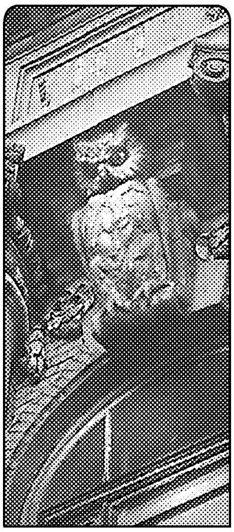
МАТЕМАТИКА



НАУЧНЫЙ ОТДЕЛ

УДК 517.51

Λ-СУММИРУЕМОСТЬ И МУЛЬТИПЛИКАТОРЫ КЛАССОВ ГЁЛЬДЕРА РЯДОВ ФУРЬЕ ПО СИСТЕМАМ ХАРАКТЕРОВ

Н.Ю. Агафонова

Саратовский государственный университет,
кафедра теории вероятностей, математической статистики и управления стохастическими процессами
E-mail: AgafonovaNU@info.sgu.ru

Пусть G — группа Виленкина ограниченного типа. В данной работе получены необходимые и достаточные условия равномерной Λ-суммируемости всех рядов Фурье $f \in C(G)$ и критерий Λ-суммируемости в $L^1(G)$ всех рядов Фурье $f \in L^1(G)$. Также получено обобщение некоторых результатов Т. Квека и Л. Япа на случай общего модуля непрерывности.

Ключевые слова: равномерная Λ-суммируемость, Λ-суммируемость в $L^1(G)$, ряд Фурье, равномерная сходимость, мультипликаторы.

Λ-Summability and Multiplicators of Hölder Classes of Fourierseries with Respect to Character Systems

N.Yu. Agafonova

Saratov State University,
Chair of Theory of Probability, Mathematical Statistics and Manage Stochastics Processes
E-mail: AgafonovaNU@info.sgu.ru

Let G be a Vilenkin group of bounded type. We obtain nessesary and sufficient conditions of uniform Λ-summability for all Fourier series of $f \in C(G)$ and one of Λ-summability in $L^1(G)$ for all Fourier series of $f \in L^1(G)$. Also we extend some T. Quek and L. Yap results to the case of general modulus of continuity.

Key words: uniform Λ-summability, Λ-summability in $L^1(G)$, Fourier – Vilenkin series, uniform convergence, multipliers.

Пусть $\mathbf{P} = \{p_i\}_{i=1}^{\infty}$ — последовательность натуральных чисел, такая что $2 \leqslant p_i \leqslant N$, $i \in \mathbb{N}$. Пусть группа $G(\mathbf{P})$ состоит из элементов $\widetilde{x} = (x_1, x_2, \ldots)$, где $x_i \in \mathbb{Z}(p_i) = \{0, 1, 2, \ldots, p_i - 1\}$, $i \in \mathbb{N}$, и снабжена операцией $\widetilde{x} \oplus \widetilde{y} = \widetilde{z}$, где $\widetilde{z} = (z_1, z_2, \ldots) \in G(\mathbf{P})$ и $z_i = x_i + y_i$ $(\mathrm{mod}\ p_i)$, $i \in \mathbb{N}$. Аналогично вводится $\widetilde{x} \ominus \widetilde{y}$. Пусть $m_0 = 1, m_i = p_{1i}$, при $i \in \mathbb{N}$. Тогда каждое $k \in \mathbb{Z}_+$ единственным образом представимо в виде

$$k = \sum_{i=1}^{\infty} k_i m_{i-1},\ k_i \in \mathbb{Z}(p_i). \tag{1}$$

По $k \in \mathbb{Z}_+$ вида (1) и $\widetilde{x} \in G(\mathbf{P})$ определим

$$\widetilde{\chi}_k(\widetilde{x}) = \exp\Big(2\pi i \Big(\sum_{j=1}^{\infty} \frac{x_j k_j}{p_j}\Big)\Big).$$

Система $\{\widetilde{\chi}_k(\widetilde{x})\}_{k=0}^{\infty}$ является ортонормированной и полной относительно меры Хаара на $G(\mathbf{P})$[1, гл. 3, §2] (последняя обозначается через $d\widetilde{x}$ и однозначно определяется равенством $m(G) = \int\limits_G 1 d\widetilde{x} = 1$).

