

МЕХАНИКА

УДК 517.957; 512.81

СИММЕТРИЙНЫЙ АНАЛИЗ И НЕКОТОРЫЕ НОВЫЕ ТОЧНЫЕ РЕШЕНИЯ МОДИФИЦИРОВАННОГО УРАВНЕНИЯ КОРТЕВЕГА – ДЕ ФРИЗА С ПЕРЕМЕННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ, ВОЗНИКАЮЩЕГО В АРТЕРИАЛЬНОЙ МЕХАНИКЕ

М.С. Абдель Латиф

Астраханский государственный университет,
кафедра прикладной математики и информатики
E-mail: m_gazia@hotmail.com

В статье рассматривается модифицированное уравнение Кортевега – де Фриза с переменными коэффициентами. С использованием классического метода анализа симметрии получены симметрии для этого уравнения. Чтобы решить сокращенное ОДУ используется обобщенный метод разложения по эллиптическим функциям Якоби. Получены новые точные решения для рассматриваемого уравнения.

Ключевые слова: модифицированное уравнение Кортевега – де Фриза с переменными коэффициентами, классическая симметрия, обобщенный метод разложения по эллиптическим функциям Якоби, точные решения.

Lie Symmetry Analysis and Some New Exact Solutions for a Variable Coefficient Modified Kortweg – De Vries Equation Arising in Arterial Mechanics

M.S. Abdel Latif

Astrakhan State University,
Department of Applied Mathematics and Informatics
E-mail: m_gazia@hotmail.com

In this paper, a variable-coefficient modified Korteweg – de Vries equation is considered. By using the classical symmetry analysis method symmetries for this equation are obtained. Then, the generalized Jacobi elliptic function expansion method is used to solve the reduced ODE. Some new exact solutions for the considered PDE are obtained.

Key words: variable-coefficient modified Korteweg – de Vries equation, Classical Symmetries, Generalized Jacobi elliptic function expansion method, Exact solutions.

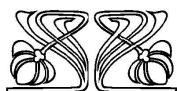
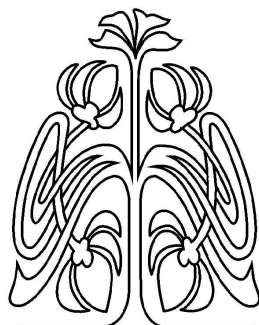
ВВЕДЕНИЕ

Исследование точных решений нелинейного уравнения эволюции играет важную роль в изучении нелинейных физических явлений. Волновые явления наблюдаются в физике, механике, биологии и т. д. Поиск этих решений имеет большое значение для понимания многих физических явлений, поскольку они могут дать более глубокое представление о физических аспектах проблемы.

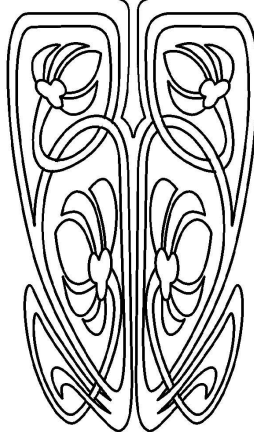
Настоящая работа посвящена изучению решения модифицированного уравнения Кортевега – де Фриза с переменными коэффициентами, которое записывается в виде

$$u_t + \mu_2 u^2 u_x + \mu_3 u_{xxx} + h(t)u_x = 0, \quad (1)$$

где μ_2 и μ_3 — постоянные, и $h(t)$ является функцией от t .



