ИНФОРМАТИКА

УДК 519.17

О НИЖНЕЙ ОЦЕНКЕ ЧИСЛА РЕБЕР МИНИМАЛЬНОГО РЕБЕРНОГО 1-РАСШИРЕНИЯ СВЕРХСТРОЙНОГО ДЕРЕВА

М. Б. Абросимов

Саратовский государственный университет,
кафедра теоретических основ компьютерной безопасности
E-mail: mic@rambler.ru

Граф G^* называется реберным 1-расширением графа G, если граф G можно вложить в каждый граф, получающийся из графа G^*, удалением любого его ребра. Реберное 1-расширение G^* графа G называется минимальным, если графы G и G^* имеют одинаковое число вершин, а среди всех реберных 1-расширений графа G с тем же числом вершин граф G^* имеет минимальное число ребер. Дерево называется сверхстройным, если только одна его вершина имеет степень больше двух. В работе дается нижняя оценка числа дополнительных ребер минимального реберного 1-расширения произвольного сверхстройного дерева и указывается семейство деревьев, на которых эта оценка достигается.

Ключевые слова: минимальное реберное расширение, сверхстройное дерево, звездоподобное дерево, отказоустойчивая реализация.

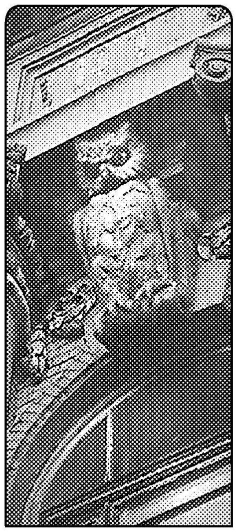
On Lower Bound of Edge Number of Minimal Edge 1-Extension of Starlike Tree

M.B. Abrosimov

Saratov State University,
Chair of Theoretical Foundations of Computer Security and Cryptography
E-mail: mic@rambler.ru

For a given graph G with n nodes, we say that graph G^* is its 1-edge extension if for each edge e of G^* the subgraph $G^* - e$ contains graph G up to isomorphism. Graph G^* is minimal 1-edge extension of graph G if G^* has n nodes and there is no 1-edge extension with n nodes of graph G having fewer edges than G. A tree is called starlike if it has exactly one node of degree greater than two. We give a lower bound of edge number of minimal edge 1-extension of starlike tree and provide family on which this bound is achieved.

Key words: minimal edge extension, starlike tree, fault tolerance.



НАУЧНЫЙ ОТДЕЛ

ВВЕДЕНИЕ

Минимальные расширения (вершинные или реберные) являются продолжением предложенной Хейзом в работе [1] графовой модели для исследования отказоустойчивости. В этой работе и его последующей статье [2] с соавтором Харари рассматривается отказоустойчивость элементов дискретных систем (node fault tolerance, вершинное расширение). В работе [3] модель была распространена и на отказы связей элементов системы (edge fault tolerance, реберное расширение). Среди рассматриваемых систем особое внимание уделялось системам, граф которых является цепью, циклом или деревом. Исследованию минимальных вершинных 1-расширений частных случаев деревьев посвящены статьи [4–6]. В работе [7] приводятся все минимальные реберные 1-расширения для сверхстройных деревьев с числом вершин до 10 включительно. Оказалось, что задача является вычислительно сложной [8] и поэтому общего аналитического решения описания минимального расширения (вершинного или реберного) для произвольного графа по-видимому не существует. В данной работе рассматриваются минимальные реберные 1-расширения деревьев особого вида, которые называются сверхстройными или звездоподобными. В работе используются понятия теории графов, преимущественно в соответствии с книгой [9].

Графом (неориентированным) называется пара $G = (V, \alpha)$, где α — симметричное и антирефлексивное отношение на множестве вершин V, называемое отношением смежности. Связный граф без циклов называется *деревом*. Степенью вершины v в неориентированном графе G будем называть количество вершин в G, смежных с данной, и обозначать через $d(v)$. Вектор, составленный из степеней вершин графа G в порядке невозрастания, называется вектором степеней. Будем говорить, что вектор степеней $(a_1, \ldots, a_n)$ одного графа *мажорирует* вектор степеней $(b_1, \ldots, b_n)$ другого графа, если все компоненты второго не превышают по величине соответствующих компонент первого вектора: $a_i \geq b_i$, $i = 1, \ldots, n$.

