УДК 517.544.8

О ЯВНОМ И ТОЧНОМ РЕШЕНИЯХ ЗАДАЧИ МАРКУШЕВИЧА НА ОКРУЖНОСТИ

В.М. Адуков[1], **А.А. Патрушев**[2]

Южно-Уральский государственный университет, Челябинск,
[1]кафедра дифференциальных уравнений и динамических систем,
[2]кафедра общей математики
E-mail: avm@susu.ac.ru, patraleksej@yandex.ru

В работе рассматривается задача Маркушевича на единичной окружности в случае, когда первый коэффициент задачи является произвольной гельдеровской функцией, а второй коэффициент есть граничное значение мероморфной в единичном круге функции. Предложен явный метод решения данной задачи, вычислено число линейно независимых решений однородной задачи и число условий разрешимости неоднородной задачи, найдено ее общее решение.

Ключевые слова: краевые задачи для аналитических функций, задача Маркушевича, матричная краевая задача Римана.

On Explicit and Exact Solutions of the Markushevich Boundary Problem for Circle

V.M. Adukov[1], **A.A. Patrushev**[2]

South Ural State University, Chelyabinsk,
[1]Chair of Differential Equations and Dynamic Systems,
[2]Chair of General Mathematics
E-mail: avm@susu.ac.ru, patraleksej@yandex.ru

In the article the Markushevich boundary problem on the circle is considered for the case when the first coefficient of the problem is an arbitrary function from the Hölder class and the second coefficient is the boundary value of a function that is meromorphic in the unit disk. An explicit method of solution of the given problem is proposed, the number of linearly independent solutions of the homogeneous problem and the number of solvability conditions are calculated, the general solution of the problem is found.

Key words: boundary problems for analytic functions, Markushevich boundary problem, Riemann matrix boundary problem.

ВВЕДЕНИЕ

Пусть Γ — гладкий замкнутый жорданов контур, разбивающий расширенную комплексную плоскость $\overline{\mathbb{C}}$ на внутреннюю D_+ и внешнюю D_- области. Считаем, что $0 \in D_+$. На контуре Γ заданы функции $a(t)$, $b(t)$, $f(t)$, принадлежащие классу $H(\Gamma)$ гельдеровских функций, причем $a(t) \neq 0$ всюду на Γ.

Рассмотрим следующую трехэлементную задачу линейного сопряжения аналитических функций (*задачу Маркушевича*): найти функции $\psi_+(z)$, $\psi_-(z)$, аналитические соответственно в областях D_+, D_- и непрерывно продолжимые на контур Γ, если на Γ их граничные значения связаны линейным соотношением

$$\psi_+(t) = a(t)\psi_-(t) + b(t)\overline{\psi_-(t)} + f(t), \tag{1}$$

содержащим комплексно сопряженные значения искомой функции. В приложениях наиболее часто используются решения, исчезающие на бесконечности. Мы также будем считаем, что $\psi_-(\infty) = 0$.

Историю, теорию разрешимости и приложения задачи Маркушевича можно найти в [1, гл. 5; 2, гл. 5]. Условие $a(t) \neq 0$, как известно, обеспечивает ее нетеровость.

Полной теории задачи (1) в настоящее время нет. Число l линейно независимых решений однородной задачи и число p условий разрешимости явно найдены только, когда $|a(t)| > |b(t)|$ (*эллиптический случай*) или $|a(t)| \equiv |b(t)|$ (*параболический случай*) [1].

Картина разрешимости в общем случае изучена в работе И.Х. Сабитова [3]. Эта статья породила целое направление исследования задачи Маркушевича, основанное на приближении коэффициентов рациональными, или более общо, мероморфными функциями. Однако при нахождении характеристик l и p в ней используется трудно вычисляемое число n. Поэтому вопрос о явном или эффективном решении задачи Маркушевича в общем случае остается открытым.

Впервые случаи явного решения задачи Маркушевича, отличные от эллиптического или параболического, были обнаружены в работах А.А. Патрушева [4]. Этот подход оказался плодотворным и при решении данной задачи в классе автоморфных функций [5, 6]. Эффективный метод решения задачи, основанный на приведении ее к уравнению Фредгольма, предложен в статьях К.М. Расулова [7, 8].

Отметим, что задача Маркушевича, вообще говоря, является неустойчивой при малом возмущении ее параметров [1]. Поэтому проблема приближенного решения этой задачи вообще не разработана.

Целью данной работы является изучение одного частного случая задачи Маркушевича, когда она может быть решена явно. Здесь под *явным решением* мы понимаем решение, которое использует только формулу Ф.Д. Гахова для канонической функции скалярной однородной задачи Римана и исследование средствами линейной алгебры конечного числа систем линейных алгебраических уравнений, для которых матрица системы может быть выписана в явном виде (в квадратурах). Число систем должно быть определено заранее. Если число этих систем находится в процессе вычислений, то мы будем считать, что получено *эффективное решение*.

Если имеется явное или эффективное решение задачи Маркушевича, то это еще не гарантирует, что на основе такого решения можно будет создать алгоритм приближенного решения. Далее мы увидим, что в нашем случае неустойчивость задачи Маркушевича обусловлена в основном неустойчивостью процедуры нахождения ранга матрицы. Если алгоритм явного или эффективного решения использует только вычисления в точной арифметике (например, вычисления в гауссовом поле $\mathbb{Q}(i)$), то мы будем говорить о *точном решении*. Его можно реализовать в системах компьютерной математики, таких как Maple. Поскольку получение алгоритма точного решения имеет особую значимость ввиду неустойчивости задачи, то при получении явного решения мы отдаем предпочтение методам, допускающим точные вычисления.

1. СВЕДЕНИЕ ЗАДАЧИ МАРКУШЕВИЧА К МАТРИЧНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧЕ РИМАНА

Мы будем решать явно задачу (1) при следующих двух предположениях:

а) контур Γ есть единичная окружность $|t| = 1$,

б) коэффициент $b(t)$ есть граничное значение функции, мероморфной в круге D_+.

На функцию $a(t)$ при этом никаких условий, кроме условия нетеровости $a(t) \neq 0$, не накладывается.

Прежде всего упростим задачу (1), воспользовавшись приемом, предложенным К.М. Расуловым в работе [7]. Для этого построим факторизацию коэффициента $a(t)$, воспользовавшись канонической функцией однородной задачи Римана [9]. Пусть $\varkappa = \mathrm{Ind}_\Gamma a(t)$. По формулам Сохоцкого – Племеля имеем: $\ln [t^{-\varkappa}a(t)] = B_+(t) - B_-(t)$, где $B_\pm(t)$ — предельные значения на контуре Γ следующего интеграла типа Коши

$$B(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_\Gamma \frac{\ln[\tau^{-\varkappa}a(\tau)]d\tau}{\tau - z}.$$

Определим функции $a_\pm(z) = \exp B_\pm(z)$, являющиеся аналитическими в областях $D_\pm$ и не обращающимися в нуль там. Тогда $a(t) = a_+(t)t^\varkappa a_-^{-1}(t)$ — искомая факторизация.

