J_1(b) + O\left(\frac{1}{\omega}\right) = 0.$$

Тогда асимптотики корней уравнения (14) для мод с номерами $n = 2, 3, \dots$ имеют вид

$$\begin{aligned} \tilde{\chi}_n^{s(\infty)} = & \omega - \frac{3k}{4(1+\nu)} (-1)^{\frac{1-\alpha}{2}} \omega^{-\alpha} + \frac{3k}{4} \left(\frac{\beta-k}{1+\nu} + \frac{3k}{8(1+\nu)^2} \right) (-1)^{-\alpha} \omega^{-1-2\alpha} + \\ & + \frac{3k}{4} \left(\frac{(\beta-k)^2}{1+\nu} - \frac{3k(\beta-k)}{4(1+\nu)^2} - \frac{9k^2}{32(1+\nu)^3} \right) (-1)^{\frac{-1-3\alpha}{2}} \omega^{-2-3\alpha} + O(\omega^{-3-4\alpha}), \end{aligned} \quad (24)$$

где b_n — корни уравнения $J_1(b) = 0$.

Следует отметить, что при любых значениях α слагаемое, содержащее b_n , появляется в коэффициенте при ω^{-1} .

Асимптотики корней дисперсионного уравнения (15) для больших значений частот также имеют вид (24), но теперь b_n — корни уравнения

$$b_n J_0(b_n) - 2J_1(b_n) = 0, \quad n = 1, 2, \dots$$

На рис. 4, а изображена фазовая скорость для первой моды в случае продольно-радиальных колебаний для больших значений частот при $\alpha = -3/4$, $k = 0.5$, $\beta = 1$ и её асимптотики, построенные по формуле (23), при этом номер кривой в легенде соответствует числу учитываемых членов разложения. Сплошной линией показано численное решение.

На рис. 4, б представлены графики величин δ_1/ω для той же моды. Из графиков видно, что хорошее приближение достигается при трех членах разложения (23) для действительной части волновой постоянной и четырех — для мнимой части волновой постоянной.

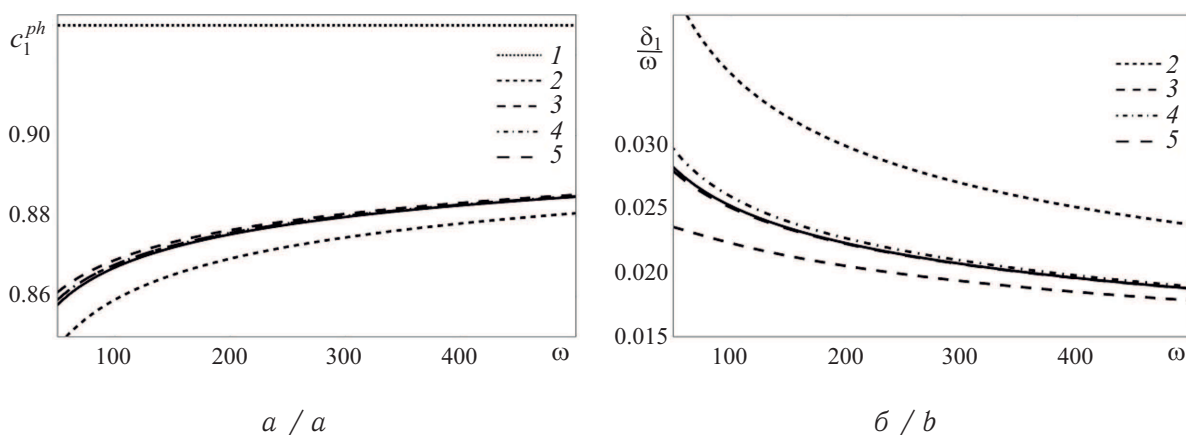


Рис. 4. Фазовая скорость первой моды (а) и мнимая часть первого корня (б) при $\alpha = -3/4$, $k = 0.5$, $\beta = 1$

Fig. 4. Phase velocity of the first mode (a) and imaginary part of the first root (b) for $\alpha = -3/4$, $k = 0.5$, $\beta = 1$



На рис. 5, *а* изображены фазовые скорости для случая продольно-радиальных колебаний при $\alpha = -3/4$, $k = 0.5$, $\beta = 1$, $n = 2, 3, \dots$. Сплошные линии соответствуют численному решению, пунктирные — асимптотикам, построенным по формулам (24).

На рис. 5, *б* представлены графики величин $\frac{\delta_n}{\omega^{3/4}}$ для того же случая. Для построения асимптотик было получено 8 членов разложения. Из графиков видно хорошее согласование численного и асимптотического решений.

