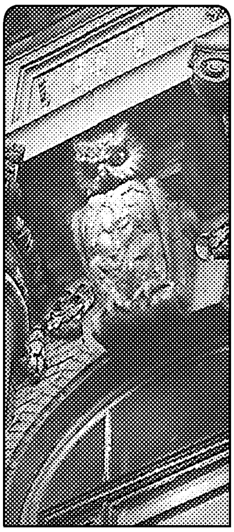
МАТЕМАТИКА



НАУЧНЫЙ ОТДЕЛ

УДК 517.51

О РАВНОМЕРНОЙ СХОДИМОСТИ ПРЕОБРАЗОВАННЫХ РЯДОВ ФУРЬЕ ПО МУЛЬТИПЛИКАТИВНЫМ СИСТЕМАМ

Н.Ю. Агафонова

Саратовский государственный университет,
кафедра теории вероятностей, математической статистики
и управления стохастическими процессами
E-mail: Agafonovanu@info.sgu.ru

Получены необходимые и достаточные условия равномерной Λ-суммируемости рядов Фурье – Виленкина функций из пространств Орлича $L_\Phi[0,1)$ и $L^1[0,1)$. Даны некоторые следствия для матриц с обобщенно-монотонными коэффициентами.

Ключевые слова: мультипликативные системы, ряд Фурье, равномерная сходимость, мультипликаторы, равномерная Λ-суммируемость.

On Uniform Convergence of Transformations of Fourier Series on Multiplicative Systems

N.Yu. Agafonova

Necessary and suffiecient conditions for uniform Λ-summability of Fourier – Vilenkin series of Functions from Orlicz spaces $L_\Phi[0,1)$ and $L^1[0,1)$ are obtained. Some corollaries for matrices with generalized monotone coeffiecients are given.

Key words: multiplicative systems, Fourier – Vilenkin series, uniform convergence, multipliers, uniform Λ-summability.

ВВЕДЕНИЕ

Пусть $\{p_n\}_{n=1}^{\infty}$ — последовательность натуральных чисел, такая что $2 \le p_n \le \mathbf{N}$ для всех $n \in \mathbb{N}$. Положим по определению $m_0 = 1$, $m_n = p_1 \dots p_n$ при $n \in \mathbb{N}$. Тогда каждое $x \in [0,1)$ имеет разложение

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} x_n/m_n, \quad 0 \le x_n < p_n, \quad x_n \in \mathbb{Z}. \tag{1}$$

Разложение (1) будет определяться однозначно, если для $x = k/m_l$, $k, l \in \mathbb{N}$, $k < m_l$, брать разложение с конечным числом ненулевых x_n. Если $y \in [0,1)$ имеет вид (1), то по определению $x \oplus y = z = \sum\limits_{n=1}^{\infty} z_n/m_n$, где $z_n = x_n + y_n (mod\, p_n)$, $0 \le z_n < p_n$, $z_n \in \mathbb{Z}$. Аналогично определяется $x \ominus y$. Если $k \in \mathbb{Z}_+$ записано в виде

$$k = \sum_{j=1}^{\infty} k_j m_{j-1}, \quad 0 \le k_j < p_j, \quad k_j \in \mathbb{Z}, \tag{2}$$

то для $x \in [0,1)$ полагаем по определению

$$\chi_k(x) = \exp\left(2\pi i \left(\sum_{j=1}^{\infty} x_j k_j/p_j\right)\right).$$

Известно, что $\{\chi_k(x)\}_{k=0}^{\infty}$ — ортонормированная, полная в $L[0,1)$