Будем рассматривать пространство $S(G)$ борелевских мер на G, пространство $C(G)$ непрерывных функций на G и пространство $B(G)$ ограниченных измеримых функций на G с нормой $\|f\|_\infty = \sup\limits_{\widetilde{x}\in G} |f(\widetilde{x})|$, а также пространства $L^p(G)$ интегрируемых в p-й степени на G функций с нормой

$$\|f\|_p = \Big(\int\limits_G |f(\widetilde{x})|^p d\,\widetilde{x}\Big)^{1/p}, \qquad 1 \leqslant p < \infty.$$

Известно [2, гл.6, §7], что каждый линейный непрерывный функционал на $C(K)$, где K — компакт, имеет вид $F(f) = \int\limits_K f d\,\mu$, где μ — борелевская мера на K. Поэтому в пространстве $S(G)$ введем норму

$$\|\mu\|_M = \sup\Big\{\Big|\int\limits_G f d\,\mu\Big| : f \in C(G),\ \|f\|_\infty \leqslant 1\Big\}.$$

Для $f \in L^1(G)$ или $\mu \in S(G)$ можно определить коэффициенты Фурье формулами:

$$\hat{f}(n) = \int\limits_G f(\widetilde{x})\overline{\widetilde{\chi}_n(\widetilde{x})}d\,\widetilde{x}, \qquad \hat{\mu}(n) = \int\limits_G \overline{\widetilde{\chi}_n(\widetilde{x})}d\,\mu(\widetilde{x}), \qquad n \in \mathbb{Z}_+.$$

Частная сумма ряда Фурье функции f определяется равенством

$$S_n(f)(\widetilde{x}) = \sum_{k=0}^{n-1} \hat{f}(k)\widetilde{\chi}_n(\widetilde{x}), \qquad n \in \mathbb{N},$$

аналогично частная сумма определяется для μ. Для свёрток $h_1(\widetilde{x}) = f * g(\widetilde{x}) = \int\limits_G f(\widetilde{x} \ominus \widetilde{t})g(\widetilde{t})d\,\widetilde{t}$ и $h_2(\widetilde{x}) = f * \mu(\widetilde{x}) = \int\limits_G f(\widetilde{x} \ominus \widetilde{t})d\,\mu(\widetilde{t})$, где $f, g \in L^1(G)$ справедливы равенства $\hat{h}_1(\widetilde{u}) = \hat{f}(\widetilde{u})\hat{g}(\widetilde{u})$, $\hat{h}_2(\widetilde{u}) = \hat{f}(\widetilde{u})\hat{\mu}(\widetilde{u})$. При этом, если $f \in L^p(G)$, $1 \leqslant p < \infty$, то $f * g \in L^p(G)$ и $f * \mu \in L^p(G)$ [3, гл. 1, § 1.3].

Пусть $G_k = \{\widetilde{x} \in G : x_1 = x_2 = \ldots = x_k = 0\}$. Тогда для $f \in L^p(G)$, $1 \leqslant p < \infty$, или $f \in C(G)$ (при $p = \infty$) вводится дискретный модуль непрерывности:

$$\omega_k(f)_p = \sup\{\|f(\widetilde{x} \ominus \widetilde{h}) - f(\widetilde{x})\|_p\ : \widetilde{h} \in G_k\}, \qquad k \in \mathbb{Z}_+,$$

и пространство $H_p^\omega(G) = \{f \in L^p(G) : \omega_k(f)_p \leqslant C\omega_k,\ k \in \mathbb{Z}_+\}$, где последовательность $\omega = \{\omega_k\}_{k=0}^\infty$ положительна и убывает к нулю, а C зависит от f, но не от k.

Последовательность $\omega = \{\omega_k\}_{k=0}^\infty$ принадлежит классу Бари B, если для всех $n \in \mathbb{Z}_+$ имеет место соотношение $\sum\limits_{k=n}^\infty \omega_k = O(\omega_n)$. Далее будут использоваться ядра Дирихле $\widetilde{D}_n(\widetilde{x}) = \sum\limits_{k=0}^{n-1} \widetilde{\chi}_k(\widetilde{x})$ и пространство $UC(G) = \{f \in C(G) : \lim\limits_{n\to\infty} \|f - S_n(f)\|_\infty = 0\}$.

Пусть A, B — два класса функций, заданных на G. Будем писать $\{\lambda_k\}_{k=0}^\infty \in (A, B)$, если из того, что ряд $\sum\limits_{k=0}^\infty a_k\widetilde{\chi}_k(\widetilde{x})$ есть ряд Фурье (по системе $\{\widetilde{\chi}_k(\widetilde{x}\}_{k=0}^\infty)$ функции или меры из A следует, что ряд $\sum\limits_{k=0}^\infty \lambda_k a_k\widetilde{\chi}_k(\widetilde{x})$ является рядом Фурье функции или меры из B.

