



ИНФОРМАТИКА

УДК 519.17

О РЕКОНСТРУИРУЕМОСТИ МАЛЫХ ТУРНИРОВ

М.Б. Абросимов, А.А. Долгов

Саратовский государственный университет,
кафедра теоретических основ компьютерной безопасности и криптографии
E-mail: mic@rambler.ru, Dolgov.A.A@gmail.com

В работе рассматриваются вопросы, связанные с реконструируемостью турниров. Приводятся известные результаты по реконструируемости ориентированных графов и описывается схема построения семейств Стокмейера нереконструируемых направленных графов. Рассматривается техника компьютерного поиска нереконструируемых турниров и соответствующие алгоритмы. Приводятся все нереконструируемые турниры с числом вершин до 12.

Ключевые слова: граф, турнир, реконструируемость графов.

About Reconstruction of Small Tournaments

M.B. Abrosimov, A.A. Dolgov

Saratov State University,
Chair of Theoretical Basis of Computer Security and Cryptography
E-mail: Dolgov.A.A@gmail.com

A tournament of order n is a complete graph of n nodes with each arc assigned a unique direction. The reconstruction conjecture in graph theory says that graphs are determined uniquely by their subgraphs. This conjecture was proved to be false when P. K. Stockmeyer discovered several infinite families of counterexample pairs of digraphs (including tournaments). In this paper we observe known results about reconstruction of tournaments and present our approach to study reconstruction of all tournaments with up to 12 vertexes.

Key words: graph, tournament, reconstruction conjecture.

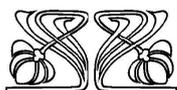
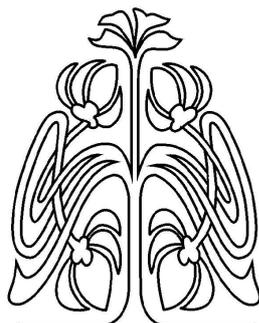
ВВЕДЕНИЕ

Ориентированным графом (орграфом) G называется пара (V, α) , где V конечное непустое множество (множество вершин), а α — отношение в множестве V (отношение смежности). Неориентированным графом называется орграф с антирефлексивным и симметричным отношением смежности. Элементы множества α называются дугами для орграфа и ребрами для неориентированного графа. Орграф $G = (V, \alpha)$ называется направленным графом или диграфом, если его отношение α антисимметрично, то есть нет встречных дуг за исключением, быть может, петель. Полный диграф без петель называют турниром. Таким образом, у турнира между любыми двумя вершинами существует в точности одна дуга. Здесь и далее основные определения даются по работе [1].

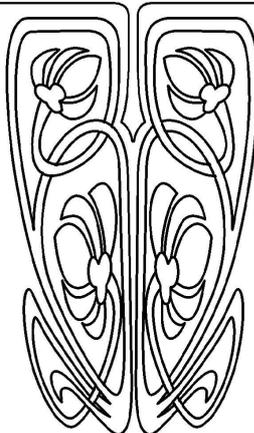
Путь в графе называется чередующаяся последовательность вершин и дуг вида $v_1(v_1, v_2)v_2(v_2, v_3)v_3 \dots v_{n-1}(v_{n-1}, v_n)v_n$.

Вершина u достижима из вершины v , если существует путь из v в u .

Орграф называется сильносвязным или сильным, если любые его две вершины взаимно достижимы.



НАУЧНЫЙ
ОТДЕЛ





Граф, получающийся из G удалением некоторой вершины и всех связанных с ней дуг, называется *максимальным подграфом* графа G . Список максимальных подграфов графа G называют его *колодой*.

Два графа G и H *изоморфны*, если между их множествами вершин существует взаимно однозначное соответствие, сохраняющее отношение смежности. Изоморфизм графа на самого себя называется *автоморфизмом*.

Говорят, что граф H является *реконструкцией* графа G , если их колоды совпадают. Граф называется *реконструируемым*, если он изоморфен каждой своей реконструкции.

С реконструируемостью неориентированных графов связана известная

Гипотеза Келли – Улама (вершинной реконструируемости, 1945). Каждый неориентированный граф с числом вершин большим двух является вершинно реконструируемым.