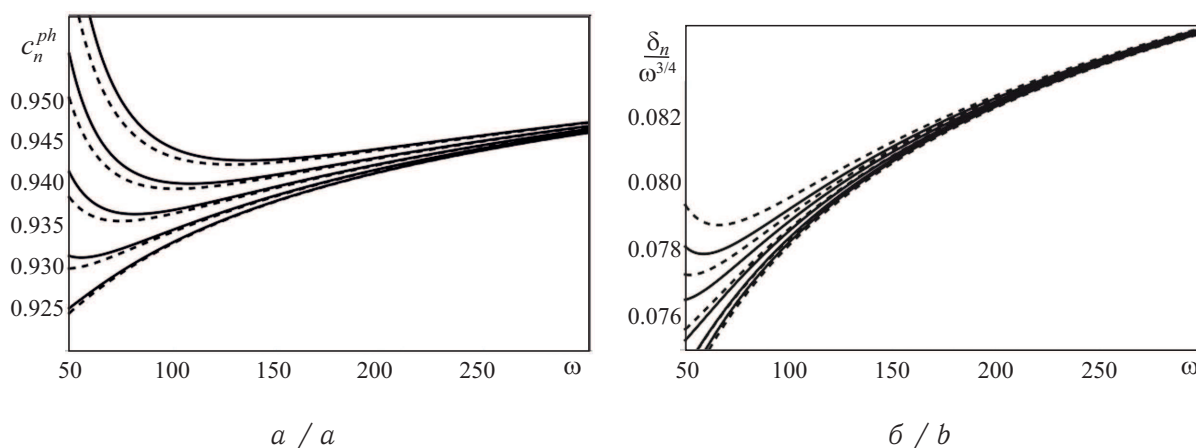


Рис 5. Фазовые скорости (*а*) и коэффициенты затухания (*б*) высших мод в случае продольно-радиальных колебаний

Fig. 5. Phase velocities (*a*) and attenuation coefficients (*b*) of higher modes in the case of longitudinal-radial oscillations

Первые коэффициенты разложений (17)–(20), (23), (24) не зависят от α .

Отметим, что мгновенная скорость сдвига c_2 является предельной для мод продольно-радиальных колебаний высшего порядка и всех мод крутильных колебаний.

Сравнительный анализ асимптотик показывает, что действительная часть для больших значений частот при различных значениях α имеет порядок $O(\omega)$, а мнимая часть имеет порядок $O(\omega^{-\alpha})$. Таким образом, поведение мнимой части волновой постоянной существенно зависит от параметра сингулярности α .

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Полученные в данной работе асимптотики можно применить для изучения влияния вязкоупругости на характер НДС в окрестности фронтов волн в тонких стержнях и оценки возможностей приближенных теорий стержней при описании распространения ударных волн. Их также можно использовать для определения параметра α из экспериментальных данных. Представляется очевидным, что предложенная методика построения асимптотик может быть распространена на случай произвольного рационального значения параметра сингулярности $\alpha = -l/m$.

В работах [23, 24] показано, что интегральные операторы с ядром в виде дробно-экспоненциальной функции Ю. Н. Работнова взаимосвязаны с оператором дробного дифференцирования, широко применяемым для описания свойств вязкоупругих сред различной природы (см. обзор [25]). В частности, такие операторы применяются в



задачах о соударении упругих тел, при этом параметр дробности моделирует изменения в микроструктуре материала после удара. Поскольку предложенная в данной работе методика может быть легко распространена на случай моделей с дробными производными при рациональных значениях параметра дробности, она может найти применение в этом практически важном классе задач.