Пусть $\{\lambda_{kn}\}_{k,n=0}^\infty$ — бесконечная матрица. Если для каждого $n \in \mathbb{Z}_+$ ряд $\sum\limits_{k=0}^\infty \lambda_{kn}\hat{f}(k)\widetilde{\chi}_k(\widetilde{x})$ сходится равномерно к функции $g_n(f)(\widetilde{x})$, а последовательность $\{g_n(f)(\widetilde{x})\}_{n=0}^\infty$, в свою очередь, сходится равномерно к функции $g(f)(\widetilde{x})$, то будем говорить, что *ряд Фурье функции* $f(\widetilde{x})$ *равномерно* Λ*-суммируем к* $g(f)(\widetilde{x})$. Если же для каждого $n \in \mathbb{Z}_+$ ряд $\sum\limits_{k=0}^\infty \lambda_k\hat{f}(k)\widetilde{\chi}_k(\widetilde{x})$ сходится равномерно к функции $g_n(f)(\widetilde{x})$, а последовательность $\{g_n(f)(\widetilde{x})\}_{n=0}^\infty$ сходится в $L^1(G)$ к функции $g(f)(\widetilde{x})$, то *ряд Фурье функции* $f(\widetilde{x})$ Λ*-суммируем в* $L^1(G)$ *к функции* $g(f)(\widetilde{x})$.

В данной работе получены критерии равномерной Λ-суммируемости для всех $f \in C(G)$ и Λ-суммируемости в $L^1(G)$ для всех $f \in L^1(G)$. В тригонометрическом случае такие критерии принадлежат соответственно Й. Карамате, М. Томичу [4] и Ф.И. Харшиладзе [5]. Некоторые близкие результаты для мультипликативных систем на $[0,1)$ представлены в работе [6]. Кроме того, даны критерии принадлежности последовательности $\{\lambda_k\}_{k=0}^{\infty}$ классам $\left(H_p^{\omega}, H_{\infty}^{\omega}\right)$ и $\left(H_1^{\delta}, H_p^{\omega}\right)$. В случае $\delta_n = m_n^{-\alpha}$, $\omega_n = m_n^{-\beta}$ подобные результаты можно найти в работе [7].

Лемма 1 [8, §1.5 и §10.5]. *$\widetilde{D}_{m_n}(\widetilde{x}) = m_n$ при $\widetilde{x} \in G_n$ и $\widetilde{D}_{m_n}(\widetilde{x}) = 0$ при $\widetilde{x} \in G \setminus G_n$, $n \in \mathbb{Z}_+$.*

Для $f \in L^p(G)$ или $f \in C(G)$ (при $p = \infty$) справедливо неравенство А.В. Ефимова

$$\frac{1}{2}\omega_n(f)_p \leqslant \|f - S_{m_n}(f)\|_p \leqslant \omega_n(f)_p.$$

Лемма 2 [9]. *Пусть для $\Lambda = \{\lambda_n\}_{n=0}^{\infty}$ по определению $\Lambda_n := \sum\limits_{k=0}^{n-1} \lambda_k \widetilde{\chi}_k$, $n \in \mathbb{N}$. Тогда*

1) *включение $\{\lambda_k\}_{k=0}^{\infty} \in (C, UC)$ равносильно ограниченности $\|\Lambda_n\|_1$;*

2) *включение $\{\lambda_k\}_{k=0}^{\infty} \in (L^1, UC)$ равносильно ограниченности $\|\Lambda_n\|_\infty$.*

Лемма 3 [10]. 1) *ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k \widetilde{\chi}_k$ является рядом Фурье $\mu \in S(G)$ тогда и только тогда, когда $\|S_{m_n}\|_1 := \left\|\sum\limits_{k=0}^{m_n-1} a_k \widetilde{\chi}_k\right\|_1$ ограничены;*

2) *ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k \widetilde{\chi}_k$ является рядом Фурье функции $f \in B(G)$ тогда и только тогда, когда $\|S_{m_n}\|_\infty := \left\|\sum\limits_{k=0}^{m_n-1} a_k \widetilde{\chi}_k\right\|_\infty$ ограничены.*

Теорема 1. *Для того чтобы ряды Фурье всех функций $f \in C(G)$ были равномерно Λ-суммируемы, необходимо и достаточно выполнение следующих условий:*

1) *предел $\lim\limits_{n\to\infty} \lambda_{kn}$ существует для всех $k \in \mathbb{Z}_+$;*

2) *при каждом $n \in \mathbb{Z}_+$ нормы $\|\Lambda_{in}\|_1 := \left\|\sum\limits_{j=0}^{i-1} \lambda_{jn} \widetilde{\chi}_j(\widetilde{x})\right\|_1$ ограничены M_n, где M_n не зависит от i;*