Дерево называется *сверхстройным* (*звездообразным*), если в точности одна его вершина имеет степень больше двух. Эту вершину будем называть *корнем* сверхстройного дерева. Другое определение звездообразного дерева: это граф, гомеоморфный звезде. На рис. 1 представлены малые сверхстройные деревья.

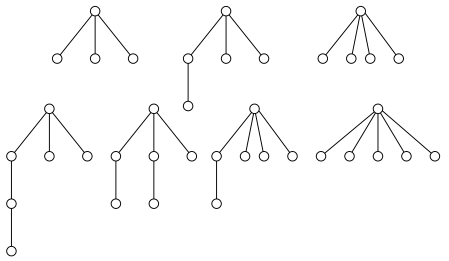


Рис. 1. Сверхстройные деревья с числом вершин 4, 5 и 6

Утверждение. *Дерево является сверхстройным тогда и только тогда, когда количество листьев равно наибольшей из степеней вершин.*

Доказательство. *Необходимость.* Пусть T — сверхстройное дерево, а v — его корень. Из определения сверхстройного дерева следует, что степень вершины v является наибольшей среди степеней остальных вершин. Пусть u — произвольная вершина, смежная с v. По определению она либо является листом, либо имеет степень 2. Но тогда есть еще в точности одна вершина смежная с u, кроме v. Продолжая рассуждение, приходим к выводу, что в дереве T количество листьев равно степени корневой вершины v.

Достаточность. Пусть в дереве T вершина v имеет наибольшую степень. Выберем ее в качестве корня. Заметим, что каждая ветвь, исходящая из корня, заканчивается не менее чем одним листом. Ветвь заканчивается одним листом тогда и только тогда, когда она является цепью, т. е. когда все вершины этой ветви, кроме первой (корня) и последней (листа), имеют степень 2. $\square$

Таким образом, вектор степеней сверхстройного дерева имеет вид $(k, 2, \ldots, 2, 1, \ldots, 1)$, где $k > 2$ и количество листьев равно k. Кратко вектор степеней сверхстройного дерева может быть записан в виде $(k, 2^m, 1^k)$. Среди сверхстройных деревьев есть представители других хорошо известных семейств графов.

В данной статье мы рассматриваем сверхстройные деревья, у которых степень корневой вершины $k > 2$. Однако если это ограничение убрать, то при $k = 1$ или $k = 2$ сверхстройное дерево является цепью P_n.

Если $m = 0$, то сверхстройное дерево является звездой $K_{1,k}$.

Сверхстройное дерево можно рассматривать как объединение k цепей с общей концевой вершиной. При этом дерево можно закодировать вектором, состоящим из длин цепей в порядке неубывания: $(m_1, \ldots, m_k)$, где $m_1 \geq \ldots \geq m_k$. Очевидно, что такое кодирование сверхстройных деревьев при $k > 2$ является взаимно однозначным. В самом деле, любому вектору $(m_1, \ldots, m_k)$ будет соответствовать единственное с точностью до изоморфизма сверхстройное дерево с числом вершин $m_1 + \ldots + m_k + 1$. В этом дереве корневая вершина будет иметь степень k, k вершин будут иметь степень 1, а остальные $m_1 + \ldots + m_k - k$ вершин будут иметь степень 2. Будем называть такой код *вектором цепей*. Сверхстройные деревья на рис. 1 имеют коды $(1, 1, 1)$, $(2, 1, 1)$, $(1, 1, 1, 1)$, $(3, 1, 1)$, $(2, 2, 1)$, $(2, 1, 1, 1)$ и $(1, 1, 1, 1, 1)$. Вектора цепей подсказывают способ перечисления всех сверхстройных деревьев с заданным числом вершин n. Так как $n = m_1 + \ldots + m_k + 1$, то, построив все разложения числа $n - 1$ на три и более слагаемых, мы найдем все возможные вектора цепей n-вершинных сверхстройных деревьев. Таким образом, количество неизоморфных сверхстройных деревьев с числом вершин 4, 5, … есть 1, 2, 4, 7, 11, 17, 25, 36, 50, 70, 94, 127, … [10]