система [1, § 1.5] и что $\chi_n(x \oplus y) = \chi_n(x)\chi_n(y)$ для п.в. $y \in [0,1)$ при фиксированном $x \in [0,1)$ и $n \in \mathbb{Z}_+$. Коэффициенты Фурье и частичная сумма ряда Фурье по системе $\{\chi_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ задаются формулами

$$\hat{f}(n) = \int\limits_0^1 f(t)\overline{\chi_n(t)}\,dt, \quad n \in \mathbb{Z}_+ \quad \text{и} \quad S_n(f)(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \hat{f}(k)\chi_k(x), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Сумма $\sum\limits_{k=0}^{n-1} \chi_k(x) =: D_n(x)$ называется n-м ядром Дирихле. Пространство $L^p[0,1)$, $1 \le p < \infty$, состоит из измеримых функций, для которых конечна норма $\|f\|_p = \Big(\int\limits_0^1 |f(t)|^p\,dt\Big)^{\frac{1}{p}}$. Обобщением пространств L^p являются пространства Орлича. Пусть $\Phi(u)$ — выпуклая, непрерывная на $[0,\infty)$ функция, такая что

$$\Phi(0) = 0, \quad \lim_{u\to\infty} \frac{\Phi(u)}{u} = +\infty \quad \text{и} \quad \lim_{u\to 0} \frac{\Phi(u)}{u} = 0. \tag{3}$$

Функция $\Psi(v) = \sup\limits_{u\ge 0}(uv - \Phi(u))$ называется дополнительной, по Юнгу, функцией для $\Phi(u)$ и обладает такими же свойствами. Пространство $L_\Phi[0,1)$ состоит из измеримых функций, для которых конечна норма $\|f\|_\Phi = \left\{\sup\left|\int\limits_0^1 f(x)g(x)\,dx\right| : \int\limits_0^1 \Psi(|g(x)|)\,dx) \le 1\right\}$. Для $\Phi(u) = u^p/p, 1 < p < \infty$, пространство $L_\Phi[0,1)$ совпадает с пространством $L^p[0,1)$(с эквивалентной нормой). Подробнее об этих пространствах см. [2]. Хорошо известно, что для $f \in L^p[0,1), 1 < p < \infty$, верно $\|S_n(f)\|_p \le C\|f\|_p$ и, как следствие, $\lim\limits_{n\to\infty} \|f - S_n(f)\|_p = 0$ (см. например, [3]). Пусть $L_\Phi[0,1)$ – рефлексивное пространство, то есть Φ и Ψ удовлетворяют так называемому Δ_2-условию: $\Phi(2u) \le C\Phi(u)$, $\Psi(2u) \le C\Psi(u)$, $u \in [0,\infty)$. Тогда методами теории интерполяции [4] устанавливается, что

$$\|S_n(f)\|_\Phi \le C\|f\|_\Phi \quad \text{и} \quad \lim_{n\to\infty} \|f - S_n(f)\|_\Phi = 0. \tag{4}$$

Далее для $\Phi(t)$, $\Psi(t)$, удовлетворяющих Δ_2-условию, и $f \in L_\Phi[0,1)$, $g \in L_\Psi[0,1)$ будем использовать неравенство Гёльдера [2, § 9, теорема 9.3]

$$\|fg\|_1 \le \|f\|_\Phi \cdot \|g\|_\Psi.$$

Из этого неравенства и (4) следует, что для $f \in L_\Phi[0,1)$, $g \in L_\Psi[0,1)$ выполняется равенство Парсеваля

$$\int\limits_0^1 f(t)\overline{g(t)}\,dt = \sum_{i=0}^{\infty} \hat{f}(i)\overline{\hat{g}(i)}.$$

Будем рассматривать также пространство $B[0,1)$ измеримых ограниченных на $[0,1)$ функций с нормой $\|f\|_\infty = \sup\limits_{x\in[0,1)} |f(x)|$ и пространство $C^*[0,1)$ функций $f(x)$ со свойством $\lim\limits_{h\to 0} \|f(x \oplus h) - f(x)\|_\infty = 0$ (также с нормой $\|f\|_\infty$). Через $UC[0,1)$ обозначим пространство функций $f \in L^1[0,1)$, ряды Фурье которых по системе $\{\chi_n\}_{n=0}^{\infty}$ сходятся равномерно. Последовательность $\{\lambda_n\}_{n=0}^{\infty}$ называется мультипликатором класса (X,Y), если для любой $f \in X[0,1)$ ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \lambda_n \hat{f}(n)\chi_n(x)$ является рядом Фурье функции класса $Y[0,1)$. Пусть теперь $\{\lambda_{kn}\}_{k,n=0}^{\infty}$ — бесконечная матрица. Если для каждого $n \in \mathbb{Z}_+$ ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \lambda_{kn}\hat{f}(k)\chi_k(x)$ сходится равномерно к некоторой функции $g_n(x)$, а $g_n(x)$, в свою очередь, сходятся равномерно к $g(x)$, то будем писать, что ряд Фурье функции f равномерно $\Lambda-$суммируем.