3) *существуют борелевские меры $\mu_n \in S(G)$, $n \in \mathbb{Z}_+$, такие, что $\hat{\mu}_n(i) = \lambda_{in}$ для всех $i, n \in \mathbb{Z}_+$ и $\|\mu_n\|_M = O(1)$.*

Доказательство. *Необходимость.* Пусть ряды Фурье всех функций $f \in C(G)$ равномерно Λ-суммируемы. В частности, ряды $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \lambda_{kn} \hat{f}(k) \widetilde{\chi}_k(\widetilde{x})$ при каждом $n \in \mathbb{Z}_+$ сходятся равномерно к $g_n(f)$. Следовательно, по лемме 2 имеет место условие 2). Отсюда по лемме 3 получаем существование мер μ_n, $n \in \mathbb{Z}_+$, для которых $\hat{\mu}_n(i) = \lambda_{in}$ при $i \in \mathbb{Z}_+$. Так как $(f * \mu_n)\hat{}(i) = \hat{f}(i)\hat{\mu}_n(i)$ при всех $i \in \mathbb{Z}_+$, то по теореме единственности $g_n(f) = f * \mu_n$.

Рассмотрим функционалы

$$l_n(f) = f * \mu_n(\widetilde{0}) = \int\limits_G f(\widetilde{0} \ominus \widetilde{t})\, d\mu(\widetilde{t}).$$

Так как $\lim\limits_{k\to\infty} \|S_{m_k}(f) - f\|_\infty = 0$, то

$$\int\limits_G f(\widetilde{0} \ominus \widetilde{t})\, d\mu(\widetilde{t}) = \lim_{k\to\infty} \sum_{i=0}^{m_k-1} \lambda_{in} \hat{f}(i) = \sum_{i=0}^{\infty} \lambda_{in} \hat{f}(i).$$

Последний ряд по условию сходится к $g_n(f)(0)$. Также по условию $\{l_n(f)\}_{n=0}^{\infty} = \{g_n(0)\}_{n=0}^{\infty}$ сходится к $g(f)(0)$ для всех $f \in C(G)$. По теореме Банаха – Штейнгауза получаем, что $\|\mu_n\|_M = O(1)$. Наконец, $l_n(\widetilde{\chi}_i) = \lambda_{in}$ тоже сходятся по условию, откуда вытекает 1).

Достаточность. Пусть выполнены условия 1)–3). По лемме 2 для любой $f \in C(G)$ ряд $\sum\limits_{j=0}^{\infty} \lambda_{jn} \hat{f}(j) \widetilde{\chi}_j(\widetilde{x})$ сходится равномерно к некоторой $g_n(f) \in C(G)$. Поэтому ряд $l_n(f) = \sum\limits_{i=0}^{\infty} \lambda_{in} \hat{f}(i)$ сходится при всех $f \in C(G)$ и $n \in \mathbb{Z}_+$. Но

$$l_n(f) = \lim_{i\to\infty} \int\limits_G \Lambda_{in}(\widetilde{t}) f(\widetilde{0} \ominus \widetilde{t})\, d\mu(\widetilde{t}), \qquad \left|\int\limits_G \Lambda_{in}(\widetilde{t}) f(\widetilde{0} \ominus \widetilde{t})\, d\mu(\widetilde{t})\right| \leqslant \|\Lambda_{in}\|_1 \cdot \|f\|_\infty \leqslant M_n \|f\|_\infty.$$

Поэтому $l_n(f)$ есть ограниченный функционал и $l_n(f) = f * \mu_n(0)$. В самом деле, для полиномов по системе $\{\widetilde{\chi}_k\}_{k=0}^{\infty}$ последнее равенство верно и, учитывая их плотность в $C(G)$, получим, что $l_n(f) = f * \mu_n(0)$ для всех $f \in C(G)$. Далее, в силу 1) последовательность $\{l_n(f)\}_{n=0}^{\infty}$ сходится для всех f — полиномов по системе $\{\widetilde{\chi}_k\}_{k=0}^{\infty}$, а благодаря условию 3) нормы $\|l_n\|$ ограничены. По теореме 3 [11, гл. 7, §1] функционалы $l_n(f)$ сходятся для всех $f \in C(G)$.

Пусть $T_{\widetilde{a}}f(\widetilde{t}) = f(\widetilde{t} \ominus \widetilde{a})$, тогда $l_n(T_{\widetilde{a}}f) =: g_n(\widetilde{a})$. Так как $\|T_{\widetilde{a}}f - f\|_{\infty} \to 0$ при $\widetilde{a} \to 0$, то для любого $\varepsilon > 0$ найдется $k \in \mathbb{N}$, такое что для всех $\widetilde{h} \in G_k$ верно $\|T_{\widetilde{h}}f - f\|_{\infty} < \varepsilon$. Группа G является объединением различных смежных классов $\widetilde{a}_i \oplus G_k$, $i = 0, 1, \ldots, m_k - 1$.