1. ОСНОВНОЙ РЕЗУЛЬТАТ

Граф $G^* = (V^*, \alpha^*)$ называется *минимальным реберным k-расширением* (МР-kР) n-вершинного графа $G = (V, \alpha)$, если выполняются следующие условия:

1) граф G^* является реберным k-расширением G, т. е. граф G вкладывается в каждый граф, получающийся удалением из G^* любых его k ребер;

2) граф G^* содержит n вершин, т. е. $|V^*| = |V|$;

3) α^* имеет минимальную мощность при выполнении условий 1) и 2).

Построение минимального реберного k-расширения можно представить себе как добавление к заданному графу некоторого числа *дополнительных* ребер. Если рассматриваются простые графы, то минимальное реберное k-расширение может быть не у любого графа. Например, полный граф K_n не имеет минимальных реберных k-расширений ни при каких натуральных значениях k. Граф, получающийся из графа G удалением ребра e будем обозначать $G - e$.

Относительно специальных случаев сверхстройных деревьев некоторые результаты известны. Единственное минимальное реберное 1-расширение цепи P_n есть цикл C_n, а любое минимальное реберное k-расширение цепи P_n есть минимальное реберное $(k-1)$-расширение цикла C_n (см. [3]).

Минимальное реберное 1-расширение звезды $K_{1,k}$ единственно с точностью до изоморфизма и получается соединением двух листьев со всеми остальными вершинами звезды и между собой. Для $k > 1$ также известен вид всех минимальных реберных k-расширений (см. [11]).

В этой работе мы дадим нижнюю оценку на количество дополнительных ребер минимального реберного 1-расширения произвольного сверхстройного дерева и покажем, что эта оценка является достижимой, указав специальное семейство сверхстройных деревьев, минимальные реберные 1-расширения которых имеют соответствующее число дополнительных ребер.

Пусть T — сверхстройное дерево с вектором цепей $(m_1, \ldots, m_k)$ и вектором степеней $(k, 2^m, 1^k)$. Определим ограничения, которым должно удовлетворять любое минимальное реберное 1-расширение T^* сверхстройного дерева T. Заметим, что

1) граф T^* не может иметь вершин со степенью меньше двух, так как удаление любого инцидентного такой вершине ребра привело бы к появлению изолированной вершины;

2) граф T^* не может иметь единственную вершину степени k, так как удаление любого инцидентного такой вершине ребра привело бы к графу, у которого все вершины имеют степень меньше k.

Из пункта 1 следует, что вектор степеней графа T^* будет мажорировать вектор $(k, 2^{m+k})$.

Из пункта 2 следует две альтернативы: либо в T^* есть вершина степени более k, либо, как минимум, две вершины степени — не менее k. Оценим количество дополнительных ребер в каждом из случаев.

1. Если в графе T^* есть вершина степени более k, то вектор степеней графа T^* будет мажорировать вектор $(k+1, 2^{m+k})$. Чтобы определить минимально возможное в этом случае число дополнительных ребер, вычтем из суммы компонент этого вектора сумму степеней вершин дерева T и разделим пополам: $(k+1)/2$.

2. Если в графе T^* есть как минимум две вершины степени не менее k, то вектор степеней графа T^* будет мажорировать вектор $(k, k, 2^{m+k-1})$. Чтобы определить минимально возможное в этом случае число дополнительных ребер вычтем из суммы компонент этого вектора сумму степеней вершин дерева T и разделим пополам: $k - 1$.

Так как $k > 2$, то лишь при $k = 3$ схема 2 может иметь такое же количество дополнительных ребер, как и схема 1, а во всех остальных случаях больше. Таким образом, получаем

Теорема 1. *Минимальное реберное 1-расширение сверхстройного дерева T с вектором степеней $(k, 2, \ldots, 2)$ содержит не менее чем $(k+1)/2$ при нечетном k и $(k+2)/2$ при четном k дополнительных ребер.*

Далее мы покажем, что оценки из этой теоремы не могут быть улучшены. Исследуем схему 1.