Обозначим $b_1(t) = b(t)\overline{a_-(t)}a_+^{-1}(t)$, $f_1(t) = f(t)a_+^{-1}(t)$ и введем новые неизвестные функции $\varphi_\pm(t) = \psi_\pm(t)a_\pm^{-1}(t)$. Для этих функций мы получим задачу

$$\varphi_+(t) = t^\varkappa\varphi_-(t) + b_1(t)\overline{\varphi_-(t)} + f_1(t), \tag{2}$$

равносильную исходной. Именно при переходе от (1) к (2) нам потребовалось явное решение скалярной однородной задачи Римана. Далее мы будем использовать только методы линейной алгебры.

Таким образом, мы можем ограничиться исследованием задачи (2). Легко видеть, что на единичной окружности коэффициенты $b(t)$ и $b_1(t)$ удовлетворяют условию б) одновременно. Поэтому задача (2) будет изучаться при тех же ограничениях а), б).

Поскольку контур Γ совпадает с единичной окружностью, мы можем методом, предложенным Г.С. Литвинчуком [1] (см. также [10]), свести задачу (2) к краевой задаче Римана для двумерного вектора.

Опишем процедуру такого сведения более подробно, чем это сделано в [1]. При этом мы убедимся, что при нахождении числа l линейно независимых решений однородной задачи (2) нет необходимости обращаться к аналогу довольно громоздкой леммы 6.1 из работы [1].

Решение $\varphi_+(z)$, $\varphi_-(z)$ задачи (2) мы будем рассматривать как кусочно-аналитическую функцию:

$$\varphi(z)=\begin{cases}\varphi_+(z), & z\in D_+,\\ \varphi_-(z), & z\in D_-,\end{cases}$$

заданную на $\overline{\mathbb{C}}\setminus\Gamma$ и исчезающую на бесконечности. Окружность Γ является для нее линией разрыва. Функции $\varphi_\pm(z)$, аналитические в областях $D_\pm$, продолжим в области $D_\mp$ с помощью симметрии $z\to\bar z^{-1}$ относительно окружности Γ, определив аналитические в $D_\mp$ функции $\overline{\varphi_\pm\left(\bar z^{-1}\right)}$. Зададим кусочно-аналитическую функцию:

$$\varphi^*(z)=z^{-1}\,\overline{\varphi\left(\bar z^{-1}\right)}=\begin{cases} z^{-1}\,\overline{\varphi_-\left(\bar z^{-1}\right)}, & z\in D_+,\\ z^{-1}\,\overline{\varphi_+\left(\bar z^{-1}\right)}, & z\in D_-.\end{cases}$$

Множитель z^{-1} введен для того, чтобы выполнялось условие $\varphi^*(\infty)=0$.

Функция $\varphi^*(z)$ непрерывно продолжается на контур Γ из областей $D_\pm$, и для ее граничных значений $\varphi^*_\pm(t)$ справедливо $\varphi^*_+(t)=\overline{t\varphi_-(t)}$, $\varphi^*_-(t)=\overline{t\varphi_+(t)}$.

Присоединим к уравнению (2) уравнение, полученное применением к (2) операции комплексного сопряжения. Полученная система для функций $\varphi_\pm(t),\varphi^*_\pm(t)$ может быть записана в виде матричной задачи Римана:

$$\Phi_+(t)=G(t)\Phi_-(t)+F(t). \tag{3}$$

Здесь $\Phi(z)=\begin{pmatrix}\varphi(z)\\ \varphi^*(z)\end{pmatrix}$ — кусочно-аналитический вектор, имеющий граничные значения $\Phi_\pm(t)=$ $=\begin{pmatrix}\varphi_\pm(t)\\ \overline{t\varphi_\mp(t)}\end{pmatrix}$, $G(t)=t^{\varkappa}\begin{pmatrix}1-|b_1(t)|^2 & tb_1(t)\\ -\overline{tb_1(t)} & 1\end{pmatrix}$, $F(t)=\begin{pmatrix}f_1(t)-t^{\varkappa}b_1(t)\overline{f_1(t)}\\ -t^{\varkappa-1}\overline{f_1(t)}\end{pmatrix}$.

Для произвольного кусочно-аналитического вектора $\Phi(z)=\begin{pmatrix}\varphi_1(z)\\ \varphi_2(z)\end{pmatrix}$ введем вектор $\Phi^*(z)=$ $=\begin{pmatrix}\varphi_2^*(z)\\ \varphi_1^*(z)\end{pmatrix}$. Если $\Phi(z)=\Phi^*(z)$, то вектор $\Phi(z)$ будем называть *симметричным*. Таким образом, каждое решение $\varphi(z)$ задачи (2) порождает симметричное решение $\Phi(z)=\begin{pmatrix}\varphi(z)\\ \varphi^*(z)\end{pmatrix}$ матричной задачи Римана (3).

Убедимся теперь в том, что, в свою очередь, каждое симметричное решение задачи (3) порождает некоторое решение исходной задачи (2). Легко проверить, что матричный коэффициент $G(t)$ удовлетворяет условию

$$G(t)J\overline{G(t)}J=I, \tag{4}$$

а свободный член $F(t)$ такой, что

$$G(t)J\overline{F(t)}+tF(t)=0. \tag{5}$$

Здесь $J=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$, I — единичная матрица второго порядка.

Эти два условия (на их важность впервые было указано в работе [10]) гарантируют существование симметричных решений задачи (3) в случае, когда эта задача вообще разрешима. В самом деле, если $\Phi(z)$ — произвольное решение (3), то при выполнении условий (4)–(5) вектор $\Phi^*(z)$ — также решение (3), и тогда $\frac{1}{2}\left[\Phi(z)+\Phi^*(z)\right]$ — симметричное решение (3).

Ясно, что для любого симметричного решения $\Phi(z)=\begin{pmatrix}\varphi(z)\\ \varphi^*(z)\end{pmatrix}$ задачи (3) функция $\varphi(z)$ будет решением задачи (2).

Итак, задача (2) эквивалентна задаче отыскания всех симметричных решений задачи (3), причем задача Маркушевича разрешима тогда и только тогда, когда разрешима соответствующая матричная задача Римана.

Известно (см., например, [2]), что если найдена так называемая *каноническая матрица* $X(z)$ задачи (3), то легко проверить условия разрешимости этой задачи и построить ее общее решение. В свою очередь, нахождение $X(z)$ равносильно построению *левой факторизации* матричного коэффициента $G(t)$:

$$G(t) = G_+(t)d(t)G_-(t).$$

Здесь $G_\pm(t)$ — матрицы-функции, аналитические и обратимые в областях $D_\pm$, непрерывно продолжимые на контур Γ, а $d(t) = \mathrm{diag}[t^{\varkappa_1}, t^{\varkappa_2}]$ — диагональная матрица-функция, $\varkappa_1 + \varkappa_2 = \mathrm{ind}_\Gamma \det G(t) = 2\varkappa$. Целые числа $\varkappa_1 \geq \varkappa_2$ называются *частными индексами*. Они являются важными инвариантами задачи (3), а следовательно, и (2). Каноническая матрица $X(z)$ в терминах факторизации строится следующим образом:

$$X(z) = \begin{cases} G_+(z), & z \in D_+, \\ G_-^{-1}(z)d^{-1}(z), & z \in D_-. \end{cases}$$

Выясним теперь, как с помощью канонической матрицы $X(z)$ найти множество всех симметричных решений однородной матричной задачи Римана (3). Легко видеть, что это множество является конечномерным пространством над полем $\mathbb{R}$, и, значит, нам необходимо построить базис $\Phi^1(z) = \begin{pmatrix} \varphi_1(z) \\ \varphi_1^*(z) \end{pmatrix}, \ldots, \Phi^l(z) = \begin{pmatrix} \varphi_l(z) \\ \varphi_l^*(z) \end{pmatrix}$ этого пространства. Тогда, очевидно, кусочно-аналитические функции $\varphi_1(z), \ldots, \varphi_l(z)$ будут образовывать базис пространства решений однородной задачи Маркушевича (2).

