ИНФОРМАТИКА

УДК 519.17

О БЕСКОНТУРНЫХ ТОЧНЫХ РАСШИРЕНИЯХ

М.Б. Абросимов, А.А. Долгов

Саратовский государственный университет,
кафедра теоретических основ компьютерной безопасности и криптографии
E-mail: mic@rambler.ru, Dolgov.A.A@gmail.com

Точные расширения неориентированных графов достаточно хорошо исследованы, а о точных расширениях орграфов известно значительно меньше. В данной работе доказывается, что только бесконтурный или сильно связный граф может быть точным 1-расширением орграфа. Более того, бесконтурным точным 1-расширением может быть только транзитивный турнир.

Ключевые слова: бесконтурный граф, транзитивный турнир, точное расширение.

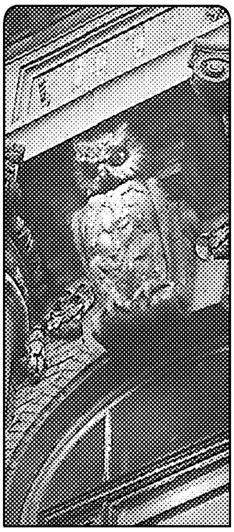
On Directed Acyclic Exact Extensions

M.B. Abrosimov, A.A. Dolgov

Saratov State University,
Chair of Theoretical Basis of Computer Security and Cryptography
E-mail: Dolgov.A.A@gmail.com

Exact extensions of undirected graphs are well studied, but exact extensions of directed graphs are much less known. We prove that only directed acyclic graph or strongly connected graph can be an exact extension. Furthermore, only transitive tournament can be directed acyclic exact extension.

Key words: directed acyclic graph, transitive tournament, exact extension.



НАУЧНЫЙ ОТДЕЛ

ВВЕДЕНИЕ

Граф G^* называется *точным (вершинным) k-расширением* графа G, если G изоморфен каждому подграфу графа G^*, получающемуся из G^* путем удаления любых его k вершин и всех связанных с ними дуг (ребер). Этот термин впервые был введен Харари и Хейзом в 1996 году [1], точное k-расширение является частным случаем минимального вершинного k-расширения. Далеко не каждый граф имеет точное 1-расширение и еще меньше графов, которые имеют точное k-расширение при $k > 1$.

Для неориентированных графов задача описания точных расширений была решена в работе [2]. Было установлено, что среди неориентированных графов только полный и вполне несвязный графы имеют точное k-расширение при любом k. Среди остальных графов выделяются графы, имеющие вершины со степенями b и $b-1$, причем число вершин степени $b-1$ в точности равно b. Такие графы могут иметь точное 1-расширение, но не имеют точного k-расширения ни при каком $k > 1$. Кроме того, было показано, что точными 1-расширениями неориентированных графов являются вершинно-симметрические графы и только они.

Для ориентированных графов задача в общем не решена. Известно, что любой вершинно-симметрический орграф является точным 1-расширением подходящего орграфа, однако не только вершинно-

-симметрические орграфы могут быть точными расширениями. Более того, оказалось, что среди орграфов встречаются и асимметричные точные k-расширения. Так, например, в работе [3] доказывается, что точным k-расширением транзитивного турнира T_n при $n > 2$ является транзитивный турнир T_{n+k}. В данной работе будет предложено прямое доказательство этого утверждения без использования понятия минимального вершинного k-расширения.

Дадим основные определения преимущественно по работе [4].

Ориентированным графом (*орграфом*) G называется пара (V, α), где V — конечное непустое множество (*множество вершин*), а α – отношение в множестве V (*отношение смежности*). *Неориентированным графом* называется орграф с антирефлексивным и симметричным отношением смежности. Элементы множества α называются *дугами* для орграфа и *ребрами* для неориентированного графа. Орграф $G = (V, \alpha)$ называется *направленным графом*, или *диграфом*, если его отношение α антисимметрично, то есть нет встречных дуг, за исключением, быть может, петель. Полный диграф без петель называется *турниром*. Таким образом, у турнира между любыми двумя вершинами существует в точности одна дуга. Турнир с транзитивным отношением смежности называется *транзитивным турниром*.

Путем в графе называется чередующаяся последовательность вершин и дуг вида $v_1(v_1, v_2)v_2$ $(v_2, v_3)v_3 \ldots v_{n-1}(v_{n-1}, v_n)v_n$.

Вершина u *достижима* из вершины v, если существует путь из v в u.