Библиографический список

1. Айнола Л. Я., Нигул У. К. Волновые процессы деформации упругих плит и оболочек // Изв. АН ЭССР. Сер. физ.-матем. и техн. наук. 1965. Т. 14, № 1. С. 3–63.
2. Karpinov J. D., Kovalev V. A., Wilde M. V. Matching of asymptotic models in scattering of a plane acoustic waves by an elastic cylindrical shell // J. Sound and Vibration. 2003. Vol. 264, iss. 3. P. 639–655. DOI: 10.1016/S0022-460X(02)01212-9.
3. Вильде М. В., Каплунов Ю. Д., Коссович Л. Ю. Краевые и интерфейсные резонансные явления в упругих телах. М. : Физматлит, 2010. 280 с.
4. Ржаницын А. Р. Теория ползучести. М. : Стройиздат, 1968. 418 с.
5. Работнов Ю. Н. Ползучесть элементов конструкций. М. : Наука, 1966. 752 с.
6. Червинко О. П., Сенченков И. К. Гармонические волны в слое и бесконечном цилиндре // Прикладная механика. 1986. Т. 22, № 12. С. 31–37.
7. Tanaka K., Kon-No A. Harmonic Waves in Linear Viscoelastic Plate // Bull. JSME. 1980. Vol. 23, № 176. P. 185–193. DOI: 10.1299/jsme1958.23.185.
8. Воронаев Г. А., Попков В. И. Распространение осесимметричных волн в вязкоупругом полом цилиндре // Прикладная механика. 1989. Т. 25, № 10. С. 19–23.
9. Анофрикова Н. С., Сергеева Н. В. Численный анализ дисперсионных уравнений в случае наследственно-упругого сплошного цилиндра // Современные проблемы механики сплошной среды : тр. XVII Междунар. конф. (14–17 окт. 2014 г.) : в 2 т. Ростов н/Д : Изд-во Южн. федер. ун-та, 2014. Т. 1. С. 44–48.
10. Ватulyян А. О., Юров В. О. О дисперсионных соотношениях для неоднородного волнового уравнения при наличии затухания // Изв. РАН. МТТ. 2016. № 5. С. 85–93.
11. Анофрикова Н. С., Коссович Л. Ю., Черненко В. П. Асимптотические методы построения решений в окрестностях фронтов волн в вязкоупругом стержне при больших значениях времени // Изв. Саратов. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2005. Т. 5, вып. 1. С. 82–88.
12. Анофрикова Н. С., Сергеева Н. В. Исследование гармонических волн в наследственно-упругом слое // Изв. Саратов. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2014. Т. 14, вып. 3. С. 321–328.
13. Вильде М. В., Сергеева Н. В. Асимптотический анализ влияния вязкоупругих свойств материала на дисперсию гармонических волн в сплошном цилиндре // Современные проблемы механики сплошной среды : тр. XVIII Междунар. конф. (7–10 нояб. 2016 г.) : в 2 т. Ростов н/Д : Изд-во Южн. федер. ун-та, 2014. Т. 1. С. 135–139.
14. Работнов Ю. Н. Элементы наследственной механики твердых тел. М. : Наука, 1977. 384 с.
15. Маньковский В. А., Сапунов В. Т. Номографические свойства дробно-экспоненциальной Э-функции при описании линейной вязкоупругости // Заводская лаборатория. Диагностика материалов. 2000. Т. 66, № 3. С. 47–50.
16. Бадалов Ф. Б., Абдукаримов А., Худаяров Б. А. Численное исследование влияния реологических параметров на характер колебаний наследственно-деформируемых систем // Вычислительные технологии. 2007. Т. 12, № 4. С. 17–26.



17. Ерохин С. В. Моделирование ползучести и релаксации с использованием производных дробного порядка // Интернет-вестн. ВолгГАСУ. 2015. Вып. 4(40). URL: <http://vestnik.vgasu.ru/attachments/8Erokhin.pdf> (дата обращения: 03.03.2017).
18. Гринченко В. Т., Мелешко В. В. Гармонические колебания и волны в упругих телах. Киев : Наук. думка, 1981. 284 с.
19. Найфе А. Х. Методы возмущений. М. : Мир, 1976. 454 с.
20. Кожанова Т. В., Коссович Л. Ю. Дисперсионные уравнения Релея – Лэмба. Саратов : Изд-во Сарат. ун-та, 1990. 21 с.
21. Лаврентьев М. А., Шабат Б. В. Методы теории функций комплексного переменного. М. : Наука, 1973. 736 с.
22. Работнов Ю. И. Механика деформируемого твердого тела : учеб. пособие для вузов. М. : Наука; Гл. ред. физ.-матем. лит., 1988. 712 с.
23. Rossikhin Yu. A., Shitikova M. V. Application of fractional calculus for dynamic problems of solid mechanics : Novel trends and recent results // Appl. Mech. Rev. 2010. Vol. 63, № 1, 010801. DOI: 10.1115/1.4000563.
24. Rossikhin Yu. A., Shitikova M. V. Comparative analysis of viscoelastic models involving fractional derivatives of different orders // Fractional Calculus and Applied Analysis. 2007. Vol. 10, iss. 2. P. 111–121.
25. Zhuravkov M. A., Romanova N.S. Review of methods and approaches for mechanical problem solutions based on fractional calculus // Math. Mech. Solids. 2016. Vol. 21, iss. 5. P. 595–620. DOI: 10.1177/1081286514532934.