Если частные индексы $\varkappa_1$, $\varkappa_2$ неположительны, то однородная задача (3), а значит и однородная задача (2), допускают в классе исчезающих на бесконечности кусочно-аналитических функций только нулевые решения.

Если среди частных индексов имеются положительные, то размерность λ (над $\mathbb{C}$) пространства решений однородной задачи (3) совпадает с суммой положительных частных индексов. При $\varkappa_1 > 0$, $\varkappa_2 \leq 0$ базисом этого пространства является система кусочно-аналитических векторов $X^1(z), zX^1(z), \ldots, z^{\varkappa_1 - 1}X^1(z)$, а при $\varkappa_1 > 0$, $\varkappa_2 > 0$ — система $X^1(z)$, $zX^1(z), \ldots, z^{\varkappa_1-1}X^1(z), X^2(z), zX^2(z), \ldots, z^{\varkappa_2-1}X^2(z)$. Здесь $X^1(z)$, $X^2(z)$ — соответственно первый и второй столбцы канонической матрицы $X(z)$. Далее вышеуказанный базис мы обозначаем через $\Psi^1(z), \ldots, \Psi^\lambda(z)$, где $\lambda = \varkappa_1$ или $\lambda = \varkappa_1 + \varkappa_2$ — сумма положительных частных индексов.

Условие (4) гарантирует, что векторы $(\Psi^1(z))^*, \ldots, (\Psi^\lambda(z))^*$ также являются решениями однородной задачи (3). Это позволяет построить 2λ симметричных решений этой задачи (множитель $1/2$ для решений однородной системы можно опустить):

$$\left[\Psi^1(z) + (\Psi^1(z))^*\right], \quad \ldots, \quad \left[\Psi^\lambda(z) + (\Psi^\lambda(z))^*\right], \tag{6}$$

$$i\left[\Psi^1(z) - (\Psi^1(z))^*\right], \quad \ldots, \quad i\left[\Psi^\lambda(z) - (\Psi^\lambda(z))^*\right].$$

Покажем, что среди этих решений имеется λ линейно независимых над полем $\mathbb{R}$. Именно они и образуют базис пространства симметричных решений однородной задачи (3).

Легко видеть, что система (6) является полной в пространстве над $\mathbb{C}$ всех решений однородной задачи (3) и полной в пространстве над $\mathbb{R}$ всех симметричных решений однородной задачи (3). Поэтому ранг над $\mathbb{C}$ системы (6) равен λ. С другой стороны, легко проверить, что линейная независимость над $\mathbb{C}$ любой системы симметричных векторов равносильна линейной независимости над $\mathbb{R}$. Поэтому ранг системы (6) над $\mathbb{R}$ также равен λ. По этой причине мы можем далее не уточнять, над каким полем рассматривается линейная независимость любой подсистемы системы (6).

Таким образом, размерность l пространства всех симметричных решений однородной задачи (3) и пространства всех решений однородной задачи (2) совпадает с суммой λ положительных частных индексов. Поэтому для нахождения числа l нужно указать способ явного вычисления частных индексов $\varkappa_1$, $\varkappa_2$.

Поскольку система (6) является полной в пространстве симметричных решений однородной задачи (3), любое симметричное решение является линейной комбинацией с действительными коэффициентами кусочно-аналитических векторов этой системы. Значит, подобным образом мы можем найти и общее решение однородной задачи Маркушевича. Нетрудно убедиться в том, что базис системы (6) можно найти за конечное число линейно-алгебраических операций. Однако указать заранее количество этих операций можно только в некоторых частных случаях, например, когда коэффициент $b_1(t)$ является рациональной функцией. Поэтому, хотя полную систему (6) мы далее построим явно, найти ее базис можно только эффективно. Однако если ограничиться записью произвольного решения однородной задачи в виде линейной комбинации векторов из (6), то можно считать, что задача решена явно.

Чтобы найти общее решение неоднородной задачи (2), нам осталось выяснить, когда эта задача разрешима, и отыскать любое ее частное решение. Как уже отмечалось, неоднородная задача (2) разрешима тогда и только тогда, когда разрешима соответствующая матричная неоднородная задача Римана (3). Известно (см., например, [2]), что задача (3) разрешима безусловно (т. е. при любой правой части $F(t)$), только если индексы $\varkappa_1$, $\varkappa_2$ являются неотрицательными. В этом случае кусочно-аналитический вектор $\Psi(z) = X(z)\Omega(z)$ является решением неоднородной задачи (3). Здесь $\Omega(z)$ находится по формуле

$$\Omega(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma}\frac{X_+^{-1}(t)F(t)}{t-z}dt.$$

Таким образом, решение неоднородной задачи Римана имеет вид

$$\Psi(z) = \begin{cases} X_+(z)\Omega_+(z), & z \in D_+, \\ X_-(z)\Omega_-(z), & z \in D_-. \end{cases} \tag{7}$$

Теперь мы можем отыскать симметричное решение:

$$\frac{1}{2}\left[\Psi(z) + \Psi^*(z)\right] = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}\Psi_1(z) + \Psi_2^*(z) \\ \Psi_2(z) + \Psi_1^*(z)\end{pmatrix}$$

задачи (3) и решение $\frac{1}{2}\left[\Psi_1(z) + \Psi_2^*(z)\right]$ неоднородной задачи Маркушевича (2).

Если среди индексов $\varkappa_1$, $\varkappa_2$ есть отрицательные, то неоднородная задача (3) разрешима тогда и только тогда, когда правая часть $F(t)$ удовлетворяет некоторым условиям разрешимости. При $\varkappa_1 \geq 0$, $\varkappa_2 < 0$ эти условия состоят в том, что элемент $\Omega_2(z)$ кусочно-аналитического вектора $\Omega(z)$ должен иметь в бесконечно удаленной точке нуль, порядка не ниже чем $|\varkappa_2| + 1$. Если же $\varkappa_1 < 0$, $\varkappa_2 < 0$, то к этому условию добавляется требование, что $\Omega_1(z)$ имеет в бесконечности нуль порядка, не ниже чем $|\varkappa_1| + 1$. Равенства нулю соответствующих лорановских коэффициентов функций $\Omega_1(z)$, $\Omega_2(z)$ и есть условия разрешимости. Таким образом, число p условий разрешимости задачи (2) равно сумме μ отрицательных частных индексов, взятой с обратным знаком. Отметим, что p — это размерность над $\mathbb{R}$ пространства решений однородной задачи, союзной к задаче (2)[1, 2]. Однако если факторизация $G(t)$ известна, то нет необходимости обращаться к исследованию союзной задачи.

При выполнении условий разрешимости кусочно-аналитический вектор (7) по-прежнему является решением неоднородной задачи (3), а значит, $\frac{1}{2}\left[\Psi_1(z) + \Psi_2^*(z)\right]$ будет решением исходной задачи (2).

Итак, для нахожения важных характеристик l, p задачи (2) и построения ее общего решения достаточно уметь явно находить частные индексы и строить левую факторизацию матрицы-функции $G(t)$. В следующем разделе мы сделаем это методами линейной алгебры.