Орграф называется (слабо) *связным*, если его симметризация, т.е. неориентированный граф, получающийся заменой дуг ребрами, является связным.

Орграф называется *сильно связным*, или *сильным*, если любые его две вершины взаимно достижимы. Классы отношения достижимости для неориентированных графов называются *компонентами связности*. Классы отношения взаимной достижимости для орграфов называются *сильными компонентами*, или *компонентами сильной связности*.

Два графа G и H *изоморфны*, если между множествами их вершин существует взаимно однозначное соответствие, сохраняющее отношение смежности. Изоморфизм графа на самого себя называется *автоморфизмом*. Граф, имеющий только тождественный автоморфизм, называется *асимметричным*. Две вершины графа G называются *подобными*, если существует автоморфизм, при котором образом одной вершины является другая вершина. Граф, все вершины которого подобны, называется *вершинно-симметрическим*.

1. ТОЧНЫЕ РАСШИРЕНИЯ ОРГРАФОВ

Рассмотрим произвольный орграф G. Предположим, что он состоит из нескольких компонент связности $G = G_1 \cup G_2 \cup \ldots \cup G_k$. Предположим, что среди компонент G_i есть пара неизоморфных компонент G_x и G_y. Рассмотрим графы, получающиеся из G при удалении вершины v_x из компоненты G_x и вершины v_y из компоненты G_y. В графе $G - v_x$ связных компонент, изоморфных G_x, стало на одну меньше, в графе $G - v_y$ компонент, изоморфных G_y, стало на одну меньше. Так как G_x неизоморфно G_y, очевидно, что и $G - v_x$ не может быть изоморфно $G - v_y$. Таким образом, для того чтобы G мог являться точным 1-расширением, необходимо, чтобы все его связные компоненты G_i были изоморфны.

Пусть $G = G_1 \cup G_2 \cup \ldots \cup G_k$, и пусть все компоненты попарно изоморфны. Рассмотрим произвольную компоненту $G_i = (V_i, \alpha_i)$. В случае, когда $|V_i| = 1$, получаем вполне несвязный граф, являющийся точным 1-расширением. Предположим $|V_i| > 1$. Выберем произвольную вершину $v \in V_i$. Рассмотрим граф $G - v$. Очевидно, что удаление вершины v затронет только компоненту G_i, значит, для произвольной вершины $v \in V_i$ компоненты $G_i - v$ должны быть изоморфны.

Таким образом, граф $G = G_1 \cup G_2 \cup \ldots \cup G_k$ тогда и только тогда является точным 1-расширением, когда G_i изоморфно G_j, $\forall\ i, j \in [1, k]$. Причем G_i, $\forall\ i \in [1, k]$ должны являться точными 1-расширениями.

Таким образом, наибольший интерес представляют связные графы, являющиеся точными расширениями. В дальнейшем мы будем рассматривать только связные орграфы.

Рассмотрим 3-вершинные турниры. Их всего два: 3-вершинный цикл (циклическая тройка) и 3-вершинный транзитивный турнир (транзитивная тройка). При удалении любой вершины из 3-вершинного турнира мы получим единственный 2-вершинный турнир. Все 3-вершинные турниры являются точными 1-расширениями. Заметим, что транзитивный турнир является бесконтурным графом, а циклическая тройка — сильно связным орграфом.

Теорема 1. *Точным 1-расширением может быть только бесконтурный или сильно связный орграф.*

Доказательство. Пусть дан произвольный орграф $G = (V, \alpha)$. Рассмотрим два случая.

Первый случай. Орграф G состоит из нескольких сильно связных компонент, хотя бы две из которых содержат разное число вершин.

Покажем, что такой граф не может быть точным 1-расширением. Действительно, обозначим через K_1^i сильно связные компоненты орграфа G, содержащие n_1 вершин, а через K_2^j — сильно связные компоненты, содержащие n_2 вершин. Допустим, что $n_1 > n_2$. Количество компонент K_1^i обозначим $a \geq 1$, количество компонент K_2^j обозначим $b \geq 1$. Рассмотрим орграф G_1, полученный из G удалением одной вершины из некоторой компоненты K_1. Компонент K_1 станет $a - 1$, а компонент K_2 останется b штук.

Рассмотрим орграф G_2, полученный из G удалением одной вершины из некоторой компоненты K_2. Компонент K_1 станет a или более штук, так как $n_1 > n_2$, а компонент K_2 станет $b - 1$.

Очевидно, что G_1 не изоморфен G_2 и, значит, G не может быть точным 1-расширением.