Теорема 2. *Сверхстройное дерево T с вектором цепей $(m_1, \ldots, m_k)$ тогда и только тогда имеет минимальное реберное 1-расширение с вектором степеней $(k+1, 2, \ldots, 2)$, отличающееся на $(k+1)/2$ дополнительных ребер, когда:*

1) *среди его цепей есть цепи всех длин от 1 до m_1 (максимальной длины цепи);*

2) *цепь максимальной длины* m_1 *единственна;*

3) *все остальные цепи можно разбить на пары так, чтобы их длины в сумме давали* m_1.

Доказательство. Пусть k — нечетно и T — сверхстройное дерево с вектором цепей $(m_1, \dots, m_k)$, а G^* — его минимальное реберное 1-расширение с вектором степеней $(k+1, 2, \dots, 2)$, отличающееся на $(k+1)/2$ дополнительных ребер. Заметим, что последнее условие теоремы эквивалентно тому, что концы всех цепей, кроме максимальной, могут быть соединены таким образом, чтобы все получившиеся циклы имели длину $m_1 + 1$

Нетрудно видеть, что граф G^*, построенный по первой схеме, представляет собой объединение циклов с общей вершиной, которую для определенности обозначим v. Построение графа G^* из дерева T можно представить себе следующим образом: одна висячая вершина соединяется с корневой вершиной, а остальные висячие вершины попарно соединяются между собой.

Количество циклов в G^* обозначим через $t = d(v)/2 = (k+1)/2$. Длины циклов в G^* обозначим через $p_1, \dots, p_t$. Для определенности будем считать, что $m_1 \geq \dots \geq m_k$ и $p_1 \geq \dots \geq p_t$. Очевидно, что $p_1 \geq m_1 + 1$.

Необходимость. Рассмотрим удаление произвольного ребра в графе G^*. Это ребро принадлежит некоторому циклу длины p_i. Если ребро инцидентно вершине v, то после удаления ребра вместо цикла появится цепь длины $p_i - 1$. Если ребро не инцидентно вершине v, то цикл распадается на две цепи. Так как по предположению дерево T вкладывается в получившийся граф, то для каждой из этих цепей должна найтись цепь такой же длины и в дереве Т. В силу произвольности выбора ребра можно сделать вывод, что в дереве T должны быть цепи длины $1, 2, \dots, p_1 - 1$. С учетом полученной ранее оценки $p_1 \geq m_1 + 1$ имеем $p_1 = m_1 + 1$. Таким образом, утверждение 1 доказано.

Предположим, что в дереве T есть несколько цепей максимальной длины m_1. Так как конец только одной из этих цепей может быть соединен с корневой вершиной и может образовать цикл максимальной длины $p_1 = m_1 + 1$, то концы остальных цепей длины m_1 должны быть соединены с концами некоторых других цепей. Но это приведет к тому, что длины получившихся циклов будут больше, чем $p_1 = m_1 + 1$, а это противоречит предположению о том, что p_1 является максимальной длиной цикла. Таким образом, утверждение 2 доказано.

Предположим, что $p_1 > p_t$, т. е. не все циклы имеют одинаковую длину p_1. Рассмотрим граф, получающийся из G^* удалением ребра e, инцидентного вершине v из цикла минимальной длины p_t и попробуем построить вложение дерева T в получившийся граф. Вершина v в графе $G^* - e$ имеет степень k и единственным образом соответствует корневой вершине дерева. Из вершины v выходит одна цепь длины $p_t - 1$, и $(k-1)/2$ циклов, из которых нужно выделить $k - 1$ цепей. По предположению $p_t - 1 < m_1$, т. е. единственная цепь, получившаяся после удаления ребра e, не может быть цепью максимальной длины. Таким образом, один из циклов максимальной длины p_1 будет содержать в себе цепь максимальной длины m_1. Однако тогда остается еще $(k-3)/2$ циклов и этого недостаточно, чтобы построить вложение для оставшихся $k - 2$ цепей. Полученное противоречие доказывает утверждение 3, а вместе с ним и необходимость.