Образец для цитирования:

Вильде М. В., Сергеева Н. В. Развитие асимптотических методов анализа дисперсионных соотношений для наследственно-упругого сплошного цилиндра // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2017. Т. 17, вып. 2. С. 183–195. DOI: 10.18500/1816-9791-2017-17-2-183-195.

Development of Asymptotic Methods for the Analysis of Dispersion Relations for a Viscoelastic Solid Cylinder

M. V. Wilde¹, N. V. Sergeeva²

¹Maria V. Wilde, ORCID: 0000-0001-8198-3368, Saratov State University, 83, Astrakhanskaya str., Saratov, Russia, 410012, mv_wilde@mail.ru

²Nadezhda V. Sergeeva, ORCID: 0000-0001-6125-7078, Saratov State University, 83, Astrakhanskaya str., Saratov, Russia, 410012, knickknack@bk.ru

Propagation of time-harmonic waves in a viscoelastic solid cylinder is considered. Vibrations of the cylinder are described by three-dimensional viscoelasticity equations in cylindrical coordinates. The stress-free surface boundary conditions are imposed. Viscoelastic properties are described by integral operators with a fractional-exponential kernel. For the case of a rational singularity parameter the method of asymptotic analysis of dispersion relations is proposed, which is based on the generalized power series expansion. For the axisymmetric waves the asymptotic expansions of the dispersion equation roots are obtained for low and high frequencies. The numerical results are presented to confirm the applicability of the proposed method.

Key words: dispersion equation, solid cylinder, viscoelasticity, asymptotics, singularity parameter, fractional parameter, fractional exponential function.



References

1. Ainola L. J., Nigul U. K. Stress waves in elastic plates and shells. *Trans. Estonian SSR Acad. Sci., Ser. of Phys.-Math. Tech. Sci.*, 1965, vol. 14, no. 1, pp. 3–63 (in Russian).
2. Kaplunov J. D., Kovalev V. A., Wilde M. V. Matching of asymptotic models in scattering of a plane acoustic waves by an elastic cylindrical shell. *Journal of Sound and Vibration*, 2003, vol. 264, iss. 3, pp. 639–655. DOI: 10.1016/S0022-460X(02)01212-9.
3. Wilde M. V., Kaplunov Yu. D., Kossovich L. Yu. *Kraevye i interfejsnye rezonansnye javlenija v uprugih telah* [Edge and interfacial resonance phenomena in elastic bodies]. Moscow, Fizmatlit, 2010. 280 p. (in Russian).
4. Rzhanicin A. R. *Teoriya polzuchesti* [Creep theory]. Moscow, Stroyizdat, 1968. 418 p. (in Russian).
5. Rabotnov Yu. N. *Polzuchest jelementov konstrukcij* [Creep of structural elements]. Moscow, Nauka, 1966. 752 p. (in Russian).
6. Chervinko O. P., Senchenkov I. K. Garmonicheskie volny v sloe i beskonechnom cilindre [Harmonic waves in a layer and in an infinite cylinder]. *Prikladnaya mekhanika* [Applied Mechanics], 1986, vol. 22, no. 12, pp. 31–37 (in Russian).
7. Tanaka K., Kon-No A. Harmonic Waves in Lenear Viscoelastic Plate. *Bull. JSME*, 1980, vol. 23, no. 176, pp. 185–193. DOI: 10.1299/jsme1958.23.185.
8. Voropaev G. A., Popkov V. I. Rasprostranenie osesimmetrichnyh voln v vjazkouprugom polom cilindre [Propagation of axisymmetric waves in a viscoelastic hollow cylinder]. *Prikladnaja mehanika* [Applied Mechanics], 1989, vol. 25, no. 10, pp. 19–23 (in Russian).
9. Anofrikova N. S., Sergeeva N. V. Chislennyj analiz dispersionnyh uravnenij v sluchae nasledstvenno-uprugogo sploshnogo cilindra [Numerical analysis of dispersion equations for viscoelastic solid cylinder]. *Sovremennye problemy mehaniki sploshnoj sredy: trudy XVII Mezhdunarodnoj konferencii* [Proc. XVII Intern. Conf. „Modern Problems of continuum mechanics“]. Rostov-on-Don, South. Fed. Univ. Press, 2014, vol. 1, pp. 44–48 (in Russian).
10. Vatul'yan A. O., Yurlov V. O. On the dispersion relations for an inhomogeneous waveguide with attenuation. *Mech. Solids*, 2016, iss. 5, pp. 576–582. DOI: 10.3103/S0025654416050101.
11. Anofrikova N. S., Kossovich L. Yu., Chernenko V. P. Asymptotic methods for constructing solutions in the neighborhood of wave fronts in a viscoelastic rod for large values of time. *Izv. Saratov Univ. (N.S.), Ser. Math. Mech. Inform.*, 2005, vol. 5, iss. 1, pp. 82–88 (in Russian).
12. Anofrikova N. S., Sergeeva N. V. Investigation of harmonic waves in the viscoelastic layer. *Izv. Saratov Univ. (N.S.), Ser. Math. Mech. Inform.*, 2014, vol. 14, iss. 3, pp. 321–328 (in Russian).
13. Wilde M. V., Sergeeva N. V. Asymptotic analysis of the viscoelastic material properties effect on the dispersion of harmonic waves in a solid cylinder. *Sovremennye problemy mehaniki sploshnoj sredy: trudy XVIII Mezhdunarodnoj konferencii* [Proc. XVIII Intern. Conf. „Modern Problems of continuum mechanics“]. Rostov-on-Don, South. Fed. Univ. Press, 2016, vol. 1, pp. 135–139 (in Russian).
14. Rabotnov Yu. N. *Elements of Hereditary Solid Mechanics*. Moscow, Nauka, 1977. 384 p. (Engl. transl. by Mir Publ., Moscow, 1980.)
15. Man'kovskii V. A., Sapunov V. T. Nomographic properties of the exponential fractional e-function used for the description of linear viscoelasticity. *Industrial laboratory*, 2000, vol. 66, iss. 3, pp. 188–191.