НАУЧНЫЙ
ОТДЕЛ





В артериальной механике были рассмотрены некоторые особые случаи уравнения (1), а именно:

1) в работах [1, 2] было рассмотрено уравнение МКДВ с переменными коэффициентами:

$$u_t + \mu_2 u^2 u_x + \mu_3 u_{xxx} + h(t)u_x = 0;$$

2) в работах [3–5] было рассмотрено уравнение МКДВ

$$u_t + \mu_2 u^2 u_x + \mu_3 u_{xxx} = 0.$$

Другие особые случаи уравнения (1) были изучены в работах [6–8]. Оставшаяся часть настоящей работы организована следующим образом. В разд. 1. к уравнению (1) применяется классический метод анализа симметрии Ли. В разд. 2. даны математические основы обобщенного метода разложения по эллиптическим функциям Якоби. В разд. 3. представлены некоторые новые точные решения уравнения (1). Применение полученных решений в артериальной механике представлено в разд. 4.

1. КЛАССИЧЕСКАЯ СИММЕТРИЯ

Чтобы применить классический анализ симметрии Ли [9, 10] для уравнения (1), рассмотрим однопараметрическую группу Ли инфинитезимальных преобразований в пространстве (x, t, u) , которая задается формулами

$$x^* = x + \epsilon \xi(x, t, u) + O(\epsilon^2), \quad t^* = t + \epsilon \tau(x, t, u) + O(\epsilon^2), \quad u^* = u + \epsilon \eta(x, t, u) + O(\epsilon^2),$$

где ϵ — параметр группы. Требуем, чтобы множество решений уравнения (1) было инвариантно относительно этих преобразований. Это требование приводит к переопределенной системе линейных уравнений для инфинитезимальных элементов $\xi(x, t, u)$, $\tau(x, t, u)$ и $\eta(x, t, u)$. Соответствующая алгебра Ли инфинитезимальных симметрий есть набор векторных полей вида

$$v = \xi(x, t, u) \frac{\partial}{\partial x} + \tau(x, t, u) \frac{\partial}{\partial t} + \eta(x, t, u) \frac{\partial}{\partial u}. \quad (2)$$

Инвариантность уравнения (1) относительно точечных преобразований группы Ли с инфинитезимальным генератором (2) приводит к переопределенной системе линейных уравнений. Решая эту систему, получим

$$\tau = 6c_1 \mu_2 t + c_2, \quad \xi = c_1 \left(2\mu_2 x + 6\mu_2 t h(t) - 2\mu_2 \int h(t) dt \right) + c_2 h(t) + c_3, \quad \eta = -2c_1 \mu_2 u,$$

где c_1 , c_2 и c_3 — произвольные константы. Соответствующие инфинитезимальные генераторы определяются по формулам

$$v_1 = \left(2\mu_2 x + 6\mu_2 t h(t) - 2\mu_2 \int h(t) dt \right) \frac{\partial}{\partial x} + 6\mu_2 t \frac{\partial}{\partial t} - 2\mu_2 u \frac{\partial}{\partial u}, \quad v_2 = \frac{\partial}{\partial x}, \quad v_3 = h(t) \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial t}.$$

При рассмотрении инфинитезимального генератора v_1 получим условие инвариантности поверхности:

$$\left(2\mu_2 x + 6\mu_2 t h(t) - 2\mu_2 \int h(t) dt \right) \frac{\partial u}{\partial x} + 6\mu_2 t \frac{\partial u}{\partial t} = -2\mu_2 u,$$

при решении которого получаем преобразование подобия

$$u = t^{-\frac{1}{3}} f(\zeta), \quad \zeta = xt^{-\frac{1}{3}} - t^{-\frac{1}{3}} \int h(t) dt. \quad (3)$$

Подставляя формулу (3) в уравнение (1), получим следующее обыкновенное дифференциальное уравнение:

$$-f - \zeta f' + 3\mu_2 f^2 f' + 3\mu_3 f''' = 0. \quad (4)$$

В общем случае точное решение уравнения (4) не может быть получено с помощью элементарных функций. Приближенное решение этого уравнения было получено в работе [11].