Достаточность. Предположим, что дерево T удовлетворяет условиям 1–3 теоремы. Построим граф G^* из дерева T следующим образом: концевую вершину цепи максимальной длины m_1 соединяем с корневой вершиной, а остальные концевые вершины цепей попарно соединяются между собой, таким образом, чтобы длина цикла была $m_1 + 1$: конец цепи длины 1 соединяется с концом цепи длины $m_1 - 1$, конец цепи длины 2 соединяется с концом цепи длины $m_1 - 2$ и т. д. Докажем, что граф G^* будет минимальным реберным 1-расширением дерева T.

Рассмотрим два случая удаления произвольного ребра e из графа G^*.

1. Ребро e инцидентно корневой вершине v. Удаление ребра e приведет к тому, что из корневой вершины v будет выходить одна цепь длины m_1 и $(k-1)/2$ циклов, каждый из которых имеет длину $m_1 + 1$. Получившаяся цепь будет соответствовать единственной цепи дерева T максимальной длины m_1, а в каждом из $(k-1)/2$ циклов выделим по две цепи подходящей длины так, чтобы получить оставшиеся $k - 1$ цепей дерева T. Вложение построено.

2. Ребро e не инцидентно корневой вершине v. Удаление ребра e приведет к тому, что из корневой вершины v будет выходить две цепи, сумма длин которых будет равна m_1 и $(k-1)/2$ циклов, каждый из которых имеет длину $m_1 + 1$. Получившиеся цепи будут соответствовать подходящим

цепям дерева T. Один из оставшихся циклов используем для вложения цепи максимальной длины m_1, а в каждом из $(k-1)/2$ оставшихся циклов выделим по две цепи подходящей длины так, чтобы получить оставшиеся $k-1$ цепей дерева T. Вложение построено. Минимальность построенного реберного 1-расширения G^* следует из теоремы 1. Теорема доказана. □

На рис. 2 представлено 7-вершинное сверхстройное дерево с вектором цепей (3, 2, 1) и все его минимальные реберные 1-расширения (МР-1Р), первое из которых построено по теореме 2. Это дерево является минимальным по числу вершин среди представителей рассматриваемого в теореме 2 семейства.

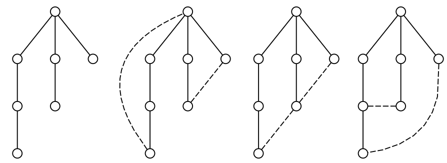


Рис. 2. Сверхстройное дерево $(3, 2, 1)$ и все его МР-1Р

Следствие. *Сверхстройные деревья, удовлетворяющие условию теоремы 2, при $k > 3$ имеют единственное с точностью до изоморфизма минимальное реберное 1-расширение.*

2. ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ СЕМЕЙСТВА

Идея доказательства теоремы 2 легко переносится и на более общий случай сверхстройных деревьев.

Теорема 3. *Сверхстройное дерево T с вектором цепей $(m_1, \ldots, m_k)$ тогда и только тогда имеет реберное 1-расширение с вектором степеней $(k+d, 2, \ldots, 2), d > 0$, отличающееся на $(k+d)/2$ дополнительных ребер, когда:*

1) *среди его цепей есть цепи всех длин от 1 до его высоты m_1 (максимальной длины цепи);*
2) *цепей максимальной длины m_1 в точности d;*
3) *все остальные цепи можно разбить на пары так, чтобы их длины в сумме давали m_1.*

Доказательство. Пусть $k+d$ — четно и T — сверхстройное дерево с вектором цепей $(m_1, \ldots, m_k)$, а G^* — его реберное 1-расширение (быть может, не минимальное) с вектором степеней $(k+d, 2, \ldots, 2)$, отличающееся на $(k+d)/2$ дополнительных ребер. Доказательство следует схеме предыдущей теоремы.

Нетрудно видеть, что граф G^* представляет собой объединение циклов с общей вершиной, которую для определенности обозначим v. Построение G^* из дерева T можно представить следующим образом: d висячих вершин соединяются с корневой вершиной, а остальные висячие вершины попарно соединяются между собой.