Второй случай. Орграф G состоит из нескольких сильно связных компонент K_i, каждая из которых содержит одинаковое число вершин $n > 1$ (в случае если $n = 1$ получаем бесконтурный граф).

Рассмотрим конденсацию орграфа G. Она представляет собой бесконтурный граф, в качестве вершин которого будут выступать компоненты K_i. У бесконтурного графа всегда есть хотя бы один сток и источник. Обозначим через U_1 один из источников конденсации графа G, а через U_2 — один из стоков.

Выберем некоторую компоненту K_a, в которой есть дуга из U_1. Выберем в U_1 вершину v_1 такую, чтобы при ее удалении в $U_1 - v_1$ осталась хотя бы одна вершина, связанная с K_a (это всегда возможно, так как по условию $n > 1$). Рассмотрим граф $G - v_1$.

Сильно связных компонент, содержащих n вершин, в нем станет на одну меньше. При этом можно заметить, что дуги из оставшихся компонент K_i идут только в другие компоненты с n вершинами, а в некоторые K_i идут дуги из сильно связных компонент с числом вершин меньше n, получившихся из U_1 после удаления из нее v_1.

Проведя аналогичные рассуждения для стока U_2, и удалив из него некоторую вершину v_2, не влияющую на связь некоторого K_b с U_2, мы получим граф $G_2 = G - v_2$. Сильно связных компонент, содержащих n вершин, в нем так же, как и в G_1, станет на одну меньше. Но при этом можно заметить, что дуги, входящие в оставшиеся компоненты K_i, идут только из других компонент с n вершинами, а из некоторых K_i идут дуги в сильно связные компоненты с числом вершин меньше n, полученные из U_2 после удаления v_2.

Очевидно, что G_1 и G_2 неизоморфны, а значит, G не является точным 1-расширением. □

2. ТОЧНЫЕ РАСШИРЕНИЯ ТРАНЗИТИВНЫХ ТУРНИРОВ

В предыдущем разделе мы показали, что только бесконтурный или сильно связный орграф может быть точным 1-расширением. Примером бесконтурных графов являются транзитивные турниры. В теореме 2 будет показано, что точным k-расширением транзитивного турнира при любом натуральном k является транзитивный турнир, а в последующей теореме 3 мы докажем, что среди всех бесконтурных графов, только транзитивные турниры являются точными 1-расширениями.

Теорема 2. *Единственным с точностью до изоморфизма точным k-расширением транзитивного n-вершинного турнира T_n при $n > 2$ является $(n + k)$-вершинный транзитивный турнир T_{n+k}.*

Доказательство. Транзитивный турнир является полным бесконтурным графом. Очевидно, что любой его подграф обладает теми же свойствами, то есть тоже является транзитивным турниром. Таким образом, удаление любых k вершин транзитивного турнира T_{n+k} приводит к транзитивному турниру T_n, то есть турнир T_{n+k} действительно является точным k-расширением турнира T_n.

Покажем, что турнир T_{n+k} является и единственным точным k-расширением турнира T_n.

Пусть орграф G^* — точное k-расширение транзитивного турнира T_n. Степень каждой вершины T_n есть в точности $n-1$. Тогда степень любой вершины в орграфе G^* должна быть не ниже $n-1+k$.

Действительно, если бы это было не так и в орграфе G^* была бы вершина v степени меньше $n-1+k$, то удаление k вершин, соединенных дугой с v, приведет к оргафу с вершиной степени меньше $n-1$, который не может быть изоморфен T_n.

Покажем, что орграф G^* является направленным. Пусть это не так и в нем есть встречные дуги (u,v) и (v,u), $u \neq v$. Рассмотрим подграф, получающийся из G^* удалением любых k вершин, отличных от u и v. Этот орграф не может быть изоморфен турниру T_n из-за встречных дуг (u,v) и (v,u), в итоге получили противоречие.

Аналогично, показывается, что G^* является и полным направленным графом. Если бы это было не так, то можно было бы найти две различные вершины u и v в G^*, между которыми нет дуги. Тогда орграф, получающийся из G^* удалением любых k вершин, отличных от u и v очевидно не будет изоморфен турниру T_n.

Таким образом, любое точное k-расширение G^* турнира T_n является $(n+k)$-вершинным турниром. Покажем, что орграф G^* должен быть бесконтурным графом.

Пусть это не так и в орграфе G^* существует нетривиальный контур. Пусть s — минимальная из длин всех нетривиальных контуров в орграфе G^* и $v_{i_1}, \ldots, v_{i_s}, v_{i_1}$ один из таких контуров. Рассмотрим два случая.