2. ЯВНОЕ ПОСТРОЕНИЕ ФАКТОРИЗАЦИИ $G(t)$

Напомним, что функция $b_1(t)$ удовлетворяет условию б), т. е. является граничным значением функции, мероморфной в круге D_+.

Выделив из мероморфной функции $zb_1(z)$ главные части рядов Лорана в окрестности ее полюсов, мы можем представить ее в виде

$$zb_1(z) = \frac{p(z)}{q(z)} + \beta_+(z),$$

где $p(z)$, $q(z)$ — взаимно простые многочлены, а $\beta_+(z)$ — аналитическая в D_+ функция, непрерывно продолжимая на контур Г. Дробь $\dfrac{p(z)}{q(z)}$ является правильной, все нули $q(z)$ лежат в открытом круге D_+.

Нетрудно проверить, что на контуре Γ справедливо тождество

$$G(t) = t^{\varkappa} \begin{pmatrix} 1 & \beta_+(t) \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 - \left|\dfrac{p(t)}{q(t)}\right|^2 & \dfrac{p(t)}{q(t)} \\ -\overline{\left(\dfrac{p(t)}{q(t)}\right)} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\overline{\beta_+(t)} & 1 \end{pmatrix}. \tag{8}$$

Так как $\overline{\beta_+(t)}$ — граничное значение аналитической в D_- функции $\overline{\beta_+(\overline{z}^{\,-1})}$, то левый и правый множители в этом тождестве являются факторизационными, т. е. это матрицы-функции, аналитические и обратимые в областях D_+, D_- соответственно. Таким образом, факторизация $G(t)$ явно приведена к факторизации рациональной матрицы-функции. Если $q(z) \equiv 1$, то $p(z) \equiv 0$, и равенство (8) уже дает искомую факторизацию $G(t)$.

Далее будем считать, что $N = \deg q(z) \geq 1$. Так как $p(z)$, $q(z)$ – взаимно простые многочлены, то существуют такие многочлены $u_1(z)$, $v_1(z)$, что выполняется равенство

$$p(z)u_1(z) + q(z)v_1(z) = 1. \tag{9}$$

Если принять обычное соглашение, что $v_1(z) \equiv 0$ при $\deg v_1(z) < 0$, то можно потребовать, чтобы $\deg u_1(z) < \deg q(z)$ и $\deg v_1(z) < \deg p(z)$. Тогда решение $u_1(z)$, $v_1(z)$ уравнения Безу (9) будет находиться единственным образом. Построить его можно с помощью алгоритма Евклида. Кроме того, коэффициенты многочленов $u_1(z)$, $v_1(z)$ можно отыскать, решая систему линейных алгебраических уравнений, матрицей которой является результантная матрица многочленов $p(z)$, $q(z)$. Поэтому $u_1(z)$, $v_1(z)$ в соответствии с нашим определением явного решения находятся явно.

Используем решение уравнения Безу (9) для дальнейшего упрощения задачи факторизации. Справедливы следующие легко проверяемые тождества:

$$\begin{pmatrix} 1 - \left|\dfrac{p(t)}{q(t)}\right|^2 & \dfrac{p(t)}{q(t)} \\ -\overline{\left(\dfrac{p(t)}{q(t)}\right)} & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1(t) & p(t) \\ -u_1(t) & q(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q(t) & 0 \\ u_1(t) - \overline{p(t)}|q(t)|^{-2} & q^{-1}(t) \end{pmatrix} = \tag{10}$$

$$= \begin{pmatrix} v_1(t) & p(t) \\ -u_1(t) & q(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t^N & 0 \\ t^N\alpha(t) & t^{-N} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t^{-N}q(t) & 0 \\ 0 & t^N q^{-1}(t) \end{pmatrix}.$$

Здесь $\alpha(t) = u_1(t)q^{-1}(t) - \overline{p(t)}\,(\overline{q(t)})^{-1}q^{-2}(t)$, и левый (правый) множитель в этом представлении является аналитическим в области D_+ (D_-), а его определитель равен 1, т. е. данный множитель является факторизационным. Поэтому мы можем сосредоточиться на факторизации среднего множителя.

Так как на единичной окружности $\overline{t} = t^{-1}$, то $\alpha(t)$ является граничным значением рациональной функции $\alpha(z)$. Мы можем представить ее в виде $\alpha(z) = \alpha_+(z) + \alpha_-(z)$, где $\alpha_\pm(z)$ — рациональные функции, аналитические в областях $D_\pm$ и $\alpha_-(\infty) = 0$. Ясно, что это представление есть алгебраический вариант формулы Сохоцкого – Племеля. Найти $\alpha_\pm(z)$ можно, например, если разложить $\alpha(z)$ на простейшие дроби и сложить слагаемые с полюсами в $D_\mp$ соответственно. Однако если требуется отыскать точное решение с помощью операций рациональной арифметики, то чтобы применить такой способ получения формулы Сохоцкого – Племеля, нужно будет наложить неоправданно жесткое условие принадлежности полюсов $q(z)$ полю $\mathbb{Q}(i)$.

По этой причине мы будем использовать другой способ получения разложения $\alpha(z)$, который не использует явного вычисления полюсов $q(z)$. С каждым многочленом $q(z) = q_0 + q_1 z + \ldots + q_N z^N$ ассоциируем многочлен $q_*(z) = z^N\overline{q(\overline{z}^{\,-1})} = \overline{q_0}z^N + \overline{q_1}z^{N-1} + \ldots + \overline{q_N}$. Нули многочлена $q_*(z)$ симметричны относительно единичной окружности Γ нулям $q(z)$. Поэтому если все нули $q(z)$ лежат в области D_+, то нули $q_*(z)$ принадлежат D_-, и $q(z)$, $q_*(z)$ взаимно просты. Кроме того, на Γ имеем $\overline{q(t)} = t^{-N}q_*(t)$. Значит, на единичной окружности $\alpha(t)$ совпадает с правильной рациональной дробью

$$\alpha(z) = \frac{u_1(z)}{q(z)} - \frac{z^{N-M}p_*(z)}{q_*(z)q^2(z)},$$

где $M = \deg p(z)$.

Функция $\dfrac{u_1(z)}{q(z)}$ является аналитической в D_- и исчезающей на бесконечности. Таким образом, только второе слагаемое в этой дроби требует разложения по формуле Сохоцкого – Племеля. Пусть $u_2(z)$, $v_2(z)$ — решение уравнения Безу

$$q_*(z)u_2(z) + q^2(z)v_2(z) = 1. \tag{11}$$

Это решение существует в силу взаимной простоты многочленов $q_*(z)$, $q^2(z)$. Умножив уравнение (11) на $\dfrac{z^{N-M}p_*(z)}{q_*(z)q^2(z)}$, мы получим

$$\frac{z^{N-M}p_*(z)}{q_*(z)q^2(z)} = \frac{z^{N-M}p_*(z)v_2(z)}{q_*(z)} + \frac{z^{N-M}p_*(z)u_2(z)}{q^2(z)}.$$

Слагаемые, стоящие в правой части этого равенства, вообще говоря, — неправильные рациональные дроби, а левая часть — правильная дробь. Поэтому целые части дробей $\dfrac{z^{N-M}p_*(z)v_2(z)}{q_*(z)}$, $\dfrac{z^{N-M}p_*(z)u_2(z)}{q^2(z)}$ должны взаимно сокращаться. Если для рациональной дроби $R(z)$ мы обозначим через $\{R(z)\}$ ее правильную рациональную часть, полученную отбрасыванием в $R(z)$ целой части, то

$$\frac{z^{N-M}p_*(z)}{q_*(z)q^2(z)} = \left\{\frac{z^{N-M}p_*(z)v_2(z)}{q_*(z)}\right\} + \left\{\frac{z^{N-M}p_*(z)u_2(z)}{q^2(z)}\right\}.$$

Здесь первое (второе) слагаемое в этом равенстве является аналитическим в D_+ (D_-). Заметим, что выделение целой части из неправильной рациональной дроби может быть осуществлено с помощью операций точной арифметики.