Целью настоящей работы является получение критериев равномерной Λ-суммируемости для всех функций классов $L_\Phi[0,1)$ или $L^1[0,1)$. В тригонометрическом случае такие критерии для непрерывных функций были получены Карамата и Томичем [5], а для $f \in L_{2\pi}^p$ — Катаяма [6].

1. ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ УТВЕРЖДЕНИЯ

Важную роль в работе играет следующая теорема, являющаяся аналогом тригонометрических результатов Г. Гёса [7].

Лемма 1 [8, теорема 8]. *1) Пусть $\Phi(t)$ — выпуклая непрерывная функция на $\mathbb{R}_+$, удовлетворяющая условию* (3). *Тогда включение $\{\lambda_k\} \in (L_\Phi, UC)$ равносильно соотношению*

$$\|\Lambda_n\|_\Psi := \left\| \sum_{i=0}^{n-1} \lambda_i \chi_i \right\|_\Psi = O(1).$$

2) Включение $\{\lambda_k\} \in (L^1, UC)$ равносильно соотношению $\left\| \sum\limits_{i=0}^{n-1} \lambda_i \chi_i \right\|_\infty = O(1)$.

Лемма 2 [9]. *Ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k \chi_k(x)$ является рядом Фурье функции $f \in B[0,1)$ тогда и только тогда, когда $\left\|S_{m_n}\right\|_\infty := \left\| \sum\limits_{k=0}^{m_n-1} a_k \chi_k(x) \right\|_\infty$ ограничены.*

Лемма 3. *Пусть $\Phi(t)$ — выпуклая непрерывная функция на $\mathbb{R}_+$, удовлетворяющая условию* (3) *и Δ_2-условию вместе с дополнительной функцией Ψ. Тогда ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k \chi_k(x)$ является рядом Фурье функции $f \in L_\Phi[0,1)$ тогда и только тогда, когда $\left\|S_{m_n}\right\|_\Phi$ ограничены.*

Доказательство. Согласно сказанному во введении, для $f \in L_\Phi[0,1)$ верно $\lim\limits_{n\to\infty} \|f - S_n(f)\|_\Phi = 0$, откуда следует ограниченность $\left\|S_{m_n}\right\|_\Phi$. Обратно, пусть $\left\|S_{m_n}\right\|_\Phi \le M$. По теореме о слабой компактности шара в сопряженном пространстве существует $f \in L_\Phi[0,1)$ и подпоследовательность $\left\{n_i\right\}_{i=1}^{\infty} \subset \subset \mathbb{N}$, такие что $\lim\limits_{i\to\infty} \int\limits_0^1 \left(S_{m_{n_i}}(x) - f(x)\right) \overline{g(x)}\, dx = 0$ для всех $g \in L_\Psi[0,1)$. Подставляя в последнее равенство $g(x) = \chi_j(x)$, $j \in \mathbb{Z}_+$, получаем, что $a_j = \hat{f}(j)$, то есть $\sum\limits_{j=0}^{\infty} a_j \chi_j(x)$ является рядом Фурье функции $f \in L_\Phi[0,1)$.

Лемма 4 [10, §10]. *Пусть $\left\{\lambda_{kn}\right\}_{k,n=0}^{\infty}$ — нижнетреугольная матрица, такая что $\lim\limits_{n\to\infty} \lambda_{kn} = 1$ и $\left\|K_n\right\|_1 := \left\| \sum\limits_{i=0}^{n} \lambda_{in} \chi_i \right\|_1 = O(1)$. Тогда для любой $f \in C^*[0,1)$ последовательность $\left\{ \sum\limits_{i=0}^{n} \lambda_{in} \hat{f}(i) \chi_i(x) \right\}_{n=0}^{\infty}$ равномерно сходится к $f(x)$.*

2. ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Теорема 1. *Пусть $\Phi(x)$ удовлетворяет условиям леммы 3. Для того чтобы ряды Фурье всех функций $f \in L_\Phi[0,1)$ были равномерно Λ-суммируемы, необходимо и достаточно выполнение следующих условий:*

1) $\lim\limits_{n\to\infty} \lambda_{kn}$ существует для всех $k \in \mathbb{Z}_+$;

2) для всех $n \in \mathbb{Z}_+$ существует $K_n(t) \in L_\Psi[0,1)$ такое, что $\hat{K_n}(i) = \lambda_{in}$, $i \in \mathbb{Z}_+$, и $\|K_n\|_\Psi = O(1)$.

Доказательство. Необходимость. По условию для любого $n \in \mathbb{Z}_+$ верно $\{\lambda_{in}\}_{i=0}^{\infty} \in (L_\Phi, UC)$. По лемме 1 получаем, что $\|K_{in}\|_\Psi \le M_n < \infty$, где $K_{in}(x) := \sum\limits_{j=0}^{i-1} \lambda_{jn} \chi_j(x)$, $i \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{Z}_+$. Из условия $\|K_{in}\|_\Psi \le M_n$ по лемме 3, в свою очередь, следует, что ряд $\sum\limits_{j=0}^{\infty} \lambda_{jn} \chi_j(x)$ является рядом Фурье некоторой функции $K_n \in L_\Psi[0,1)$. Как отмечалось во введении, для любой пары функций из $L_\Phi[0,1)$ и $L_\Psi[0,1)$ выполняется равенство Парсеваля. Поэтому $\int\limits_0^1 f(x \ominus t) K_n(t)\, dt = \sum\limits_{j=0}^{\infty} \lambda_{jn} \hat{f}(j) \chi_j(x)$ для всех $x \in [0,1)$. Рассмотрим линейный функционал в $L_\Phi[0,1)$:

$$l_n(f) = \int_0^1 f(0 \ominus t) K_n(t)\, dt = \sum_{j=0}^{\infty} \lambda_{jn} \hat{f}(j). \tag{5}$$

Из условия следует, что ряд в правой части (5) сходится и суммы этих рядов сходятся при $n \to \infty$. Поскольку сопряженным к $L_\Phi[0,1)$ является $L_\Psi[0,1)$, то $\|K_n\|_\Psi$ ограничены. Кроме того, $l_n(\chi_k) = \int\limits_0^1 K_n(t)\overline{\chi_k(t)}\,dt = \lambda_{kn}$ сходится при $n \to \infty$. Таким образом, условия 1) и 2) выполнены.

Достаточность. Пусть $f \in L_\Phi[0,1)$, $\|K_n\|_\Psi \le M$ и $\{\lambda_{kn}\}_{k=0}^\infty$ сходится для любого $k \in \mathbb{Z}_+$. Тогда, согласно (4), $\|K_{in}\|_\Psi \le M_1$ для всех $i \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{Z}_+$. По лемме 1 ряд $\sum\limits_{j=0}^\infty \lambda_{jn}\hat{f}(j)\chi_j(x)$ сходится равномерно к некоторой $\alpha_n(x)$ при всех $n \in \mathbb{Z}_+$. Поэтому ряд в правой части (5) сходится для всех $f \in L_\Phi$. В силу неравенства Гёльдера и условия $\|K_n\|_\Psi \le M$ нормы l_n ограничены. При этом ясно, что $l_n(\chi_i)$ сходятся к $\lim\limits_{n\to\infty} \lambda_{in}$, то есть l_n сходится на плотном в $L_\Phi[0,1)$ пространстве полиномов $\mathcal{P}$ по системе $\{\chi_i\}_{i=0}^\infty$. Поэтому $\{l_n(f)\}_{n=0}^\infty$ сходится для любого $f \in L_\Phi[0,1)$.