1) $s \leq n$. В этом случае любой n-вершинный подграф G^*, содержащий все вершины выбранного контура, не будет изоморфен бесконтурному турниру T_n.

2) $s > n$. Рассмотрим подграф орграфа G^*, образованный вершинами $v_{i_1}, \ldots, v_{i_n}$. Поскольку орграф G^* является точным k-расширением турнира T_n, то рассматриваемый подграф изоморфен турниру T_n, а, значит, в силу транзитивности в T_n и в G^* есть дуга (v_{i_1}, v_{i_n}). Тогда при $n > 2$ можно построить контур длины меньше, чем s: $v_{i_1}, v_{i_n}, \ldots, v_{i_s}, v_{i_1}$, что противоречит предположению о минимальности нетривиального контура длины s в орграфе G^*.

Таким образом, транзитивный турнир T_{n+k} является единственным точным k-расширением транзитивного турнира T_n при $n > 2$. $\square$

Заметим, что ограничение $n > 2$ в формулировке теоремы 2 является существенным, так как при $n = 1$ и $n = 2$ получаются вырожденные случаи: точным k-расширением 2-вершинного турнира T_2 является любой $(n+k)$-вершинный турнир, а точным k-расширением 1-вершинного графа является любой $(n+k)$-вершинный граф.

3. БЕСКОНТУРНЫЕ ТОЧНЫЕ РАСШИРЕНИЯ ОРГРАФОВ

Лемма 1. *Любая вершина бесконтурного графа, являющегося точным 1-расширением, кроме вершин являющихся стоками (источниками), должна быть соединена дугой с подходящим стоком (источником), причем ровно с одним.*

Доказательство. Рассмотрим произвольный бесконтурный n-вершинный граф $G = (V, \alpha)$ являющийся точным 1-расширением. Так как его симметризация тоже является точным 1-расширением, то суммарное количество входящих и исходящих из любой вершины дуг должно быть одинаковым, обозначим его за d.

Пусть v — один из стоков графа G. Пусть u — одна из вершин, имеющих дугу, идущую в v. Рассмотрим граф $G^* = G - u$. В графе G^* количество стоков со степенью захода d изменилось. Вершины, являвшиеся стоками в графе G и потерявшие входящую дугу из u, получили степень захода, равную $d-1$. Вершины, не являвшиеся стоками в G, а в G^* ставшие стоками, степень захода d иметь не могут, поскольку они потеряли одну исходящую дугу, шедшую в u, и должны теперь иметь степень захода не выше $d-1$. Таким образом, количество стоков со степенью захода d в графе G^* уменьшилось на те стоки, в которые была дуга из u.

Так как G точное 1-расширение, то при удалении любой вершины из G количество стоков должно быть таким же, как в графе G^*. Рассмотрим, что получится, если удалить из G сток. Очевидно, что число стоков со степенью захода d уменьшится ровно на один, тот, который мы удалили. Таким образом,для того чтобы граф G мог быть точным 1-расширением, любая вершина, стоком не являющаяся, должна иметь дугу ровно в один сток графа G.

Проведя аналогичные рассуждения для источников, получаем, что в любую вершину графа G, не являющуюся источником, должна идти дуга ровно из одного источника. □

Следствие 1. *В бесконтурном графе, являющемся точным 1-расширением, количество стоков должно быть равно количеству источников.*

Доказательство. Предположим, что источников больше, чем стоков. По лемме 1 каждая вершина, включая источники, должна иметь дугу, идущую в подходящий сток. Так как стоков больше, чем источников, то некоторые источники окажутся соединенными с одним общим стоком. Но по лемме 1 в любую вершину, включая стоки, должна идти дуга ровно из одного подходящего источника. Пришли к противоречию.

Аналогичное противоречие мы получим, предположив, что количество стоков больше, чем количество источников. Значит, количество стоков должно быть равно количеству источников. □

Следствие 2. *Если в бесконтурном графе, являющемся точным 1-расширением, есть ровно один сток и ровно один источник, тогда этот граф — транзитивный турнир.*

Доказательство. Пусть дан n-вершинный бесконтурный граф G, являющийся точным 1-расширением. И пусть в G ровно один сток и ровно один источник.

По лемме 1 каждая вершина, кроме стока, в G должна быть соединена дугой со стоком и каждая вершина, кроме источника, в G должна быть соединена дугой с источником. Степень захода стока и степень исхода источника получается равной $n-1$.