При рассмотрении инфинитезимального генератора $v_2 + \alpha v_3$ параметр α является постоянной. Получим условие инвариантности поверхности

$$(h(t) + \alpha) \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial t} = 0,$$

при решении которого получаем преобразование подобия

$$u = f(\zeta), \quad \zeta = x - \int h(t) dt - \alpha t. \quad (5)$$

Подставляя формулу (5) в уравнении (1), получим следующее обыкновенное дифференциальное уравнение:

$$-\alpha f' + \mu_2 f^2 f' + \mu_3 f''' = 0. \quad (6)$$

2. ОБОБЩЕННЫЙ МЕТОД РАЗЛОЖЕНИЯ ПО ЭЛЛИПТИЧЕСКИМ ФУНКЦИЯМ ЯКОБИ

Для решения уравнения (6) будем использовать обобщенный метод разложения по эллиптическим функциям Якоби [12–14]. Предполагается, что (6) имеет решение вида

$$u = a_0 + \sum_{i=-n}^n a_i \phi^i,$$

где a_i — константы, которые будут определены позднее, и ϕ удовлетворяет следующему эллиптическому уравнению:

$$\phi'^2 = r + p\phi^2 + q\phi^4. \quad (7)$$

Кроме того, можем получить

$$\phi'' = p\phi + 2q\phi^3, \quad (8)$$

где штрих обозначает производную по ζ и r, p, q — константы. Решения уравнения (7) представлены в разд. 5 [14]. Балансировка слагаемого со старшей производной f''' с нелинейным членом $f^2 f'$ в уравнении (6) дает $n = 1$, откуда получаем

$$u = a_0 + a_1 \phi + a_{-1} \phi^{-1}. \quad (9)$$

Подставляя уравнения (9), (7), (8) в уравнение (6), группируя все слагаемые с одинаковыми степенями и приравнявая к нулю коэффициенты этих слагаемых, получаем систему нелинейных алгебраических уравнений для a_0, a_1 и a_{-1} . Решая эту систему, находим три множества решений.

Первое множество:

$$a_0 = 0, \quad a_1 = 0, \quad a_{-1} = \pm \sqrt{\frac{-6r\mu_3}{\mu_2}}, \quad \alpha = p\mu_3. \quad (10)$$

Второе множество:

$$a_0 = 0, \quad a_1 = \pm \sqrt{\frac{-6q\mu_3}{\mu_2}}, \quad a_{-1} = 0, \quad \alpha = p\mu_3. \quad (11)$$

Третье множество:

$$a_0 = 0, \quad a_1 = \pm \sqrt{\frac{-6q\mu_3}{\mu_2}}, \quad a_{-1} = \pm \sqrt{\frac{-6r\mu_3}{\mu_2}}, \quad \alpha = -\mu_3(6\sqrt{rq} - p). \quad (12)$$

3. ТОЧНЫЕ РЕШЕНИЯ

В этом разделе мы дадим некоторые точные решения уравнения (1). Подставляя (10), (11) и (12) в уравнение (9) и используя таблицу из разд. 5, получим множество решений уравнения (1). Из-за большого числа решений, приведенных в разд. 5, будем рассматривать только некоторые из них.



Случай 1. Рассматривая первое множество (10) и выбирая $r = -k^2$, $p = 2k^2 - 1$, $q = 1 - k^2$, получим решение уравнения (7) в виде $\phi(\zeta) = \text{nc}(\zeta)$. Тогда периодическое решение имеет вид

$$u_1 = \pm \sqrt{\frac{6\mu_3}{\mu_2}} k^2 \text{cn} \left(x - \int h(t) dt - \mu_3(k^2 - k'^2)t \right). \quad (13)$$

В случае, когда $k \rightarrow 1$, мы можем получить следующее решение в виде уединенной волны

$$u_2 = \pm \sqrt{\frac{6\mu_3}{\mu_2}} \text{sech} \left(x - \int h(t) dt - \mu_3 t \right). \quad (14)$$