Исключений из гипотезы для неориентированных графов на данный момент неизвестно. Однако для орграфов все обстоит иначе. Если рассматривать турниры, то уже среди 3-вершинных турниров можно найти пару не реконструируемых (рис. 1).

Первые известные результаты по реконструируемости турниров были получены Харари и Палмером. Им удалось предложить 4-х и 5-вершинные пары нереконструируемых турниров и показать, что несильные турниры, имеющие, хотя бы пять вершин, реконструируемы. Позже Бейнеком и Паркером были найдены 5-вершинная пара и три 6-вершинных пары сильных нереконструируемых турниров [2]. Спустя 8 лет Стокмейером был проведен компьютерный поиск в результате которого было обнаружено, что 7-вершинные турниры полностью реконструируемы, а среди 8-вершинных есть две нереконструируемые пары сильных турниров. В последствие Стокмейеру удалось предложить бесконечные семейства нереконструируемых турниров и диграфов с числом вершин вида $p = 2^m + 2^n$, где $0 \leq n < m$. Приведем далее краткое изложение результатов Стокмейера по работе [3].

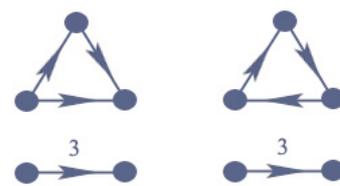


Рис. 1. Нереконструируемые турниры и их колоды

1. СЕМЕЙСТВО НЕРЕКОНСТРУИРУЕМЫХ ТУРНИРОВ СТОКМЕЙЕРА

При описании семейства нереконструируемых турниров используется вспомогательное семейство турниров A_n , обладающее широким набором полезных свойств.

Кроме того, для более удобного описания семейств введем две функции. Для любого целого числа $k \neq 0$ определим $\text{row}(k)$, как наибольшее целое i , такое что 2^i делит k . Через $\text{odd}(k)$ обозначим частное от деления k на $2^{\text{row}(k)}$. Например, $48 = 2^4 * 3$, таким образом $\text{row}(48) = 4$, $\text{odd}(48) = 3$. Так же в качестве примера можно привести $\text{row}(-1) = 0$, $\text{odd}(-1) = -1$.

Рассмотрим семейство A_n . Для любого положительного целого n турнир A_n содержит 2^n вершин, отношение смежности определяется следующим образом: $v_i \rightarrow v_j$ если $\text{odd}(j - i) \equiv 1 \pmod{4}$ для любых $i \neq j$.

Например, матрица смежности турнира A_3 будет иметь вид

0	1	1	0	1	1	0	0
0	0	1	1	0	1	1	0
0	0	0	1	1	0	1	1
1	0	0	0	1	1	0	1
1	1	0	0	0	1	1	0
0	1	1	0	0	0	1	1
1	0	1	1	0	0	0	1
1	1	0	1	1	0	0	0

Заметим, что для любого $n \geq 2$ подтурнир содержащий первую половину вершин турнира A_n будет турниром A_{n-1} . Так, например, левый верхний угол матрицы A_3 , изображенной выше, будет турниром A_2 и так далее.

Рассмотрим несколько легко проверяемых свойств турниров A_n .

Лемма. (а) *Турниры A_n самодополнительные.*



(b) Первые 2^{n-1} вершин турнира A_n имеют 2^{n-1} исходящих дуг, оставшиеся 2^{n-1} вершины имеют $2^{n-1} - 1$ исходящих дуг.

(c) У каждого A_n существует только тождественный автоморфизм.

Каждый из диграфов семейства Стокмейера состоит из двух турниров семейства A_n , соединенных определенным образом. Опишем шаблон M_p , по которому строятся диграфы семейства. Переменные шаблона могут принимать значение 0 или 1.

Для каждого $p = 2^m + 2^n$, где $0 \leq n < m$, M представляет собой матрицу $p \times p$, следующего вида:

(a) $M[i, i] = 0$, где $1 \leq i \leq p$.