Так как граф G — точное 1-расширение, то сумма степеней исхода и захода каждой вершины в G должно быть равно степени исхода источника, т.е. $n-1$. Получается что G — полный бесконтурный граф, являющийся точным 1-расширением. Другими словами, G — транзитивный турнир. □

Лемма 2. *Пусть вершина v бесконтурного графа, являющегося точным 1-расширением, имеет входящую дугу из некоторого источника i, тогда из вершины v должна идти дуга в сток s, причем именно тот, в который есть дуга из i.*

Доказательство. Пусть дан n — вершинный бесконтурный граф G, являющийся точным 1-расширением. И пусть $k > 1$ — число стоков и источников орграфа G. Степень исхода источников обозначим за d.

Рассмотрим один из источников орграфа G, обозначим его за i. Сток, в который из i идет дуга, обозначим за s.

Рассмотрим вершины, в которые из i идет дуга. И пусть среди них есть вершина v, не смежная с s.

Рассмотрим граф $G^* = G - v$. В G^* степень исхода источника i уменьшится на единицу и станет равной $d-1$. Степень захода стока s останется равной d.

Рассмотрим граф $G^{**} = G - s$. В графе G^{**} степень исхода источника i также равна $d-1$, но так как по лемме 1 с источником i был связан ровно один сток s, то теперь i ни с одним стоком со степенью захода d не смежен. Получается, что G не может быть точным 1-расширением. Получили противоречие. □

Теорема 3. *Единственным связным n-вершинным бесконтурным точным 1-расширением является транзитивный турнир T_n.*

Доказательство. Пусть дан n-вершинный бесконтурный граф $G = (V, \alpha)$, являющийся точным 1-расширением. Если в графе G есть ровно один сток и ровно один источник, то по следствию из леммы 1 мы получаем, что G — транзитивный турнир.

Предположим, что стоков и источников $k > 1$ штук. Так как симметризация графа G также должна быть точным 1-расширением, то сумма степеней захода и исхода для любой вершины должна совпадать. Таким образом, степень исхода любого источника должна быть равна степени захода любого стока, обозначим ее за d.

Согласно лемме 2 множество всех вершин V можно разбить на $|V|/(d+1)$ непересекающихся подмножеств Θ_i, каждое из которых будет содержать по одному стоку и источнику из G. Из источника $i \in \Theta_i$ будут идти дуги во все остальные вершины Θ_i и из любой вершины подмножества Θ_i будет идти дуга в сток $s \in \Theta_i$.

Рассмотрим два подмножества $\Theta_1 \neq \Theta_2$. Предположим, что $\exists v \in \Theta_1$, соединенная дугой с некоторой вершиной $u \in \Theta_2$. Рассмотрим граф $G^* = G - v$. Так как v была связана со стоком s и источником i из Θ_1, то в графе G^* появятся две особенные вершины: вершина $s^* = s$ — единственный сток графа G^* со степенью захода $d-1$ и вершина $i^* = i$ — единственный источник графа G^* со степенью исхода $d-1$. Вершины, смежные с s^* и i^*, не могут быть подобными ни с одной другой вершиной графа G^*. Кроме того, в графе G^* появилась вершина $v^* = v \notin \Theta_1$, потерявшая дугу, инцидентную удаленной вершине u.

Рассмотрим теперь граф $G^{**} = G - s$. В графе G^{**} также будет две особенные вершины: $i^* = i$ и некоторая $s^* \neq s$, так же, как s, принадлежащая подмножеству Θ_1, так как s не была смежна ни с одной вершиной вне Θ_1. Для вершин, не входящих в Θ_1, удаление s никаких изменений не повлекло. Получается, что G^* и G^{**} не могут быть изоморфными, а значит, если G является точным 1-расширением, то в нем не может быть ни одной дуги из вершин некоторого множества Θ_i в вершины множества Θ_j, при $i \neq j$, а значит, при $k > 1$ граф G — несвязный граф. $\square$

Библиографический список

1. *Harary F., Hayes J.P.* Node fault tolerance in graphs // Networks. 1996. V. 27. P. 19–23.

2. *Абросимов М.Б.* Минимальные расширения дополнений графов // Теоретические задачи информатики и ее приложений. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 2001. Вып. 4. С. 11–19.

3. *Абросимов М.Б., Долгов А.А.* Точные расширения некоторых турниров // Вестн. Томск. гос. ун-та. Приложение. 2007. № 23. С. 211–216.

4. *Богомолов А.М., Салий В.Н.* Алгебраические основы теории дискретных систем. М.: Наука, 1997.