Случай 2. Рассматривая второе множество (11) и выбирая $r = 1$, $p = -(1 + k^2)$ и $q = k^2$, получим решение уравнения (7) в виде $\phi(\zeta) = \text{sn}(\zeta)$ и периодическое решение в виде

$$u_3 = \pm \sqrt{\frac{-6\mu_3}{\mu_2}} k^2 \text{sn} \left(x - \int h(t) dt + \mu_3(1 + k^2)t \right). \quad (15)$$

В случае, когда $k \rightarrow 1$, мы можем получить следующее решение в виде кинка (антикинка):

$$u_4 = \pm \sqrt{\frac{-6\mu_3}{\mu_2}} \tanh \left(x - \int h(t) dt + 2\mu_3 t \right). \quad (16)$$

Случай 3. Рассматривая третье множество (12) и выбирая $r = 1$, $p = -(1 + k^2)$, $q = k^2$, получаем решение уравнения (7) в виде $\phi(\zeta) = \text{sn}(\zeta)$ и периодическое решение в виде

$$u_5 = \pm \sqrt{\frac{-6\mu_3}{\mu_2}} \text{ns} \left(x - \int h(t) dt - \alpha t \right) \pm \sqrt{\frac{-6\mu_3}{\mu_2}} k^2 \text{sn} \left(x - \int h(t) dt - \alpha t \right), \quad (17)$$

где $\alpha = -\mu_3(\pm 6\sqrt{k^2} + 1 + k^2)$.

В случае, когда $k \rightarrow 1$, мы можем получить следующее солитоноподобное решение:

$$u_6 = \pm \sqrt{\frac{-6\mu_3}{\mu_2}} \tanh \left(x - \int h(t) dt - \alpha t \right) \pm \sqrt{\frac{-6\mu_3}{\mu_2}} \coth \left(x - \int h(t) dt - \alpha t \right), \quad (18)$$

где $\alpha = -\mu_2\mu_3(\pm 6 + 2)$.

Из выражения (14) мы видим, что траектория уединенной волны является кривой в плоскости (x, t) . Уравнение траектории может быть задано формулой

$$x = x_0 + \mu_3 t + \int h(t) dt, \quad (19)$$

где x_0 — постоянная. Скорость распространения задается формулой

$$\nu = \frac{dt}{dx} = (\mu_3 + h(t))^{-1}. \quad (20)$$

Ясно, что скорость распространения зависит от параметра трубки μ_3 и формы стеноза $h(t)$.

4. ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ

С использованием классического метода анализа симметрии Ли мы получили сокращенный вариант исходного нелинейного уравнения в частных производных в виде нелинейного ОДУ. Затем мы использовали обобщенный метод разложения по эллиптическим функциям Якоби, чтобы получить большое количество решений для этого нелинейного ОДУ. Учитывая первое множество (10) и второе множество (11), мы можем получить решения для исходного нелинейного уравнения (1), как, например, (13), (14), (15) и (16). Эти решения с $h(t) = 0$ можно найти в [6–8]. Учитывая третье множество (12), мы можем получить решения для исходного нелинейного уравнения (1), как, например, (17) и (18), которые, насколько нам известно, являются новыми решениями уравнения (1) и не были опубликованы до сих пор.



В артериальной механике артерия рассматривается как тонкостенная предварительно напряженная упругая трубка с переменным радиусом (или со стенозом) и кровь как идеальная жидкость [1, 2]. Определяющее уравнение, которое моделирует слабо нелинейные волны в таких наполненных жидкостью упругих трубках, — это уравнение мКдВ с переменным коэффициентом (1). В уравнении (1) μ_2, μ_3 — некоторые константы, характеризующие свойства материала трубки:

$$\mu_2 = \frac{3}{2} \left(\frac{\beta_3}{\beta_1} - \frac{4}{\lambda_\theta^2} \right), \quad \mu_3 = \left(\frac{m}{4\lambda_z} - \frac{\alpha_0}{2\beta_1} \right), \quad m = \frac{\rho_0 H}{\rho_f R_0}, \quad \alpha_0 = \frac{1}{\lambda_\theta} \left(\lambda_z - \frac{1}{\lambda_\theta^2 \lambda_z^3} \right) F,$$