Таким образом, $\alpha(z) = \alpha_+(z) + \alpha_-(z)$, где

$$\alpha_+(z) = -\left\{\frac{z^{N-M}p_*(z)v_2(z)}{q_*(z)}\right\}, \qquad \alpha_-(z) = \frac{u_1(z)}{q(z)} - \left\{\frac{z^{N-M}p_*(z)u_2(z)}{q^2(z)}\right\}, \tag{12}$$

— есть требуемое разложение $\alpha(z)$.

Теперь мы можем сделать еще один шаг в построении факторизации $G(t)$:

$$\begin{pmatrix} t^N & 0 \\ t^N\alpha(t) & t^{-N} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \alpha_+(t) & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t^N & 0 \\ t^N\alpha_-(t) & t^{-N} \end{pmatrix}. \tag{13}$$

Для дальнейшего отщепления факторизационных множителей функцию $\alpha_-(z)$ разложим в ряд Лорана в окрестности бесконечно удаленной точки и представим ее в виде

$$\alpha_-(z) = \frac{\alpha_1}{z} + \ldots + \frac{\alpha_{2N-1}}{z^{2N-1}} + \frac{1}{z^{2N}}\alpha_-^0(z),$$

где $\alpha_-^0(z)$ — аналитическая в D_- функция, а коэффициенты α_k находятся по формулам

$$\alpha_k = -\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma} \tau^{k-1}\alpha(\tau)d\tau, \quad k = 1, 2, \ldots, 2N-1. \tag{14}$$

Поскольку $\alpha_-(z)$ — рациональная дробь, то на самом деле нахождение коэффициентов α_k не требует квадратур и легко может быть осуществлено точно алгебраическими методами.

Введем многочлен $P_{2N-1}(z) = \alpha_{2N-1}z + \ldots + \alpha_1 z^{2N-1}$. Тогда

$$\begin{pmatrix} t^N & 0 \\ t^N\alpha_-(t) & t^{-N} \end{pmatrix} = t^{-N}\begin{pmatrix} t^{2N} & 0 \\ P_{2N-1}(t) & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \alpha_-^0(t) & 1 \end{pmatrix}. \tag{15}$$

Собирая теперь формулы (8), (10), (13), (15) в одну, мы приходим к следующему представлению $G(t)$:

$$G(t) = t^{\varkappa - N}\begin{pmatrix} v_1(t) - u_1(t)\beta_+(t) + tq(t)b_1(t)\alpha_+(t) & tq(t)b_1(t) \\ q(t)\alpha_+(t) - u_1(t) & q(t) \end{pmatrix} \times$$

$$\times \begin{pmatrix} t^{2N} & 0 \\ P_{2N-1}(t) & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t^{-N}q(t) & 0 \\ t^{-N}q(t)\alpha_-^0(t) - t^N q^{-1}(t)\overline{\beta_+(t)} & t^N q^{-1}(t) \end{pmatrix}. \tag{16}$$

Правый и левый множители здесь являются факторизационными. Таким образом, факторизация $G(t)$ явно сведена к факторизации среднего полиномиального множителя:

$$\mathcal{P}(t) = \begin{pmatrix} t^{2N} & 0 \\ P_{2N-1}(t) & 1 \end{pmatrix}.$$

Для решения последней задачи воспользуемся методом существенных многочленов, специально разработанным для явного построения факторизации мероморфных матриц-функций [11–13].

Определим понятия индексов и существенных многочленов произвольной числовой последовательности $\alpha_{2N-1}, \ldots, \alpha_1$ следующим образом. Введем последовательность прямоугольных теплицевых матриц $T_k = \|\alpha_{2N-i+j}\|_{\substack{i=k,\ldots,2N-1 \\ j=0,\ldots,k-1}}$, $1 \le k \le 2N-1$.

Определение 1. Пусть $r = \mathrm{rank} T_N$. Числа $\mu_1 = r$, $\mu_2 = 2N - r$ будем называть *индексами* последовательности $\alpha_{2N-1}, \ldots, \alpha_1$.

В частности, для нулевой последовательности $\mu_1 = 0$, $\mu_2 = 2N$, а для последовательности, состоящей из одного числа $\alpha_1 \neq 0$ (при $N = 1$), $\mu_1 = \mu_2 = 1$.

Определение 2. Многочлены $R_1(t)$, $R_2(t)$ назовем *существенными многочленами* последовательности $\alpha_{2N-1}, \ldots, \alpha_1$, если

• их степени не превосходят μ_1, μ_2 соответственно;

• для $j = 1, 2$ существуют многочлены $\alpha_j^-(t)$ от t^{-1} и $\beta_j^+(t)$ от t степени не выше $\mu_j - 1$ такие, что справедливы разложения

$$P_{2N-1}(t) R_j(t) = t^{\mu_j} \alpha_j^-(t) + t^{2N} \beta_j^+(t), \tag{17}$$

где $P_{2N-1}(t) = \sum\limits_{k=1}^{2N-1} \alpha_{2N-k} t^k$ — производящая функция последовательности;

• выполняется неравенство $\sigma_0 := \beta_1^+(0) R_2(0) - \beta_2^+(0) R_1(0) \neq 0$.

Для нулевой последовательности мы будем брать $R_1(t) = 1$, $R_2(t) = 0$, $\alpha_1^-(t) = \beta_1^+(t) = 0$, $\alpha_2^-(t) = 1$, $\beta_2^+(t) = -1$. Для последовательности $\alpha_1 \neq 0$ (при $N = 1$) положим $R_1(t) = 1$, $R_2(t) = -t$, $\alpha_1^-(t) = \alpha_1$, $\beta_1^+(t) = 0$, $\alpha_2^-(t) = 0$, $\beta_2^+(t) = -\alpha_1$. Все условия определения при этом выполнены. Наконец, при $N = 0$ будем считать, что $P_{2N-1}(z) \equiv 0$, и примем такое же определение индексов и существенных многочленов, как для нулевой последовательности. Дальше это позволит нам не формулировать отдельно для данных случаев теорему о факторизации $G(t)$.

При $N \ge 2$ многочлены $R_1(t), R_2(t)$ существуют для любой ненулевой последовательности. Определение 2 на самом деле является характеристическим свойством существенных многочленов. Явно они строятся методами линейной алгебры следующим образом (подробнее см., например, [12]).

При $\mu_1 = \mu_2$ (т. е. при $r = N$) ядро $\ker T_{N+1}$ матрицы T_{N+1} имеет размерность 2. Если векторы R_1, R_2 образуют произвольный базис этого пространства, то их производящие многочлены $R_1(t), R_2(t)$ являются существенными многочленами последовательности.