Количество циклов в G^* обозначим через $t = d(v)/2 = (k+d)/2$. Длины циклов в G^* обозначим через $p_1, \ldots, p_t$. Для определенности будем считать, что $m_1 \geq \ldots \geq m_k$ и $p_1 \geq \ldots \geq p_t$. Очевидно, что $p_1 \geq m_1 + 1$.

Необходимость. Рассмотрим удаление произвольного ребра в графе G^*. Это ребро принадлежит некоторому циклу длины p_i. Если ребро инцидентно вершине v, то после удаления ребра вместо цикла появится цепь длины $p_i - 1$. Если ребро не инцидентно вершине v, то цикл распадается на две цепи. Так как по предположению дерево T вкладывается в получившийся граф, то для каждой из этих цепей должна найтись цепь такой же длины и в дереве T. В силу произвольности выбора ребра можно сделать вывод, что в дереве T должны быть цепи длины $1, 2, \ldots, p_1 - 1$. С учетом полученной ранее оценки $p_1 \geq m_1 + 1$ имеем $p_1 = m_1 + 1$. Таким образом, утверждение 1 доказано.

Пусть в дереве T есть более d цепей максимальной длины m_1. Так как концы только d из этих цепей могут быть соединены с корневой вершиной и образовать цикл максимальной длины $p_1 = m_1+1$, то концы остальных цепей длины m_1 должны быть соединены с концами некоторых других цепей. Но это приведет к тому, что длины получившихся циклов будут больше, чем $p_1 = m_1 + 1$, а это противоречит предположению о том, что p_1 является максимальной длиной цикла. Таким образом, утверждение 2 доказано.

Предположим, что $p_1 > p_t$, т. е. не все циклы имеют одинаковую длину p_1. Рассмотрим граф, получающийся из G^* удалением ребра e, инцидентного вершине v, из цикла минимальной длины p_t и попробуем построить вложение дерева T в получившийся граф. Вершина v в графе $G^* - e$ имеет степень $k+1$ и единственным образом соответствует корневой вершине дерева. Из вершины v выходит одна цепь длины $p_t - 1$, и $k/2$ циклов, из которых нужно выделить $k-1$ цепь. По предположению $p_t - 1 < m_1$, т. е. единственная цепь, получившаяся после удаления ребра e не может быть цепью максимальной длины. Таким образом, два цикла максимальной длины p_1 будут содержать в себе две цепи максимальной длины m_1. Однако тогда остается еще $(k-4)/2$ циклов и этого недостаточно, чтобы построить вложение для оставшихся $k-2$ цепей. Полученное противоречие доказывает утверждение 3, а вмести с ним и необходимость. заменить на абзац: Предположим, что $p_1 > p_t$, т. е. не все циклы имеют одинаковую длину p_1. Рассмотрим граф, получающийся из G^* удалением ребра e инцидентного вершине v из цикла минимальной длины p_t и попробуем построить вложение дерева T в получившийся граф. Вершина v в графе $G^* - e$ имеет степень $k + d - 1$ и единственным образом соответствует корневой вершине дерева. Из вершины v выходит одна цепь длины $p_t - 1$ и $(k + d - 2)/2$ циклов, из которых нужно выделить $k - 1$ цепь. По предположению $p_t - 1 < m_1$, т. е. единственная цепь, получившаяся после удаления ребра e не может быть цепью максимальной длины. Таким образом, d циклов максимальной длины p_1 будут содержать в себе d цепей максимальной длины m_1. Однако тогда остается еще $(k-d-2)/2$ циклов и этого недостаточно, чтобы построить вложение для оставшихся $k - d - 1$ цепей. Полученное противоречие доказывает утверждение 3, а вмести с ним и необходимость.

Достаточность. Предположим, что дерево T удовлетворяет условиям 1–3 теоремы. Построим граф G^* из дерева T следующим образом: концевые вершины цепей максимальной длины m_1 соединяем с корневой вершиной, а остальные концевые вершины цепей попарно соединяются между собой, таким образом, чтобы длина цикла была $m_1 + 1$: конец цепи длины 1 соединяется с концом цепи длины $m_1 - 1$, конец цепи длины 2 соединяется с концом цепи длины $m_1 - 2$ и т. д. Докажем, что граф G^* будет реберным 1-расширением дерева T.