$$F = \exp \left[\alpha \left(\lambda_\theta^2 + \lambda_z^2 + \frac{1}{\lambda_\theta^2 \lambda_z^2 - 3} \right) \right], \quad \beta_1 = \left[\frac{4}{\lambda_\theta^5 \lambda_z^3} + \frac{2\alpha}{\lambda_\theta \lambda_z} \left(\lambda_\theta - \frac{1}{\lambda_\theta^3 \lambda_z^2} \right)^2 \right] F,$$

$$\beta_3 = \left[\frac{20}{\lambda_\theta^7 \lambda_z^3} + \left(\frac{36\alpha}{\lambda_\theta^9 \lambda_z^5} - \frac{20\alpha}{\lambda_\theta^5 \lambda_z^3} \right) + \left(\frac{2\alpha^2}{\lambda_\theta \lambda_z} + \frac{14\alpha^2}{\lambda_\theta^5 \lambda_z^3} \right) \left(\lambda_\theta - \frac{1}{\lambda_\theta^3 \lambda_z^2} \right)^2 + \frac{4\alpha^3}{3\lambda_\theta \lambda_z} \left(\lambda_\theta - \frac{1}{\lambda_\theta^3 \lambda_z^2} \right)^4 \right] F,$$

λ_z — коэффициент растяжения в аксиальном направлении, λ_θ — коэффициент растяжения в радиальном направлении, ρ_0 — плотность материала трубки, ρ_f — плотность жидкости, H — начальная толщина трубки, R_0 — начальный радиус трубки, α — постоянная материала трубки, t — отмасштабированная координата вдоль оси сосуда после статической деформации, характеризующая осесимметричный стеноз на поверхности артериальной стенки, x — переменная, зависящая от времени и координаты вдоль оси сосуда, $h(t)$ — форма стеноза, u характеризует усредненную осевую скорость жидкости. Предполагая (вслед за работами [15, 16]), что кровоток в трубке и геометрия стеноза симметричны, запишем

$$h(t) = \begin{cases} d_0(1 - \eta(b^{n-1}(t-a) - (t-a)^n)), & a \leq t < a+b, \\ d_0, & \text{в противном случае,} \end{cases} \quad (21)$$

где $h(t)$ — ширина сосуда со стенозом, d — ширина сосуда без стеноза, b — длина стеноза, n (≥ 2) — параметр, определяющий форму стеноза, a указывает местонахождение стеноза в трубке длины L (рис. 1).

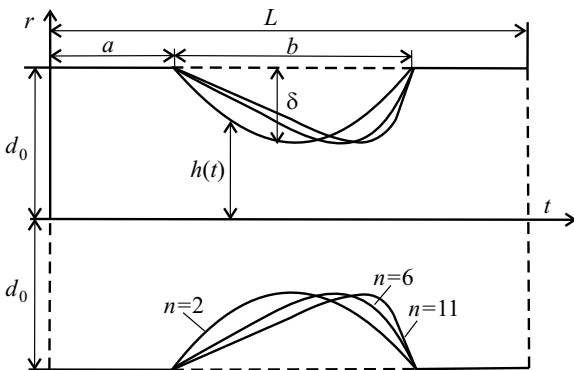


Рис. 1. Геометрия трубки со стенозом [16]

Параметр η задается формулой

$$\eta = \frac{\delta}{d_0 b^n} \frac{n^{n-1}}{(n-1)}, \quad (22)$$

где δ обозначает максимальную высоту стеноза, расположенную в точке с координатой

$$x = a + \frac{b}{n^{\frac{1}{n-1}}}.$$

Из выражения (14) ясно, что амплитуда уединенной волны зависит от параметров трубки μ_2, μ_3 , (рис. 2).