Пусть $\mu_1 < \mu_2$ (т. е. $r < N$). Тогда пространство $\ker T_{\mu_1+1}$ одномерно, производящий многочлен $R_1(t)$ его базиса R_1 есть первый существенный многочлен. Далее, в пространстве $\ker T_{\mu_2+1}$ можно найти такой вектор R_2, что производящий многочлен $R(t)$ любого вектора $R \in \ker T_{\mu_2+1}$ может быть представлен в виде $R(t) = q(t)R_1(t) + R_2(t)$, где $q(t)$ — многочлен степени не выше $\mu_2 - \mu_1$. Производящий многочлен $R_2(t)$ и является вторым существенным многочленом. Таким образом, нахождение существенных многочленов сводится к решению систем линейных однородных алгебраических уравнений с теплицевыми матрицами T_k. Многочлены $\alpha_j^-(t)$, $\beta_j^+(t)$ определяются тогда разложением (17) однозначно.

Теперь мы можем получить основной результат этого раздела.

Теорема 1. *Пусть $r = \mathrm{rank} T_N$, и $R_1(t)$, $R_2(t)$ — существенные многочлены последовательности $\alpha_{2N-1}, \ldots, \alpha_1$, а $\mu_1 = r$, $\mu_2 = 2N - r$ — ее индексы. Тогда левая факторизация Винера – Хопфа $G(t) = G_+(t)d(t)G_-(t)$ строится по формулам*

$$G_+(t)=\begin{pmatrix} v_1(t)-u_1(t)\beta_+(t)+tq(t)b_1(t)\alpha_+(t) & tq(t)b_1(t)\\ q(t)\alpha_+(t)-u_1(t) & q(t)\end{pmatrix}\begin{pmatrix} R_1(t) & -R_2(t)\\ \beta_1^+(t) & -\beta_2^+(t)\end{pmatrix},$$

$$d(t)=\begin{pmatrix} t^{\varkappa+N-r} & 0\\ 0 & t^{\varkappa-N+r}\end{pmatrix},$$

$$G_-(t)=\frac{1}{\sigma_0}\begin{pmatrix} \alpha_2^-(t) & t^{-\mu_2}R_2(t)\\ \alpha_1^-(t) & t^{-\mu_1}R_1(t)\end{pmatrix}\begin{pmatrix} t^{-N}q(t) & 0\\ t^{-N}q(t)\alpha_-^0(t)-t^Nq^{-1}(t)\overline{\beta_+(t)} & t^Nq^{-1}(t)\end{pmatrix}.$$

Доказательство. Построим факторизацию $\mathcal{P}(t)$ в терминах индексов и существенных многочленов.

Из разложений (17) легко следует тождество

$$\begin{pmatrix} -\beta_2^+(t) & R_2(t)\\ -\beta_1^+(t) & R_1(t)\end{pmatrix}\begin{pmatrix} t^{2N} & 0\\ P_{2N-1}(t) & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} t^{\mu_2} & 0\\ 0 & t^{\mu_1}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha_2^-(t) & t^{-\mu_2}R_2(t)\\ \alpha_1^-(t) & t^{-\mu_1}R_1(t)\end{pmatrix}. \tag{18}$$

Левый (правый) множитель в левой (правой) части этого равенства является аналитическим в области D_+ (D_-). Переходя к определителям и учитывая равенство $\mu_1+\mu_2=2N$, получаем по теореме Лиувилля:

$$\beta_1^+(t)R_2(t)-\beta_2^+(t)R_1(t)=t^{-\mu_1}\alpha_2^-(t)R_1(t)-t^{-\mu_2}\alpha_1^-(t)R_2(t)\equiv\mathrm{const}.$$

Значит,

$$\beta_1^+(t)R_2(t)-\beta_2^+(t)R_1(t)=\beta_1^+(0)R_2(0)-\beta_2^+(0)R_1(0)=\sigma_0\neq 0,$$

и потому левый и правый множители в тождестве (18) являются факторизационными. Осталось переписать (18) в виде

$$\mathcal{P}(t)=\frac{1}{\sigma_0}\begin{pmatrix} R_1(t) & -R_2(t)\\ \beta_1^+(t) & -\beta_2^+(t)\end{pmatrix}\begin{pmatrix} t^{\mu_2} & 0\\ 0 & t^{\mu_1}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha_2^-(t) & t^{-\mu_2}R_2(t)\\ \alpha_1^-(t) & t^{-\mu_1}R_1(t)\end{pmatrix},$$

учесть определение индексов μ_1, μ_2 и представление (16). □

Наше определение индексов и существенных многочленов таково, что при $N=0$ и для нулевой последовательности $\alpha_{2N-1},\dots,\alpha_1$ мы получаем тривиальную факторизацию $\mathcal{P}(t)$, а при $N=1$ — факторизацию

$$\begin{pmatrix} t^2 & 0\\ \alpha_1 t & 1\end{pmatrix}=\frac{t}{\alpha_1}\begin{pmatrix} 1 & t\\ 0 & \alpha_1\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -1\\ \alpha_1 & t^{-1}\end{pmatrix}.$$

Зная факторизацию, мы можем построить каноническую матрицу:

$$X(z)=\begin{pmatrix} \chi_{11}(z) & \chi_{12}(z)\\ \chi_{21}(z) & \chi_{22}(z)\end{pmatrix}$$

однородной матричной задачи Римана. Выпишем в явном виде ее элементы:

$$\chi_{11}(z)=\begin{cases} \left[v_1(z)-u_1(z)\beta_+(z)\right]R_1(z)+zq(z)b_1(z)\left[\alpha_+(z)R_1(z)+\beta_1^+(z)\right], & z\in D_+,\\ z^{-\varkappa}q^{-1}(z)R_1(z) & z\in D_-,\end{cases}$$

$$\chi_{12}(z)=\begin{cases} -\left[v_1(z)-u_1(z)\beta_+(z)\right]R_2(z)-zq(z)b_1(z)\left[\alpha_+(z)R_2(z)+\beta_2^+(z)\right], & z\in D_+,\\ -z^{-\varkappa}q^{-1}(z)R_2(z,) & z\in D_-,\end{cases}$$

$$\chi_{21}(z)=\begin{cases} q(z)\left[\alpha_+(z)R_1(z)+\beta_1^+(z)\right]-u_1(z)R_1(z), & z\in D_+,\\ z^{-\varkappa}q^{-1}(z)R_1(z)\overline{\beta_+(\overline{z}^{\;-1})}-z^{-\varkappa}q(z)\left[\alpha_-(z)R_1(z)-\beta_1^+(z)\right], & z\in D_-,\end{cases}$$

$$\chi_{22}(z)=\begin{cases} -q(z)\left[\alpha_+(z)R_2(z)+\beta_2^+(z)\right]+u_1(z)R_2(z), & z\in D_+,\\ -z^{-\varkappa}q^{-1}(z)R_2(z)\overline{\beta_+(\overline{z}^{\;-1})}+z^{-\varkappa}q(z)\left[\alpha_-(z)R_2(z)-\beta_2^+(z)\right], & z\in D_-.\end{cases}$$

Итак, для построения канонической матрицы $X(z)$ нам потребовались следующие данные:

1. Сумма $\dfrac{p(z)}{q(z)}$ главных частей рядов Лорана мероморфной функции $zb_1(z)$.