Пусть $T_a f(t) = f(t \oplus a)$. Легко видеть, что $l_n(T_a f) = \alpha_n(a)$. Кроме того, из плотности $\mathcal{P}$ в $L_\Phi[0,1)$ легко вытекает, что $\lim\limits_{a\to 0}\|T_a f - f\|_\Phi = 0$ при $f \in L_\Phi[0,1)$. Если мы докажем, что $l_n(T_a f)$ сходится равномерно по $a \in [0,1)$, то достаточность будет доказана. Пусть $\delta = 1/m_k$ такое, что при $0 < h < \delta$ имеем $\|T_h f - f\|_\Phi < \varepsilon$. Тогда каждое $a \in [0,1)$ попадает в некоторый промежуток $[i/m_k, (i+1)/m_k)$, $i \in \mathbb{Z}_+ \cap [0, m_k)$. Тогда $|l_n(T_a f) - l_m(T_a f)| \le |l_n(T_a f) - l_n(T_{i/m_k} f)| + |l_n(T_{i/m_k} f) - l_m(T_{i/m_k} f)| + |l_m(T_{i/m_k} f) - l_m(T_a f)| = I_1 + I_2 + I_3$. Так как $\|l_n\| = \|K_n\|_\Psi \le M$, то $I_1 + I_3 \le 2M\|T_a f - T_{i/m_k} f\|_\Phi < 2M\varepsilon$. Если m_k фиксировано, то найдется $n_0(\varepsilon)$, такое что для всех $n, m > n_0$ и всех $i \in \mathbb{Z}_+ \cap [0, m_k)$ верно $|l_n(T_{i/m_k} f) - l_m(T_{i/m_k} f)| < \varepsilon$ и $|l_n(T_a f) - l_m(T_a f)| < (2M+1)\varepsilon$. Значит $\{l_n(T_a f)\}_{n=0}^\infty$ равномерно фундаментальна по a, то есть $\{\alpha_n(a)\}_{n=0}^\infty$ сходится равномерно по a. Теорема доказана.

Теорема 2. *Для того чтобы ряды Фурье всех функций $f \in L^1[0,1)$ были равномерно Λ-суммируемы, необходимо и достаточно выполнение следующих условий:*

1) предел $\lim\limits_{n\to\infty} \lambda_{kn}$ существует для всех $k \in \mathbb{N}$;

2) $|K_{in}(t)| \le M_n$ для всех $t \in [0,1)$ и $i \in \mathbb{N}$;

3) существуют ограниченные функции $K_n(t)$, $n \in \mathbb{Z}_+$, такие что $\hat{K_n}(i) = \lambda_{in}$, $i \in \mathbb{Z}_+$, и $\|K_n\|_\infty = O(1)$.

Доказательство. Необходимость. Пусть ряды Фурье всех функций $f \in L[0,1)$ равномерно Λ-суммируемы. Тогда по лемме 1 выполнено условие 2). По лемме 2 отсюда получаем, что ряд $\sum\limits_{i=0}^\infty \lambda_{in}\chi_i(x)$ является рядом Фурье функции $K_n \in B[0,1), n \in \mathbb{Z}_+$. Если ряд $\sum\limits_{i=0}^\infty \lambda_{in}\hat{f}(i)\chi_i(x)$ сходится равномерно, то в силу равенства $(K_n * f)\hat{}(i) := \hat{K}_n(i)\hat{f}(i) = \lambda_{in}\hat{f}(i)$, $i \in \mathbb{Z}_+$ находим, что он сходится равномерно к $K_n * f$. Снова рассмотрим функционалы $l_n(f) = \int\limits_0^1 f(\ominus t)K_n(t)\,dt = \sum\limits_{i=0}^\infty \lambda_{in}\hat{f}(i)$. Последовательность $\{l_n(f)\}_{n=0}^\infty$ сходится на всех $f \in L[0,1)$, поэтому по теореме Банаха – Штейнгауза $\|K_n\|_\infty \le M$. Наконец $l_n(\chi_i) = \hat{K}_n(i) = \lambda_{in}$ сходится при $n \to \infty$ для любого $i \in \mathbb{Z}_+$. Таким образом, условия 1)–3) выполнены.