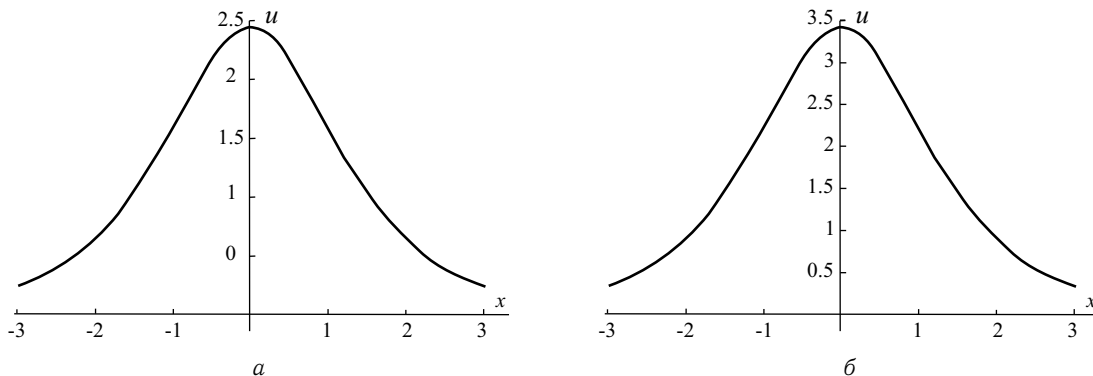


Рис. 2. Изменение профиля уединенной волны: $t = 0, \mu_2 = 1, \mu_3 = 1$ (а); $t = 0, \mu_2 = 1, \mu_3 = 2$ (б)



Из выражения (20) ясно, что скорость распространения зависит от параметра трубки μ_3 и формы стеноза $h(t)$. Изменение скорости распространения с различными формами стеноза, которые задаются уравнением (21), приведено на рис. 3.

Из рис. 3 видно, что скорость волны достигает максимального значения на пике стеноза. Скорость волны является постоянной вне зоны стеноза.

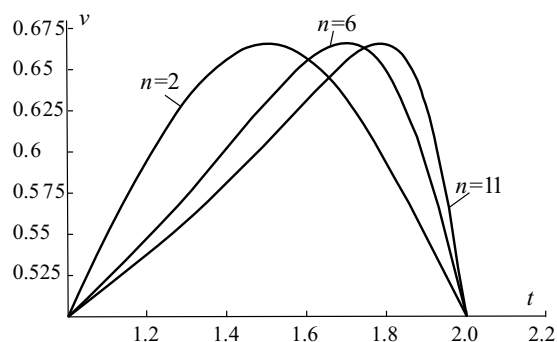


Рис. 3. Изменение скорости распространения с различными формами стеноза

5. НЕКОТОРЫЕ ЧАСТНЫЕ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ (9)

В таблице приводятся некоторые частные решения уравнения (9), определяемые формулами (10)–(12).

r	p	q	ϕ	$k = 0$	$k = 1$
1	$-(1 + k^2)$	k^2	$\text{sn}(\zeta)$	$\sin(\zeta)$	$\tanh(\zeta)$
$1 - k^2$	$2k^2 - 1$	$-k^2$	$\text{cn}(\zeta)$	$\cos(\zeta)$	$\text{sech}(\zeta)$
$k^2 - 1$	$2 - k^2$	-1	$\text{dn}(\zeta)$	1	$\text{sech}(\zeta)$
k^2	k^2	1	$\text{ns}(\zeta)$	$\csc(\zeta)$	$\coth(\zeta)$
$-k^2$	$2k^2 - 1$	$1 - k^2$	$\text{nc}(\zeta)$	$\sec(\zeta)$	$\cosh(\zeta)$
-1	$2 - k^2$	$k^2 - 1$	$\text{nd}(\zeta)$	1	$\cosh(\zeta)$
1	$2 - k^2$	$1 - k^2$	$\text{sc}(\zeta)$	$\tan(\zeta)$	$\sinh(\zeta)$
1	$2k^2 - 1$	$-k^2(1 - k^2)$	$\text{sd}(\zeta)$	$\cot(\zeta)$	$\text{cosech}(\zeta)$
$1 - k^2$	$2 - k^2$	1	$\text{cs}(\zeta)$	$\cos(\zeta)$	1
$-k^2(1 - k^2)$	$2k^2 - 1$	1	$\text{ds}(\zeta)$	$\sec(\zeta)$	1