Рассмотрим два случая удаления произвольного ребра e из графа G^*.

1. Ребро e инцидентно корневой вершине v. Удаление ребра e приведет к тому, что из корневой вершины v будет выходить одна цепь длины m_1 и $(k + d - 2)/2$ циклов, каждый из которых имеет длину $m_1 + 1$. Получившаяся цепь будет соответствовать цепи дерева T максимальной длины m_1, $d - 1$ циклов будут содержать остальные цепи максимальной длины, а в каждом из $(k - d)/2$ циклов выделим по две цепи подходящей длины так, чтобы получить оставшиеся $k - d$ цепей дерева T. Вложение построено.

2. Ребро e не инцидентно корневой вершине v. Удаление ребра e приведет к тому, что из корневой вершины v будет выходить две цепи, сумма длин которых будет равна m_1 и $(k + d - 2)/2$ циклов, каждый из которых имеет длину $m_1 + 1$. Получившиеся цепи будут соответствовать подходящим цепям дерева T. Из оставшихся циклов d штук используем для вложения d цепей максимальной длины m_1, а в каждом из $(k - d - 2)/2$ оставшихся циклов выделим по две цепи подходящей длины так, чтобы получить оставшиеся $k - d - 2$ цепей дерева T. Вложение построено. Теорема доказана. □

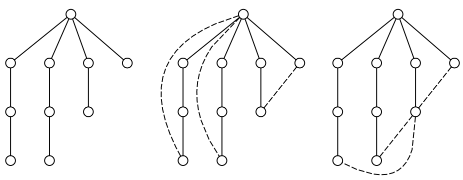


Рис. 3. Сверхстройное дерево $(3, 2, 2, 1)$ и все его МР-1Р

На рис. 3 представлено 10-вершинное сверхстройное дерево с вектором цепей $(3, 3, 2, 1)$ и все его минимальные реберные 1-расширения, первое из которых построено по теореме 3.

Следствие. *Для сверхстройных деревьев, удовлетворяющих условию теоремы 3, при $d = 2$ соответствующее реберное 1-расширение будет и минимальным.*

Библиографический список

1. *Hayes J. P.* A graph model for fault-tolerant computing system // IEEE Trans. Comput. 1976. Vol. 25. № 9. P. 875–884.

2. *Harary F., Hayes J. P.* Edge fault tolerance in graphs // Networks. 1993. Vol. 23. P. 135–142.

3. *Harary F., Hayes J. P.* Node fault tolerance in graphs // Networks. 1996. Vol. 27. P. 19–23.

4. *Harary F., Khurum M.* One node fault tolerance for caterpillars and starlike trees // Internet J. Comput. Math. 1995. Vol. 56. P. 135–143.

5. *Кабанов М. А.* Об отказоустойчивых реализациях графов // Теоретические задачи информатики и ее приложений. Саратов, 1997. Вып.1. С. 50–58.

6. *Абросимов М. Б.* Минимальные расширения графов // Новые информационные технологии в исследовании дискретных структур. Томск, 2000. С. 59–64.

7. Минимальные реберные расширения сверхстройных деревьев с малым числом вершин / М.Б. Абросимов, Д. Д. Комаров; Саратов. гос. ун-т. Саратов, 2010. 27 с. Деп. в ВИНИТИ 18.10.2010, № 589-В2010.
8. *Абросимов М. Б.* О сложности некоторых задач, связанных с расширениями графов // Мат. заметки. 2010. Т. 88, № 5. С. 643–650.
9. *Богомолов А. М., Салий В. Н.* Алгебраические основы теории дискретных систем. М., 1997. 368 с.
10. *Sloane N. J. A., Plouffe S.* The Encyclopedia of Integer Sequences. San Diego, 1995. 587 p.
11. *Абросимов М. Б.* Минимальные расширения неориентированных звезд // Теоретические проблемы информатики и ее приложений. Саратов, 2006. Вып. 7. С. 3–5.