Достаточность. Пусть выполнены условия 1)–3). По лемме 1 получаем, что для всех $n \in \mathbb{N}$ ряд $\sum\limits_{i=0}^\infty \lambda_{in}\hat{f}(i)\chi_i(x)$ сходится равномерно. Аналогично доказательству теоремы 1 из 1) вытекает сходимость $l_n(f)$ на всех полиномах из $\mathcal{P}$ и, следовательно, на всех $f \in L^1[0,1)$. Снова отмечая, что $l_n(T_a f) = \alpha_n(a)$ и что $\lim\limits_{a\to\infty}\|T_a f - f\|_1 \to 0$ при $f \in L^1[0,1)$, доказываем, как и в теореме 1, равномерную по a сходимость $l_n(T_a f)$. Теорема доказана.

Перед формулировкой следствия 1 дадим определения некоторых классов последовательностей. Если $a_k(k+1)^{-\tau}$ убывает при некотором $\tau \ge 0$ и $\lim\limits_{k\to\infty} a_k = 0$, то $\{a_k\}_{k=0}^\infty \in A_\tau$. Если же $a_k k^\tau$ возрастает при некотором $\tau > 0$ и $\lim\limits_{k\to\infty} a_k = 0$, то $\{a_k\}_{k=0}^\infty \in A_{-\tau}$. Наконец, если $\lim\limits_{k\to\infty} a_k = 0$ и $\sum\limits_{k=n}^\infty |a_k - a_{k+1}| \le C a_n$ для всех $n \in \mathbb{Z}_+$, то $\{a_k\}_{k=0}^\infty \in RBVS$. Эти классы были введены соответственно А.А. Конюшковым [11] , Г.К. Лебедем [12] и Л. Лейндлером [13].

Следствие 1. *Пусть* $1 < p < \infty$, $1/p+1/q = 1$, *и матрица* $\{\lambda_{kn}\}_{k,n=0}^{\infty}$ *удовлетворяет следующим условиям:*

1) предел $\lim\limits_{n\to\infty} \lambda_{kn}$ *существует для всех* $k \in \mathbb{Z}_+$;

2) при фиксированном $n \in \mathbb{Z}_+$ *последовательность* $\{\lambda_{kn}\}_{k,n=0}^{\infty}$ *принадлежит* A_τ, $\tau \in \mathbb{R}$, *или* $RBVS$, *и* $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \lambda_{kn}^{q}(k+1)^{q-2} \le M^q$ *для всех* $n \in \mathbb{Z}_+$.

Тогда ряды Фурье всех функций $f \in L^p[0,1)$ *будут равномерно* Λ*-суммируемы.*

Доказательство. В работе [14, теоремы 8, 9] установлено, что при выполнении условия 2) ряды $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \lambda_{kn}\chi_k(x)$ сходятся в $L^q[0,1)$ к $K_n \in L^q[0,1)$ и что $\|K_n\|_q \le C_1 M$. Осталось применить теорему 1.

Следствие 2. *Пусть* $1 < p < \infty$, $1/p+1/q = 1$, *и матрица* $\{\lambda_{kn}\}_{k,n=0}^{\infty}$ *удовлетворяет следующим условиям:*

1) предел $\lim\limits_{n\to\infty} \lambda_{kn}$ *существует для всех* $k \in \mathbb{Z}_+$;

2) при фиксированном $n \in \mathbb{Z}_+$ *последовательность* $\{\lambda_{kn}\}_{k,n=0}^{\infty}$ *принадлежит* A_τ, $\tau \in \mathbb{R}$, *или* $RBVS$, *и* $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \lambda_{kn}(k+1)^{-1/q} \le M$ *для всех* $n \in \mathbb{Z}_+$.

Тогда ряды Фурье всех функций $f \in L^p[0,1)$ *будут равномерно* Λ*-суммируемы.*

Доказательство. Аналогично доказательству теоремы 2 в [15] показывается, что

$$\left(\sum_{k=0}^{\infty} \lambda_{kn}^{q}(k+1)^{q-2}\right)^{1/q} \le C_1 \sum_{k=0}^{\infty} \lambda_{kn}(k+1)^{-1/q} \le C_1 M,$$

где константа C_1 зависит только от константы N, такой что $2 \le p_n \le N$, или от константы C в определении $RBVS$. Применяя следствие 1, получаем утверждение следствия 2.