Эллиптический модуль k изменяться в пределах от 0 до 1. При $k \rightarrow 0$ эллиптические функции Якоби превратятся в тригонометрические функции, и решения в виде периодических бегущих волн будут периодическими тригонометрическими решениями. При $k \rightarrow 1$, эллиптические функции Якоби превратятся в гиперболические функции, и решения в виде периодических бегущих волн будут решениями в виде уединенных волн.

Выражаю свою благодарность Ю.Ю. Тарасевичу, А.И. Лобанову и А.Г. Кушнеру за ценные дискуссии по данной работе.

Библиографический список

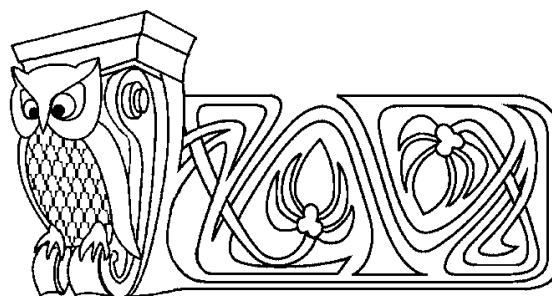
1. Demiray H. Variable coefficient modified KdV equation in fluid-filled elastic tubes with stenosis: Solitary waves // Chaos Soliton Fract. 2009. Vol. 42, № 1. P. 358–364.
2. Demiray H. Waves in fluid-filled elastic tubes with a stenosis: Variable coefficients KdV equations // J. Comput. Appl. Math. 2007. Vol. 202. P. 328–338.
3. Demiray H. On the existence of some evolution equations in fluid-filled elastic tubes and their progressive wave solutions // Intern. J. Eng. Sci. 2004. Vol. 42. P. 1693–1706.
4. Кудряшов Н.А., Синельщиков Д.И., Чернявский И.Л. Нелинейные эволюционные уравнения для описания возмущений в вязко-эластичной трубке // Нелинейная динамика. 2008. Т. 4, № 1. С. 69–86.
5. Demiray H. On some nonlinear waves in fluid-filled viscoelastic tubes: weakly dispersive case // Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation. 2005. Vol. 10. P. 425–440.
6. Wazwaz A. The extended tanh method for abundant solitary wave solutions of nonlinear wave equations // Appl. Math. Comput. 2007. Vol. 187. P. 1131–1142.
7. Wazwaz A. New sets of solitary wave solutions to the KdV, mKdV, and the generalized KdV equations // Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation. 2008. Vol. 13. P. 331–339.
8. Yin-Long Z., Yin-Ping L., Zhi-Bin L. A connection between the $(\frac{G'}{G})$ -expansion method and the truncated Painlevé expansion method and its application to the mKdV equation // Chin. Phys. B. 2010. Vol. 19. P. 1395–1404.