(b) Если $1 \leq i, j \leq 2^m$ или если $2^m + 1 \leq i, j \leq p$, тогда $M[i, j] = 1$, если $\text{odd}(j - i) \equiv 1 \pmod{4}$, и $M[i, j] = 0$ в противном случае.

(c) Если $1 \leq i \leq 2^m$ и $2^m + 1 \leq j \leq p$, тогда $M[i, j] = w$, если $i + j$ четное, и $M[i, j] = x$ в противном случае.

(d) Если $1 \leq j \leq 2^m$ и $2^m + 1 \leq i \leq p$, тогда $M[i, j] = y$, если $i + j$ четное, и $M[i, j] = z$ в противном случае.

Было доказано, что полученные диграфы нереконструируемы.

Теорема (Стокмейер, 1978). Для любого целого $p \geq 5$ вида $p = 2^m + 2^n$, где $0 \leq n < m$ можно указать шесть пар нереконструируемых диграфов. Причем, среди них одна пара нереконструируемых турниров [3].

Заметим, что семейство Стокмейера не включает всех известных исключений. Например, среди шести 6-вершинных нереконструируемых турниров семейству принадлежит только два.

2. ГЕНЕРАЦИЯ ТУРНИРОВ

Стокмейером были проверены все турниры до 8 вершин. Наша задача состояла в том, чтобы проверить реконструируемость турниров с большим числом вершин. В общедоступных источниках доступна база турниров с числом вершин до 10^1 . Нам удалось построить все турниры с числом вершин до 11 и с их помощью проверить реконструируемость турниров с числом вершин до 12.

Для хранения турниров и эффективной проверки на изоморфизм удобно пользоваться числовыми инвариантами графа. Одним из известных числовых инвариантов является максимальный (минимальный) матричный код. В нашей работе была использована модификация этого кода, которая для турниров строится более эффективно.

Кодирование производится выписыванием матрицы смежности по минорам, начиная с левого верхнего угла. Если перебрать все графы изоморфные данному, и выбрать среди всех полученных кодов максимальный (минимальный), то он будет инвариантом графа. Построенный таким образом код был назван максимальным (минимальным) минорным кодом.

Очевидно, что для произвольного n -вершинного графа размер кода будет n^2 бит. Легко заметить, что у турнира на симметричных относительно главной диагонали позициях стоят противоположные значения, а на главной диагонали стоят 0. Поэтому можно хранить не все n^2 элементов, а лишь $n * (n - 1) / 2$ элемент. В табл. 1 указан минимальный объем памяти для хранения турниров с числом вершин до 12.

При использовании базы данных для хранения турниров размер несколько увеличивается из-за добавления служебной информации и в результате размер базы

Таблица 1

Статистика по турнирам с числом вершин до 12

Число вершин	Количество неизоморфных турниров	Число бит на турнир	Всего памяти
3	2	3	6 бит
4	4	6	3 байта
5	12	10	15 байт
6	56	15	105 байт
7	456	21	1197 байт
8	6880	28	24 Кб
9	191536	36	842 Кб
10	9733056	45	53 Мб
11	903753248	55	5.7 Гб
12	154108311168	66	≈ 1 Тб

¹<http://cs.anu.edu.au/bdm/data/digraphs.html> от 04.02.2009



11-вершинных турниров достигает порядка 14 Гб. Из табл. 1 видно, что уже 12-вершинные турниры на персональном компьютере сгенерировать практически невозможно.

Для генерации турниров хорошо подходит динамический алгоритм. Он позволяет из n -вершинных турниров получить набор $(n + 1)$ -вершинных турниров. В ходе алгоритма к каждому n -вершинному турниру добавляется одна вершина, которая соединяется со всеми остальными и производится перебор всех возможных ориентаций добавленных дуг (подробнее см. в [4]).