Пусть $\widetilde{a} \in \widetilde{a}_i \oplus G_k$, т. е. $\widetilde{a} \ominus \widetilde{a}_i \in G_k$. Тогда имеем

$$|l_n(T_{\widetilde{a}}f) - l_m(T_{\widetilde{a}}f)| \leqslant |l_n(T_{\widetilde{a}}f) - l_n(T_{\widetilde{a}_i}f)| + |l_n(T_{\widetilde{a}_i}f) - l_m(T_{\widetilde{a}_i}f)| + |l_m(T_{\widetilde{a}_i}f) - l_m(T_{\widetilde{a}}f)| = I_1 + I_2 + I_3.$$

Так как $\|l_n\| = \|\mu_n\|_M \leqslant M$, то $I_1 + I_3 \leqslant 2M\|T_{\widetilde{a}_i}f - T_{\widetilde{a}}f\| < 2M\varepsilon$. Если k фиксировано, то, поскольку $l_n(T_{\widetilde{a}}f)$ сходятся при любом $\widetilde{a} \in G$ и $f \in C(G)$, получаем: найдётся $n_0(\varepsilon)$, такое что для всех $n, m > n_0$ и всех $i = 0, 1, \ldots, m_k - 1$ имеем $|l_n(T_{\widetilde{a}_i}f) - l_m(T_{\widetilde{a}_i}f)| < \varepsilon$. В итоге при $n, m > n_0$ имеем $|g_n(\widetilde{a}) - g_m(\widetilde{a})| < (2M + 1)\varepsilon$ для всех $\widetilde{a} \in G_k$. Отсюда вытекает равномерная сходимость g_n. Теорема доказана.

Теорема 2. *Для того, чтобы ряды Фурье всех функций $f \in L^1(G)$ были Λ-суммируемы в $L^1(G)$ к f, необходимо и достаточно выполнение следующих условий:*

1) *для всех $k \in \mathbb{Z}_+$ верно $\lim\limits_{n\to\infty} \lambda_{kn} = 1$;*

2) *при каждом $n \in \mathbb{Z}_+$ нормы $\|\Lambda_{in}\|_{\infty} := \left\| \sum\limits_{j=0}^{i-1} \lambda_{jn}\widetilde{\chi}_j(\widetilde{x}) \right\|_{\infty} \leqslant M_n$, где M_n не зависит от i;*

3) *существуют $K_n \in B(G)$, $n \in \mathbb{Z}_+$, такие что $\hat{K}_n(i) = \lambda_{in}$ для всех $i \in \mathbb{Z}_+$ и нормы $\|K_n\|_1$ ограничены.*

Доказательство. *Необходимость.* По условию ряды $\sum\limits_{i=0}^{\infty} \lambda_{in}\hat{f}(i)\widetilde{\chi}_i$ сходятся равномерно к функции $g_n(f) \in C(G)$ и по лемме 2 условие 2) выполнено, откуда по лемме 3 следует существование $K_n \in B(G)$ со свойством $\hat{K}_n(i) = \lambda_{in}$, $i \in \mathbb{Z}_+$.

Так как $(f * K_n)\hat{}(i) = \hat{f}(i)\hat{K}_n(i)$, то $g_n(f) = f * K_n$. Далее, по условию $g_n(\widetilde{\chi}_i) = \widetilde{\chi}_i * K_n = \lambda_{in}\widetilde{\chi}_i$ сходятся к $\widetilde{\chi}_i$ в $L^1(G)$ при $n \to \infty$, откуда вытекает условие 1). Аналогично из того, что $\lim\limits_{n\to\infty} \|g_n(f) - f\|_1 = 0$ для любой $f \in L^1(G)$ по теореме Банаха – Штейнгауза следует, что $\|g_n\|_{L^1 \to L^1} = \|K_n\|_1$ ограничены, т. е. 3) имеет место.