9. *Olver P.J.* Applications of Lie Groups to Differential Equations. N.Y.: Springer-Verlag, 1985.
10. *Bluman G.W., Kumei S.* Symmetries and Differential Equations. N.Y.: Springer-Verlag, 1989.
11. *Liu H., Li J.* Lie symmetry analysis and exact solutions for the extended mKdV equation // Acta. Appl. Math. 2010. Vol. 109. P. 1107–1119.
12. *Zhao X., Zhi H., Zhang H.* Improved Jacobi-function method with symbolic computation to construct new double-periodic solutions for the generalized Ito system // Chaos Soliton Fract. 2006. Vol. 28. P. 112–126.
13. *El-Wakil S.A., Madkour M.A., Abdou M.A.* New traveling wave solutions for nonlinear evolution equations // Phys. Lett. A. 2007. Vol. 365. P. 429–438.
14. *Zhong W., Belic M R., Lu Y., Huang T.* Traveling and solitary wave solutions to the one-dimensional Gross-Pitaevskii equation // Phys. Rev. E. 2010. Vol. 81, 016605.
15. *Haldar K.* Effects of the shape of stenosis on the resistance to blood flow through an artery // Bul. Math. Biol. 1985. Vol. 47, № 4. P. 545–550.
16. *Mekheimer K.S., El Kot M.A.* Influence of magnetic field and hall currents on blood flow through a stenotic artery // Appl. Math. Mech. 2008. Vol. 29, № 8. P. 1093–1104.

УДК 531.381

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ СЛОЯ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ С УПРУГИМИ СТЕНКАМИ КАНАЛА, УСТАНОВЛЕННОГО НА ВИБРИРУЮЩЕМ ОСНОВАНИИ



Р.В. Агеев^{1*}, Т.В. Быкова^{1**}, Ю.Н. Кондратова²

¹Саратовский государственный технический университет,

*кафедра прикладной математики,

**кафедра теоретической механики;

²Саратовский государственный университет,

кафедра математической кибернетики и компьютерных наук

E-mail: r255@mail.ru, tbykova69@mail.ru,

KondratovaUN@info.sgu.ru

Рассмотрена задача математического моделирования динамических процессов в гидроопоре с упругим статором. Найдено решение динамической задачи гидроупругости гидроопоры, и построены ее амплитудные и фазовые частотные характеристики.

Ключевые слова: гидроупругость, вязкая жидкость, пластина, колебания.

Mathematical Modeling of Interaction Between Layer of Viscous Liquid and Elastic Walls of Channel, Which Was Installed on Vibration Foundation

R.V. Ageev^{1*}, T.V. Bykova^{1**}, J.N. Kondratova²

¹Saratov State Technical University,

*Chair of Applied Mathematics,

**Chair of Theoretical Mechanics;

²Saratov State University,

Chair of Mathematical Cybernetics and Computer Science

E-mail: r255@mail.ru, tbykova69@mail.ru,

KondratovaUN@info.sgu.ru

The article solves the problem of mathematical modeling dynamic processes in hydrosupport with elastic stator. The dynamic problem of hydroelasticity is found and amplitude and phase frequency characteristics of hydrosupport was built.

Key words: hydroelasticity, viscous fluid, plate, vacillating.

Разрабатывая математические модели для исследования динамических процессов в гидроопорах различных изделий, необходимо учитывать взаимодействие слоя жидкости с упругими элементами конструкций опор, образующих щелевой канал, в котором она находится. С данной проблемой связано развитие теории гидродинамической смазки [1], начало которой положено трудами Н.П. Петрова и О. Рейнольдса. Первоначально в рамках указанной теории рассматривались задачи об установившемся движении тонкого слоя жидкости (в канале, образованном твердыми стенками) без учета ее инерции и с удержанием части слагаемых уравнений Навье – Стокса, соответствующих силам вязкого трения. В последующих работах проводился учет конвективных членов инерции [2] и локального члена инерции [3] методом осреднения по толщине слоя. В работе [4] найдено приближенное аналитическое решение плоской задачи с учетом инерции движения тонкого слоя жидкости и упругой податливости одной из стенок канала, имеющей симметричные ребра жесткости. В предлагаемой работе исследуется плоская нестационарная задача с учетом влияния движения упругих стенок канала при наличии переносного гармонически изменяющегося по времени виброускорения и заданного гармонически пульсирующего перепада давления.