Динамический алгоритм позволяет на одном компьютере за несколько часов получить в явном виде все неизоморфные турниры до 10 вершин. Для получения всех 11-вершинных турниров требуется уже несколько тысяч часов работы одного компьютера. Задачу генерации можно распараллелить на несколько компьютеров, если на каждом генерировать турниры с заданным вектором степеней. В нашей работе для генерации 11-вершинных турниров было задействовано 10 машин мощностью 2 ГГц, вычисления длились три недели. В табл. 2 приведена количественная статистика по сгенерированным турнирам. Проанализировав полученные результаты до 10 вершин, удалось предложить метод, позволяющий сильно сократить объем хранимых данных. Оказалось, что в упорядоченной последовательности минорных кодов турниров, часто встречаются подпоследовательности значений, отличающихся на единицу: $x, x + 1, x + 2 \dots$. Подобные подпоследовательности можно закодировать, указав первый элемент, и количество подряд идущих элементов. Для 11-вершинных турниров указанным образом объем базы данных сокращается с 14 до 1.8 Гб.

Таблица 2

Количественная статистика

Количество вершин	Количество неизоморфных турниров	Количество векторов степеней	Количество сильных турниров	Количество несильных турниров
3	2	2	1	1
4	4	4	1	3
5	12	9	6	6
6	56	22	35	21
7	456	59	353	103
8	6880	167	6008	872
9	191536	490	178133	13403
10	9733056	1486	9355949	377107
11	903753248	4639	884464590	19288658

3. ПОИСК НЕРЕКОНСТРУИРУЕМЫХ ТУРНИРОВ

Для турниров с числом вершин до 10 можно воспользоваться простым алгоритмом непосредственно получив колоду для каждого турнира, а затем найти турниры с одинаковыми колодами. Однако при таком подходе уже для 11-вершинных турниров возникают существенные вычислительные сложности, а для 12-вершинных турниров метод требует огромных емкостных мощностей (порядка 10 Тб).

Был разработан и реализован алгоритм, позволяющий искать нереконструируемые n -вершинные турниры, не получая их в явном виде, а используя только $(n - 1)$ -вершинные турниры. Алгоритм основывается на следующем рассуждении.

Пусть T некоторый турнир, а $Q(T)$ — все турниры, которые могут быть получены из турнира T добавлением одной вершины и соединением ее с остальными единственной дугой. Пусть далее G и H — пара нереконструируемых n -вершинных турниров, тогда $(G \in Q(T)) \Leftrightarrow (H \in Q(T))$.

В самом деле, так как G и H являются реконструкциями друг друга, то их колоды совпадают. При использовании динамического алгоритма любой турнир получается на некотором шаге из турнира, который является его максимальным подграфом, то есть из некоторого графа своей колоды. Таким образом, нереконструируемые n -вершинные турниры достаточно искать только среди турниров, получающихся указанным образом из одного $(n - 1)$ -вершинного турнира.

Следовательно, имея в своем распоряжении сгенерированный с помощью динамического алгоритма каталог турниров до 11 вершин, можно провести проверку реконструируемости турниров с числом вершин до 12. Оценка времени выполнения по описанному алгоритму составила порядка десяти тысяч часов работы одного компьютера, однако алгоритм очень удобен для распараллеливания.

Для проведения поиска была разработана система распределенных вычислений GDS. Система состоит из сервера, взаимодействующего с базой данных, содержащей исходные данные решаемой



задачи, и клиентов, на которых производятся вычисления. Взаимодействие клиента и сервера осуществляется по протоколам ТСР/ІР. Для проведения распределенного поиска нереконструируемых турниров был написан модуль, реализующий алгоритм направленного поиска нереконструируемых турниров.

Поиск нереконструируемых турниров велся в течение двух месяцев на 15 компьютерах мощностью 2 ГГц. В ходе вычислений удалось перепроверить уже известные результаты до 9 вершин (рис. 2).