Достаточность. Пусть выполнены условия 1)–3) и $f \in L^1(G)$. Тогда по лемме 2 ряд $\sum\limits_{i=0}^{\infty} \lambda_{in}\hat{f}(i)\widetilde{\chi}_i$ сходится равномерно к некоторой функции $g_n(f) \in C(G)$. Ясно, что $g_n(f) = f * K_n$. Из условия 1) следует, что $g_n(\widetilde{\chi}_i) = K_n * \widetilde{\chi}_i = \lambda_{in}\widetilde{\chi}_i$ сходятся к $\widetilde{\chi}_i$ в $L^1(G)$ и то же верно для любого полинома по системе $\{\widetilde{\chi}_i\}_{i=0}^{\infty}$. Поскольку $\|g_n\|_{L^1 \to L^1} = \|K_n\|_1 \leqslant M$, то по теореме 3 [11, гл. 7, §1] получаем, что $g_n(f)$ сходятся к f в $L^1(G)$. Теорема доказана.

В оставшейся части работы полагаем, что $\omega = \{\omega_k\}_{k=0}^{\infty}$ и $\delta = \{\delta_k\}_{k=0}^{\infty}$ — убывающие к нулю положительные последовательности, такие что $\gamma = \{\gamma_k\}_{k=0}^{\infty}$, где $\gamma_k = \omega_k/\delta_k$, тоже убывает к нулю. Далее, пусть $1/p + 1/q = 1$, т. е. при $p = 1$ верно $q = \infty$, и наоборот.

Лемма 4. *Пусть последовательности ω и δ положительны и убывают к нулю. Если последовательность γ тоже убывает к нулю и $\omega \in B$, то $\gamma \in B$.*

Доказательство. По условию

$$\sum_{k=n}^{\infty} \gamma_k = \sum_{k=n}^{\infty} \frac{\omega_k}{\delta_k} \leqslant \sum_{k=n}^{\infty} \frac{\omega_k}{\delta_n} \leqslant C_1 \frac{\omega_n}{\delta_n} = C_1\gamma_n,$$

так как $\omega \in B$. Лемма доказана.

Теорема 3. *Пусть $1 \leqslant p \leqslant \infty$, $\omega \in B$. Тогда последовательность $\{\lambda_k\}_{k=0}^{\infty}$ принадлежит классу $(H_p^{\delta}, H_{\infty}^{\omega})$ тогда и только тогда, когда ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \lambda_k\widetilde{\chi}_k$ является рядом Фурье функции $f \in H_q^{\gamma}$.*

Доказательство. Для $f \in L^p(G)$, $g \in L^q(G)$ справедливо неравенство

$$\|f * g\|_\infty \leqslant \|f\|_p \cdot \|g\|_q,$$

причем $f * g \in C(G)$. Используя равенство

$$f * g * D_{m_{n+1}} - f * g * D_{m_n} = (f * D_{m_{n+1}} - f * D_{m_n}) * (g * D_{m_{n+1}} - g * D_{m_n}),$$

для $f \in H_p^\delta$, $g \in H_q^\gamma$ получаем в силу леммы 1

$$\|S_{m_{n+1}}(f * g) - S_{m_n}(f * g)\|_\infty \leqslant \|S_{m_{n+1}}(f) - S_{m_n}(f)\|_p \cdot \|S_{m_{n+1}}(g) - S_{m_n}(g)\|_q \leqslant$$

$$\leqslant 2\omega_n(f)_p \cdot 2\omega_n(g)_q \leqslant C_1 \delta_n \gamma_n = C_1 \omega_n.$$

Используя условие $\omega \in B$, находим, что

$$\|f * g - S_{m_n}(f * g)\|_\infty \leqslant \sum_{k=n}^\infty \|S_{m_{k+1}}(f * g) - S_{m_k}(f * g)\|_\infty \leqslant C_1 \sum_{k=n}^\infty \omega_k \leqslant C_2 \omega_n,$$

откуда по лемме 1 $f * g \in H_\infty^\omega$.

Пусть теперь $\{\lambda_k\}_{k=0}^\infty \in (H_p^\delta, H_\infty^\omega)$. Сопоставим $\{\lambda_k\}_{k=0}^\infty$ оператор T_λ, отображающий $f \in H_p^\delta$ в $f_\lambda \in H_\infty^\omega$ с рядом Фурье $\sum\limits_{k=0}^\infty \lambda_k \hat{f}(k) \widetilde{\chi}_k$. Легко видеть, что $T_\lambda(f * h) = T_\lambda f * h$ при $f \in H_p^\delta$, $h \in L^1(G)$. Известно, что относительно нормы

$$\|f\|_{p,\delta} = \|f\|_p + \sup_{k \in \mathbb{Z}_+} \omega_k(f)_p / \delta_k$$