2. Решения $u_1(z)$, $v_1(z)$ и $u_2(z)$, $v_2(z)$ уравнений Безу (9) и (11) соответственно.

3. Рациональные функции $\alpha_+(z)$, $\alpha_-(z)$, определяемые формулами (12).

4. Коэффициенты $\alpha_1, \dots, \alpha_{2N-1}$ разложения $\alpha_-(z)$ в окрестности бесконечности, определяемые по формуле (14).

5. Ранг r теплицевой матрицы T_N и многочлены $R_1(z)$, $R_2(z)$, $\beta_1^+(z)$, $\beta_2^+(z)$ из определения 2 существенных многочленов.

Данные 2–5 определяются явным образом методами линейной алгебры. Если многочлены $p(z)$ и $q(z)$ имеют коэффициенты из поля $\mathbb{Q}(i)$, то указанные данные могут быть найдены точно средствами компьютерной математики с использованием только рациональной арифметики. В этом случае мы можем говорить о точном построении факторизации Винера – Хопфа $G(t)$.

3. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ МАРКУШЕВИЧА

Рассмотрим вначале решение однородной задачи Маркушевича (2).

Теорема 2. *Если $\varkappa \le r - N$, то однородная задача Маркушевича допускает в классе исчезающих на бесконечности кусочно-аналитических функций только нулевое решение.*

Если $r - N < \varkappa \le N - r$, то размерность над $\mathbb{R}$ пространства решений однородной задачи Маркушевича равна $\varkappa + N - r$. Любое решение $\varphi(z)$ этой задачи имеет вид

$$\varphi(z) = \pi_1(z)\chi_{11}(z) + z\pi_1^*(z)\chi_{21}^*(z), \tag{19}$$

где $\pi_1(z)$ — произвольный многочлен с комплексными коэффициентами степени не выше $\varkappa + N - r - 1$, а $\chi_{11}(z)$, $\chi_{21}(z)$ — элементы канонической матрицы $X(z)$.

При $\varkappa > N - r$ пространство решений однородной задачи Маркушевича имеет размерность $2\varkappa$, и любое решение может быть представлено в виде

$$\varphi(z) = \pi_1(z)\chi_{11}(z) + \pi_2(z)\chi_{12}(z) + z\pi_1^*(z)\chi_{21}^*(z) + z\pi_2^*(z)\chi_{22}^*(z). \tag{20}$$

Здесь $\pi_1(z)$, $\pi_2(z)$ — произвольные многочлены с комплексными коэффициентами степени не выше $\varkappa + N - r - 1$, $\varkappa - N + r - 1$ соответственно.

Доказательство. Размерность l пространства решений, как было показано в разд. 1, совпадает с суммой положительных частных индексов $\varkappa_1 = \varkappa + N - r$, $\varkappa_2 = \varkappa - N + r$ матрицы-функции $G(t)$. При $\varkappa \le r - N$ имеем $\varkappa_1 \le 0$, $\varkappa_2 \le 0$ и $l = 0$. Если $r - N < \varkappa \le N - r$, то $\varkappa_1 > 0$, $\varkappa_2 \le 0$ и $l = \varkappa_1$. Наконец, $\varkappa_1 > 0$, $\varkappa_2 > 0$ и $l = \varkappa_1 + \varkappa_2 = 2\varkappa$ при $\varkappa > N - r$.

Рассмотрим случай $r - N < \varkappa \le N - r$. В соответствии с разд. 1 базис пространства решений однородной матричной задачи Римана (3) состоит из вектор-функций

$$X^1(z) = \begin{pmatrix} \chi_{11}(z) \\ \chi_{21}(z) \end{pmatrix}, \quad \dots, \quad z^{\varkappa_1 - 1}X^1(z) = z^{\varkappa + N - r - 1}\begin{pmatrix} \chi_{11}(z) \\ \chi_{21}(z) \end{pmatrix}.$$

Здесь $X^1(z)$ — первый столбец канонической матрицы $X(z)$, которая была найдена в явном виде в предыдущем разделе. Составим из этих векторов систему (6), порождающую пространство симметричных решений однородной задачи Римана. Тогда первые компоненты вектор-функций, входящих в (6), дают следующую систему функций:

$$\begin{aligned} &\chi_{11}(z) + \chi_{21}^*(z), \quad \dots, \quad z^{\varkappa+N-r-1}\chi_{11}(z) + z^{-\varkappa-N+r+1}\chi_{21}^*(z), \\ &i[\chi_{11}(z) - \chi_{21}^*(z)], \quad \dots, \quad i[z^{\varkappa+N-r-1}\chi_{11}(z) - z^{-\varkappa-N+r+1}\chi_{21}^*(z)], \end{aligned} \tag{21}$$

порождающую пространство решений однородной задачи Маркушевича. Таким образом, любое решение $\varphi(z)$ этой задачи записывается в виде линейной комбинации с действительными коэффициентами функций из (21). Это представление $\varphi(z)$ можно записать в виде (19). Аналогично доказывается формула (20). $\square$

Замечание. Формулы (19), (20) доставляют общее решение однородной задачи Маркушевича. Они содержат l произвольных комплексных констант. Это не противоречит тому, что l есть размерность над действительным полем $\mathbb{R}$. В соответствии с нашим пониманием явного решения мы не стали выделять базис из системы (6), а воспользовались тем, что это порождающая система для пространства симметричных решений однородной задачи Римана.

Обратимся теперь к решению неоднородной задачи Маркушевича. На контуре Γ определим функции

$$\omega_1(t) = \frac{1}{\sigma_0}[\chi_{22}^+(t)f_1(t) - t^{\varkappa-1}q^{-1}(t)R_2(t)\overline{f_1(t)}], \qquad \omega_2(t) = -\frac{1}{\sigma_0}[\chi_{21}^+(t)f_1(t) - t^{\varkappa-1}q^{-1}(t)R_1(t)\overline{f_1(t)}]$$

и введем кусочно-аналитические функции $\Omega_j(z)$, $j = 1, 2$, как интегралы типа Коши с плотностью $\omega_j(t)$:

$$\Omega_j(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{\omega_j(t)dt}{t-z}.$$

Теорема 3. *Неоднородная задача Маркушевича имеет единственное решение при любой правой части тогда и только тогда, когда $\varkappa = 0$, $r = N$. Это решение находится по формуле*

$$\varphi_0(z) = \frac{1}{2}[\chi_{11}(z)\Omega_1(z) + \chi_{12}(z)\Omega_2(z) + z\chi_{21}^*(z)\Omega_1^*(z) + z\chi_{22}^*(z)\Omega_2^*(z)]. \tag{22}$$

Задача имеет не более одного решения только при $\varkappa \le r - N$. При $\varkappa < 0$ решение существует тогда и только тогда, когда выполняются следующие $2|\varkappa|$ условия разрешимости:

$$\int_\Gamma t^{j-1}\omega_1(t)\,dt = 0, \qquad j = 1, 2, \dots, |\varkappa + N - r|, \tag{23}$$

$$\int_\Gamma t^{j-1}\omega_2(t)dt = 0, \qquad j = 1, 2, \dots, |\varkappa - N + r|.$$

Единственное решение в данном случае строится по формуле (22).