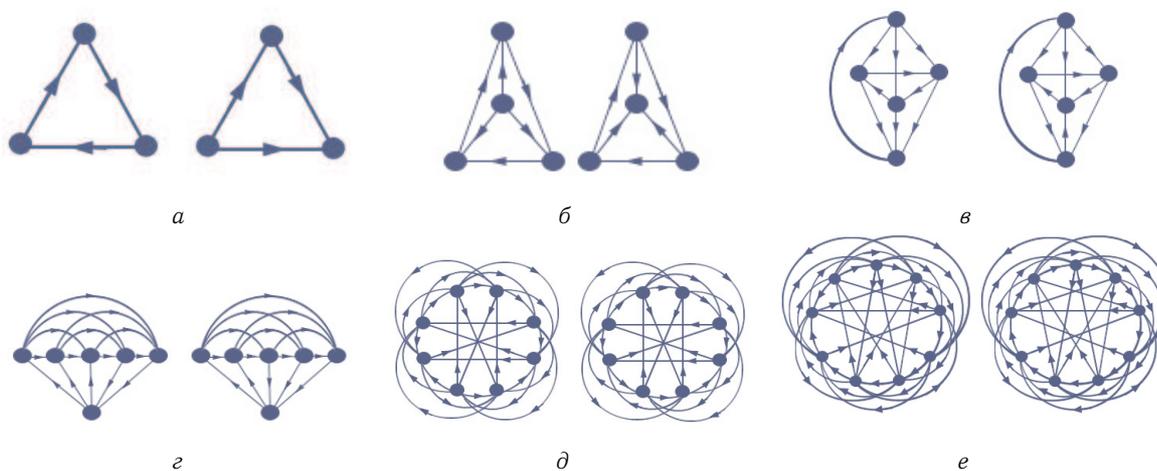


Рис. 2. Нереконструируемые турниры: *a* – 3-вершинные, *b* – 4-вершинные, *v* – 5-вершинные, *z* – 6-вершинные, *d* – 8-вершинные, *e* – 9-вершинные

Среди 10-вершинных турниров удалось найти единственную пару нереконструируемых турниров, принадлежащую семейству Стокмейера (рис. 3, *a*). Все 11-вершинные турниры оказались реконструируемыми. Среди 12-вершинных турниров удалось найти единственную пару нереконструируемых турниров, которые также принадлежат семейству Стокмейера (рис. 3, *б*).

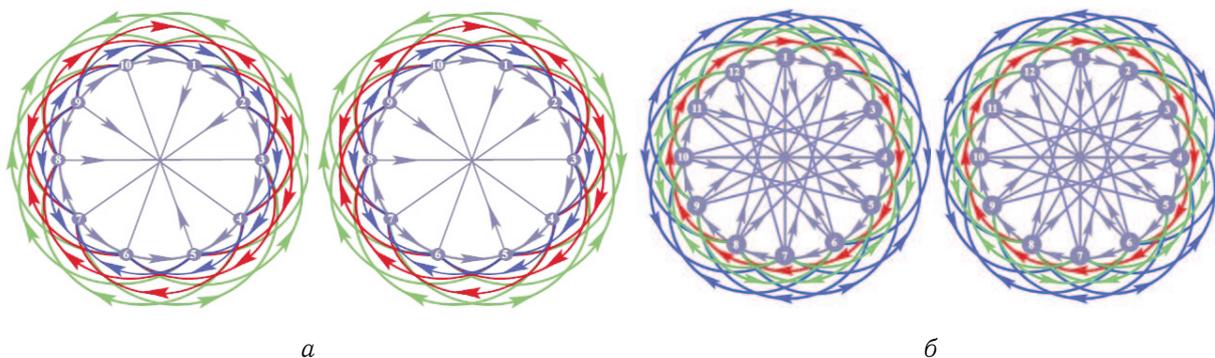


Рис. 3. Нереконструируемые турниры: *a* – 10-вершинные, *б* – 12-вершинные

Библиографический список

1. Богомолов А.М., Салий В.Н. Алгебраические основы теории дискретных систем. М.: Наука, 1997.
2. Харари Ф. Теория графов. М.: УРСС, 2003.
3. Stockmeyer P. My quest for non-reconstructable graphs // *Congressus Numerantium*. 1988. V. 63. P. 188–200.
4. Долгов А.А. Турниры и гипотеза вершинной реконструируемости // Наука и образование: проблемы и перспективы: Материалы 9-й региональной научно-практической конференции аспирантов, студентов и учащихся (Бийск, 13–14 апреля 2007г.). 2007. С. 171–176.