пространство H_p^δ является банаховым. Из того, что T_λ действует из H_p^δ в H_∞^ω следует, что он ограничен [12, гл. 6, лемма 6.5.2]. Значит, для любой $f \in H_p^\delta$ имеем по лемме 1

$$\|f * T_\lambda D_{m_{n+1}} - f * T_\lambda D_{m_n}\|_\infty = \|T_\lambda f * D_{m_{n+1}} - T_\lambda f * D_{m_n}\|_\infty \leqslant 2\omega_n(T_\lambda f)_\infty \leqslant$$

$$\leqslant 2\omega_n \|T_\lambda f\|_{H_\omega,\infty} \leqslant 2\omega_n \|T_\lambda\|_{H_p^\delta \to H_\omega^\infty} \cdot \|f\|_{p,\delta} = C_3(\lambda)\omega_n \Big(\|f\|_p + \sup_{k \in \mathbb{Z}_+} \omega_k(f)_p / \delta_k\Big). \tag{2}$$

Рассмотрим $T_\lambda D_{m_n} = \sum\limits_{k=0}^{m_n - 1} \lambda_k \widetilde{\chi}_k = \Lambda_{m_n}$. Пусть $\mathcal{P}_{m_n} = \{f \in L^1(G) : \hat{f}(i) = 0 \text{ при } i \geqslant m_n\}$, а $\mathcal{P} = \bigcup\limits_{n=1}^\infty \mathcal{P}_{m_n}$. Тогда в силу плотности $\mathcal{P}$ в $L^p(G)$, $1 \leqslant p < \infty$, и в $C(G)$ находим, что

$$\|\Lambda_{m_n} - \Lambda_{m_{n+1}}\|_q = \sup\Big\{\Big|\int_G (\Lambda_{m_{n+1}} - \Lambda_{m_n})(\widetilde{x}) h(\widetilde{0} \ominus \widetilde{x})\, d\widetilde{x}\Big| : h \in \mathcal{P}, \|h\|_p \leqslant 1\Big\} \leqslant$$

$$\leqslant \sup\Big\{\|(\Lambda_{m_{n+1}} - \Lambda_{m_n}) * h\|_\infty : h \in \mathcal{P}, \|h\|_p \leqslant 1\Big\} =$$

$$= \sup\Big\{\|(\Lambda_{m_{n+1}} - \Lambda_{m_n}) * h\|_\infty : h \in \mathcal{P}_{m_{n+1}}, \|h\|_p \leqslant 1\Big\}.$$

Применяя оценку (2) при $f = h \in \mathcal{P}_{m_{n+1}}$ и используя постоянство h на смежных классах $a \oplus G_{n+1}$, получаем

$$\|\Lambda_{m_{n+1}} - \Lambda_{m_n}\|_q \leqslant C_3(\lambda)\omega_n \sup\Big\{\|h\|_p + \max_{0 \leqslant k \leqslant n} \omega_k(h)_p / \delta_k : h \in \mathcal{P}_{m_{n+1}}, \|h\|_p \leqslant 1\Big\} \leqslant$$

$$\leqslant C_3(\lambda)\omega_n(1 + 2/\delta_n) \leqslant C_4(\lambda, \delta)\omega_n / \delta_n = C_4 \gamma_n. \tag{3}$$

Благодаря лемме 4 и (3) при $k > n$ имеем

$$\|\Lambda_{m_k} - \Lambda_{m_n}\|_q \leqslant C_5 \gamma_n, \tag{4}$$

т. е. $\{\Lambda_{m_n}\}_{n=0}^{\infty}$ фундаментальна в $L^q(G)$ и, как следствие, Λ_{m_n} сходятся в $L^q(G)$ к некоторой функции g. При этом $(\Lambda_{m_n})\widehat{\ }(j) = \lambda_j$ при $m_n > j$, откуда следует, что $\hat{g}(j) = \lambda_j$ и в силу теоремы единственности $T_\lambda f = f * g$. Переходя в (4) к пределу при $k \to \infty$ получаем, что

$$\|g - S_{m_n}(g)\|_q = \|g - \Lambda_{m_n}\|_q \leqslant C_5\gamma_n,$$

откуда $g \in H_q^\gamma$ и теорема доказана.

Получим двойственный результат.

Теорема 4. *Пусть* $1 \leqslant p \leqslant \infty$, $\omega \in B$. *Тогда последовательность* $\{\lambda_k\}_{k=0}^{\infty}$ *принадлежит* (H_1^δ, H_p^ω) *тогда и только тогда, когда ряд* $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \lambda_k \widetilde{\chi}_k$ *является рядом Фурье функции* $f \in H_q^\gamma$.