16. Badalov F. B., Abdukarimov A., Khudayarov B. A. A numerical investigation of the influence of rheological parameters on the character of vibrations in heredity-defortable systems. *Computational Technologies*, 2007, vol. 12, no. 4, pp. 17–26 (in Russian).
17. Erokhin S. V. Modelling of creep and relaxation with the use of fractional derivatives. *Internet-Vestnik VolgGASU*, 2015, iss. 4(40). Available at: <http://vestnik.vgasu.ru/attachments/8Erokhin.pdf> (accessed 03, March, 2017) (in Russian).
18. Grinchenko V. T., Meleshko V. V. *Garmonicheskie kolebaniya i volny v uprugih telah* [Harmonic oscillations and waves in elastic bodies]. Kiev, Nauk. Dumka, 1981. 284 p. (in Russian).
19. Nayfe A. H. *Metody vozmushhenij* [Perturbation methods]. Moscow, Mir, 1976. 454 p. (in Russian).
20. Kozhanova T. V., Kossovich L. Yu. *Dispersionnyye uravneniya Releya – Lemba* [Rayleigh – Lamb dispersion equations]. Saratov, Saratov. Univ. Press, 1990. 21 p. (in Russian).
21. Lavrentev M. A., Shabat B. V. *Metody teorii funktsij kompleksnogo peremennogo* [Methods of the complex variable functions theory]. Moscow, Nauka, 1973. 736 p. (in Russian).
22. Rabotnov Yu. I. *Mehanika deformiruемого tverdogo tela* : Ucheb. posobie dlja vuzov [Mechanics of deformable solids]. Moscow, Nauka, 1988. 712 p. (in Russian).
23. Rossikhin Yu. A., Shitikova M.V. Application of fractional calculus for dynamic problems of solid mechanics: Novel trends and recent results. *Applied Mechanics Reviews*, 2010, vol. 63, no. 1, 010801. DOI: 10.1115/1.4000563.
24. Rossikhin Yu. A., Shitikova M.V. Comparative analysis of viscoelastic models involving fractional derivatives of different orders. *Fractional Calculus and Applied Analysis*, 2007, vol. 10, iss. 2, pp. 111–121.
25. Zhuravkov M. A., Romanova N. S. Review of methods and approaches for mechanical problem solutions based on fractional calculus. *Math. Mech. Solids*, 2016, vol. 21, iss. 5, pp. 595–620. DOI: 10.1177/1081286514532934.

Cite this article as:

Wilde M. V., Sergeeva N. V. Development of Asymptotic Methods for the Analysis of Dispersion Relations for a Viscoelastic Solid Cylinder. *Izv. Saratov Univ. (N. S.), Ser. Math. Mech. Inform.*, 2017, vol. 17, iss. 2, pp. 183–195 (in Russian). DOI: 10.18500/1816-9791-2017-17-2-183-195.