Для функций из $C^*[0,1)$ дадим более слабый результат. Пусть $\{\lambda_{kn}\}_{k,n=0}^{\infty}$ — нижнетреугольная матрица, т.е. равномерная сходимость рядов $\sum\limits_{i=0}^{\infty} \lambda_{in}\hat{f}(i)\chi_i(x) = \sum\limits_{i=0}^{n} \lambda_{in}\hat{f}(i)\chi_i(x) = K_n(x)$ имеет место даже для $f \in L^1[0,1)$. Если $\mathcal{P}_n = \{f \in L^1[0,1) : \hat{f}(i) = 0,\ i \ge n\}$, то $E_n(f)_p = \inf\{\|f - t_n\|_p : t_n \in \mathcal{P}_n\}$.

Теорема 3. *Пусть* $p_i \equiv 2$, $f \in C^*[0,1)$, $\varepsilon_n \downarrow 0$, *причем* $\varepsilon_n \le C\varepsilon_{Nn}$ *для всех* $n \in \mathbb{N}$ *и* $E_n(f)_\infty \le C\varepsilon_n$. *Пусть* $\{\lambda_{kn}\}_{k,n=0}^{\infty}$ — *нижнетреугольная матрица, такая что*

1) $\lim\limits_{n\to\infty} \lambda_{kn} = 1$;

2) $\lim\limits_{n\to\infty} \|K_n\|_1 \cdot \varepsilon_n = 0$;

3) $\|S_{2^m}(K_n)\|_1 \le M$, *где* $m = [log_2 n]$ *при* $n \in \mathbb{N}$ *и* $m = 1$ *при* $n = 0$.

Тогда суммы $u_n(x) = \sum\limits_{i=0}^{n} \lambda_{in}\hat{f}(i)\chi(x)$ *равномерно сходятся к* $f(x)$.

Доказательство. По определению $u_n(x) = f * K_n(x) = \big(f - S_{2^m}(f)\big) * K_n(x) + S_{2^m}(f) * K_n(x)$. В силу неравенства А.В. Ефимова [1, § 10.5] имеем $\|f - S_{2^m}(f)\|_\infty \le 2E_{2^m}(f)_\infty \le C_1\varepsilon_{2^m} \le C_2\varepsilon_n$ и в силу условия 2) $\lim\limits_{n\to\infty} \|(f - S_{2^m}(f)) * K_n\|_\infty \le \lim\limits_{n\to\infty} C_2\varepsilon_n \cdot \|K_n\|_1 = 0$. С другой стороны $S_{2^m}(f) * K_n(x) = f * D_{2^m} * K_n(x) = S_{2^m}(K_n) * f(x)$. Рассмотрим матрицу $\left\{\lambda'_{kn}\right\}_{k,n=0}^{\infty}$ с элементами $\lambda'_{kn} = \lambda_{kn}$ при $k \le 2^m - 1$ и $\lambda'_{kn} = 0$ при $k \ge 2^m$. Ясно, что ее элементы удовлетворяют обоим условиям леммы 4, поэтому $S_{2^m}(K_n) * f(x)$ равномерно сходятся к $f(x)$. Теорема доказана.

Замечание. Вместо $S_{2^m}(K_n)$ можно было взять средние Валле – Пуссена

$$\tau_n = \sum_{i=[\frac{n+1}{2}]}^{n} K_{in}.$$

Автор выражает искреннюю признательность С.С. Волосивцу за постановку задачи и внимание к работе.