Доказательство. Пусть $f \in H_1^\delta$, $g \in H_p^\gamma$. Тогда аналогично доказательству теоремы 3 имеем:

$$\|S_{m_n+1}(f*g) - S_{m_n}(f*g)\|_p \leqslant \|S_{m_n+1}(f) - S_{m_n}(f)\|_1 \cdot \|S_{m_n+1}(g) - S_{m_n}(g)\|_p \leqslant C_1\delta_n\gamma_n = C_1\omega_n.$$

В силу условия $\omega \in B$ получаем $f * g \in H_p^\omega$. Если же $\{\lambda_k\}_{k=0}^{\infty} \in (H_1^\delta, H_p^\omega)$, то снова рассмотрим оператор T_λ, который ограничен из H_1^δ в H_p^ω. Тогда в силу леммы 1

$$\sup_{n\in\mathbb{Z}_+} \|T_\lambda f * D_{m_n+1} - T_\lambda f * D_{m_n}\|_p \omega_n^{-1} \leqslant 2\|T_\lambda\|_{H_1^\delta \to H_p^\omega}\Big(\|f\|_1 + \sup_{k\in\mathbb{Z}_+} \omega_k(f)_1/\delta_k\Big). \tag{5}$$

В частности, в левую часть можно подставить $\|f * T_\lambda D_{m_n+1} - f * T_\lambda D_{m_n}\|_p$.

Пусть $f \in D_{m_{N+1}}$, $n = N$. Тогда $T_\lambda D_{m_n} = \Lambda_{m_n}$. Ранее было отмечено, что $\omega_k(D_{m_{N+1}})_1 = 0$ при $k \geqslant N+1$. Поэтому из (5) следует, что

$$\omega_N^{-1}\|\Lambda_{m_{N+1}} - \Lambda_{m_N}\|_p \leqslant 2\|T_\lambda\|\Big(\|D_{m_{N+1}}\|_1 + \sup_{0\leqslant k\leqslant N} \frac{\omega_k(D_{m_{N+1}})_1}{\delta_k}\Big),$$

откуда $\|\Lambda_{m_{N+1}} - \Lambda_{m_N}\|_p \leqslant C_2\omega_N(1 + 2/\delta_N) \leqslant C_3(\lambda,\delta)\gamma_N$.

Отсюда аналогично доказательству теоремы 3 с использованием леммы 4 получаем фундаментальность $\{\Lambda_{m_n}\}_{n=0}^{\infty}$ в $L^p(G)$, сходимость Λ_{m_n}к g в $L^p(G)$ и то, что $g \in H_p^\gamma$. Теорема доказана.

Автор выражает глубокую благодарность С.С. Волосивцу за внимание к работе и обсуждение результатов.

Библиографический список

1. *Агаев Г.Н., Виленкин Н.Я., Джафарли Г.М., Рубинштейн А.И.* Мультипликативные системы функций и гармонический анализ на нуль-мерных группах. Баку: ЭЛМ, 1981.
2. *Данфорд Н., Шварц Дж. Т.* Линейные операторы. Общая теория. М.: Изд-во иностр. лит., 1962.
3. *Rudin W.* Fourier analysis on groups. N.Y.: John Wiley and Sons, 1967.
4. *Karamata J., Tomich M.* Sur la sommation des series de Fourier des founctions continues // Publ. Inst. Math. 1955. Vol. 8. P. 123–138.
5. *Харшиладзе Ф. И.* О множителях равномерной сходимости и прямоугольных матрицах суммирования рядов Фурье // Труды Тбилисского госуниверситета. 1961. Т. 84. С. 127–141.
6. *Агафонова Н. Ю.* О равномерной сходимости преобразованных рядов Фурье по мультипликативным системам // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. 2009. Т. 9. Сер. Математика. Механика. Информатика, вып. 1. С. 3–8.
7. *Quek T.S., Yap L.Y.H.* Multipliers from one Lipschitz space to another // J. Math. Anal. Appl. 1982. Vol. 86, № 1. P. 69–73.
8. *Голубов Б.И., Ефимов А.В., Скворцов В.А.* Ряды и преобразования Уолша: Теория и применения. М.: Наука, 1987.
9. *Волосивец С.С., Агафонова Н.Ю.* О мультипликаторах равномерной сходимости рядов по мультипликативным системам // Исследования по алгебре, теории чисел, функциональному анализу и смежным вопросам: межвуз. сб. науч. тр. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 2005. Вып. 3. С. 3–23.
10. *Агафонова Н.Ю.* О мультипликаторах рядов борелевских мер // Исследования по алгебре, теории чисел, функциональному анализу и смежным вопросам: межвуз. сб. науч. тр. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 2007. Вып.4. С. 3–10.
11. *Канторович Л.В., Акилов Г.П.* Функциональный анализ. М.: Наука, 1977.
12. *Качмаж С., Штейнгауз Г.* Теория ортогональных рядов. М.: Физматгиз, 1958.