Задача разрешима при любой правой части только при $\varkappa \ge N - r$. Общее решение в этом случае имеет вид

$$\varphi(z) = \varphi_0(z) + \pi_1(z)\chi_{11}(z) + \pi_2(z)\chi_{12}(z) + z\pi_1^*(z)\chi_{21}^*(z) + z\pi_2^*(z)\chi_{22}^*(z),$$

где $\varphi_0(z)$ определяется формулой (22), *а $\pi_1(z)$, $\pi_2(z)$ — произвольные многочлены с комплексными коэффициентами степени не выше $\varkappa + N - r - 1$, $\varkappa - N + r - 1$ соответственно.*

Наконец, при $r - N < \varkappa < N + r$ формула

$$\varphi(z) = \varphi_0(z) + \pi_1(z)\chi_{11}(z) + z\pi_1^*(z)\chi_{21}^*(z),$$

где $\pi_1(z)$ — произвольный многочлен с комплексными коэффициентами степени не выше $\varkappa + N - r - 1$, дает общее решение задачи Маркушевича при выполнении следующих $|\varkappa - N + r|$ условий разрешимости

$$\int_\Gamma t^{j-1}\omega_2(t)dt = 0, \qquad j = 1, 2, \dots, |\varkappa - N + r|.$$

Доказательство. Из результатов разд. 2 следует, что неоднородная задача Маркушевича имеет единственное решение при любой правой части тогда и только тогда, когда соответствующая матричная задача Римана (3) имеет нулевые частные индексы $\varkappa_1$, $\varkappa_2$. Найденные в разд. 3 формулы для частных индексов показывают, что это равносильно условиям $\varkappa = 0$, $r = N$.

Определенные выше функции $\omega_1(t)$, $\omega_2(t)$ — это компоненты вектора $X_+^{-1}(t)F(t)$, где $F(t)$ — свободный член задачи Римана (3). Поэтому $\Psi(z) = X(z)\begin{pmatrix}\Omega_1(z)\\ \Omega_2(z)\end{pmatrix}$ — решение неоднородной задачи Римана (3). Составив симметричное решение $\frac{1}{2}[\Psi(z)+\Psi^*(z)]$ и взяв первую компоненту этого вектора, мы и приходим к формуле (22) для решения $\varphi_0(z)$ неоднородной задачи Маркушевича.

Задача Маркушевича имеет не более одного решения тогда и только тогда, когда $l = 0$, т.е. только при $\varkappa_1 \le 0$, $\varkappa_2 \le 0$. Учитывая, что $\varkappa_1 \ge \varkappa_2$, мы получаем условие $\varkappa_1 \le 0$, равносильное неравенству $\varkappa \le r - N$. Случай $\varkappa = 0$ мы уже рассмотрели выше. При $\varkappa < 0$ имеем $\varkappa_1 < 0$, $\varkappa_2 < 0$, и условие разрешимости задачи состоит в том, что $\Omega_1(z)$ имеет на бесконечности нуль порядка не ниже, чем $|\varkappa_1| + 1$, а $\Omega_2(z)$ — нуль порядка не ниже, чем $|\varkappa_2| + 1$. Равенства (23) и есть равенства нулю соответствующих лорановских коэффициентов функций $\Omega_1(z)$, $\Omega_2(z)$. Аналогичным образом могут быть доказаны остальные утверждения теоремы. $\square$

При решении неоднородной задачи Маркушевича мы не упоминали о возможности точного ее решения. Легко видеть, что это можно сделать, например, в случае, когда $f_1(t)$ — рациональная дробь с коэффициентами из $\mathbb{Q}(i)$.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (*проект* 07-01-96010).

Библиографический список

1. *Литвинчук Г.С.* Краевые задачи и сингулярные интегральные уравнения со сдвигом. М., 1977. 448 с.
2. *Векуа Н.П.* Системы сингулярных интегральных уравнений. М., 1970. 380 с.
3. *Сабитов И.Х.* Об общей краевой задаче линейного сопряжения на окружности // Сиб. мат. журн. 1964. Т. 5, № 1. С. 124–129.
4. *Патрушев А.А.* К задаче Маркушевича для односвязной области // Тр. семинара по краевым задачам. Казань, 1980. Вып.17. С. 110–123.
5. *Патрушев А.А.* Задача Маркушевича для одной бесконечно-связной области в классе автоморфных функций // Тр. семинара по краевым задачам. Казань, 1981. Вып. 18. С. 132–145.
6. *Патрушев А.А.* Краевая задача Маркушевича в классе автоморфных функций относительно циклической группы эллиптического типа // Краевые задачи и их приложения. Чебоксары, 1989. С. 76–79.
7. *Расулов К.М.* Об одном методе решения граничной задачи Маркушевича в классе аналитических функций // Исследования по краевым задачам комплексного анализа и дифференциальным уравнениям: межвуз. сб. науч. тр. Смоленск, 2001. Вып. 3. С. 98–108.
8. *Расулов К.М.* О решении обобщенной граничной задачи Маркушевича в классе аналитических функций // Системы компьютерной математики и их приложения: сб. тр. междунар. науч. конф. Смоленск, 2002. С. 137–142.
9. *Гахов Ф.Д.* Краевые задачи. М., 1963. 640 с.
10. *Чибрикова Л.П., Салехов Л.Г.* К решению одной общей задачи линейного сопряжения аналитических функций в случае алгебраических контуров // Тр. семинара по краевым задачам. Казань, 1968. Вып.5. С. 224–249.
11. *Адуков В.М.* Факторизация Винера – Хопфа мероморфных матриц-функций // Алгебра и анализ. 1992. Т. 4, вып. 1. С. 54–74.
12. *Адуков В.М.* Generalized inversion of block Toeplitz matrices // Linear Algebra Appl. 1998. Vol. 274. P. 85–124.
13. *Адуков В.М.* Факторизация Винера – Хопфа кусочно мероморфных матриц-функций // Мат. сб. 2009. Т. 200, № 8. С. 3–24.

УДК 519.853.3

ХАРАКТЕРИЗАЦИЯ УСТОЙЧИВОСТИ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ОБ АСФЕРИЧНОСТИ ВЫПУКЛОГО КОМПАКТА

С.И. Дудов, Е.А. Мещерякова

Саратовский государственный университет,
кафедра математической экономики
E-mail: DudovSI@info.sgu.ru

Рассматривается вопрос об устойчивости решения задачи об асферичности выпуклого компакта к погрешности задания этого компакта. Показано, что задача обладает устойчивостью оптимального значения целевой функции (показателя асферичности). Исследуются также свойства многозначного отображения, сопоставляющего выпуклому компакту множество центров его асферичности. Доказано, что это многозначное отображение полунепрерывного сверху всюду на пространстве выпуклых компактов. Приводится пример, показывающий, что полунепрерывности снизу может не быть.

Ключевые слова: асферичность, устойчивость решения, выпуклый компакт, многозначное отображение, полунепрерывность снизу (сверху).

The Characteristic of Stability of the Solution in the Problem of Convex Compact Set Asphericity

S.I. Dudov, E.A. Mesheryakova

Saratov State University,
Chair of Mathematical Economy
E-mail: DudovSI@info.sgu.ru

We consider the problem of stability of the solution in the problem of asphericity of a convex set with respect to the error of defining the compact set. It is shown that the optimal value of the criterion function (an asphericity indicator) is stable. Properties of the set-valued mapping, that puts to a convex compact compact set the centers of its asphericity are also investigated. It is proved that this mapping is semicontinious from above everywhere in the space of convex compact sets.

Key words: compact convex set, asphericity, stability, set-valued mapping, semicontinious above.