Библиографический список

1. *Голубов Б.И., Ефимов А.В., Скворцов В.А.* Ряды и преобразования Уолша: Теория и применения. М.: Наука, 1987. 344 с.
2. *Красносельский М.А., Рутицкий Я.Б.* Выпуклые функции и пространства Орлича. М.: Физматгиз, 1958.
3. *Young W.S.* Mean convergence of generalized Walsh – Fourier series // Trans. Amer. Math. Soc. 1976. V. 218, № 2. P. 311–320.
4. *Finet C., Tkebuchava G.E.* Walsh – Fourier series and their generalizations in Orlicz spaces // J. Math. Anal. Appl. 1998. V. 221, № 2. P. 405–418.
5. *Karamata J., Tomic M.* Sur la summation des series de Fourier des fonctions continues // Acad. Serbe Sci. Publ. Inst. Math. 1955. V. 8. P. 123–138.
6. *Katayama M.* Fourier series. XIII. Transformation of Fourier series // Proc. Japan Acad. 1957. V. 33, № 3. P. 229–311.
7. *Goes G.* Multiplikatoren für starke konvergenz von Fourier Reihen // Studia Math. 1958. V. 17. P. 299–311.
8. *Волосивец С.С., Агафонова Н.Ю.* О мультипликаторах равномерной сходимости рядов по мультипликативным системам // Исследования по алгебре, теории чисел, функциональному анализу и смежным вопросам: Межвуз. сб. науч. тр. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 2005. Вып. 3. С. 3–23.
9. *Агафонова Н.Ю.* О мультипликаторах рядов борелевских мер // Исследования по алгебре, теории чисел, функциональному анализу и смежным вопросам: Межвуз. сб. науч. тр. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 2007. Вып.4. С. 3–10.
10. *Агаев Г.Н., Виленкин Н.Я., Джафарли Г.М., Рубинштейн А.И.* Мультипликативные системы функций и гармонический анализ на нуль-мерных группах. Баку: Элм, 1981.
11. *Конюшков А.А.* Наилучшее приближение тригонометрическими полиномами и коэффициенты Фурье // Мат. сборник. 1958. Т. 44, № 1. С. 53–84.
12. *Лебедь Г.К.* О тригонометрических рядах с коэффициентами, удовлетворяющими некоторым условиям // Мат. сборник. 1967. Т. 74, № 1. С. 100–118.
13. *Leindler L.* On the uniform convergence and boundedness of a certain class of sine series // Analysis Math. 2001. V. 27, № 4. P. 279–285.
14. *Волосивец С.С.* О некоторых условиях в теории рядов по мультипликативным системам // Analysis Math. 2007. V. 33, № 3. P. 227–246.
15. *Агафонова Н.Ю.* О наилучших приближениях функций по мультипликативным системам и свойствах их коэффициентов Фурье // Analysis Math. 2007. V. 33, № 4. P. 247–262.

УДК 517.51

ЭКСТРЕМАЛЬНЫЕ РАЦИОНАЛЬНЫЕ ФУНКЦИИ НА ДУГАХ ОКРУЖНОСТИ С НУЛЯМИ НА ЭТИХ ДУГАХ

А.Л. Лукашов, С.В. Тышкевич

Саратовский государственный университет,
кафедра теории функций и приближений
E-mail: LukashovAL@info.sgu.ru, s_tyshkevich@yahoo.com

Приводится решение экстремальной задачи о рациональной функции с фиксированными знаменателем и старшим коэффициентом числителя, наименее уклоняющейся от нуля на нескольких дугах окружности, при ограничении на расположение нулей и дополнительных условиях на взаимное расположение дуг окружности и нулей знаменателя. Экстремальная функция записывается через плотность гармонической меры.

Ключевые слова: наилучшее приближение, экстремальная рациональная функция, гармоническя мера.

Extremal rational Functions on Several Arcs of the Unit Circle with Zeros on These Arcs

A.L. Lukashov, S.V. Tyshkevich

The solution of an extremal problem about rational function with fixed denominator and leading coefficient of nominator which is deviated least from zero on several arcs of the unit circle is given under restrictions on the location of zeros and additional conditions on mutual position of the arcs and zeros of denominator. The extremal function is represented in terms of the density of harmonic measure.

Key words: best approximation, extremal rational function, harmonic measure.

Задача нахождения полиномов и рациональных функций с заданным знаменателем, наименее уклоняющихся от нуля на отрезке действительной оси, была поставлена и решена П.Л. Чебышёвым в 1853 году. Именно с неё началась теория приближений как математическая дисциплина. Наименее уклоняющиеся от нуля на компактах комплексной плоскости многочлены с единичным старшим коэффициентом изучались многими математиками [1]. На дуге окружности без ограничений на расположение нулей многочлены Чебышёва изучались в работе [2]. Отметим также основополагающую