

МЕХАНИКА

УДК 531/534:[57+61]

КОНТРОЛИРУЕМОЕ ВОССТАНОВЛЕНИЕ КОРТИКАЛЬНОЙ КОСТНОЙ ТКАНИ ПОСЛЕ ЛЕЧЕНИЯ В АППАРАТАХ ВНЕШНЕЙ ФИКСАЦИИ

Ю.В. Акулич¹, А.Ю. Акулич², П.А. Брюханов¹, А.С. Денисов³

¹Пермский государственный технический университет;

²МУЗ Медсанчасть 9, Пермь;

³Пермская государственная медицинская академия

E-mail: Y.Akulich@yandex.ru, akulichanton@perm.raid.ru, auv@cpl.pstu.ac.ru, rector@psma.ru

Предлагается новый метод реабилитационного восстановления костной ткани нижней конечности человека. Реабилитационные контролируемые нагрузки на восстанавливаемую конечность прикладываются в специальном тренажерном устройстве. Моделируются адаптационные изменения модуля упругости, пористости, объёмного содержания минералов и прочности кортикальной костной ткани в течение процесса сращения в аппарате внешней фиксации (на примере спицевого аппарата Г.А. Илизарова) и последующей реабилитации. Представлено новое определяющее соотношение процесса адаптационного изменения минеральной компоненты состава матрикса («реологическая адаптация» по И.В. Кнетсу). Приводится оценка вкладов внешней, внутренней и реологической адаптации в изменение модуля упругости. Исследован типичный режим реабилитационных нагрузок в тренажерном устройстве. Установлен высокий уровень прочности кортикальной костной ткани при всех режимах нагружения.

Ключевые слова: контролируемая реабилитация, биомеханическая модель, кортикальная костная ткань, адаптация, механические свойства, минерализация.

The Cortical Bone Tissue Controlled Recovering After Treatment in the External Fixation Apparatuses

Yu.V. Akulich¹, A.Yu. Akulich², P.A. Bruchanov¹, A.S. Denisov³

¹Perm State Technical University;

²Municipal Public Health Services Medical Unit 9, Perm;

³Perm State Medical Academy

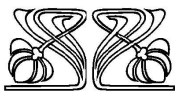
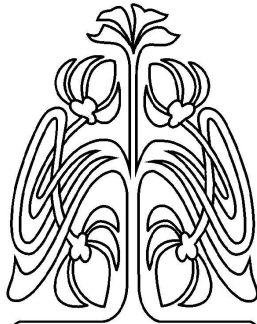
E-mail: Y.Akulich@yandex.ru, akulichanton@perm.raid.ru, auv@cpl.pstu.ac.ru, rector@psma.ru

The paper represents the new bone tissue rehabilitation method. The rehabilitation control loads are affected to the regenerative lower extremity by the use of a special training device. The adaptive changes of the elasticity modulus, porosity, volumetric mineral content and strengthening of the cortical bone tissue are simulated during the union of a bone using the external fixation apparatus (by example of the Ilizarov's pin apparatus) and the following rehabilitation time. The new constitutive equation of the adaptive change of the volumetric mineral content («rheological adaptation» from I.V. Knets) is proposed. The evaluation of the external, internal and rheological adaptations investments at the change of the elasticity modulus has been performed. The typical conditions of the rehabilitation loads in training device have been searched. The high level of the cortical bone tissue strengthening has been determined under all rehabilitation load conditions.

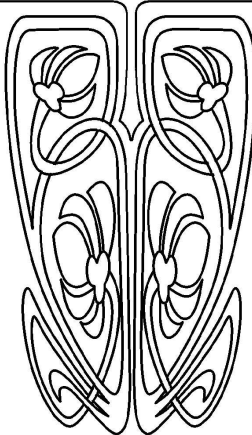
Key words: control rehabilitation, biomechanical model, cortical bone tissue, adaptation, mechanical properties, mineralization.

ВВЕДЕНИЕ

В процессе лечения перелома трубчатых костей нижней конечности в аппаратах внешней фиксации всегда имеются участки кости, которые находятся в недогруженном состоянии. Например, в аппарате Г.А. Илизарова (рис. 1, а) эти участки расположены между



НАУЧНЫЙ
ОТДЕЛ





базовыми и репонирующими перекрестами спиц, поскольку действие веса тела в опорной фазе шага воспринимается стержнями, соединяющими соответствующие опорные кольца. Возникающая дисфункция данных участков отломков кости вызывает нарушение питания, минерального состава и структуры костной ткани [1] (уменьшается доля минеральной компоненты состава костного вещества и возрастает пористость костной ткани [2]), что обуславливает снижение уровня упругих и прочностных свойств этих участков кости.

При существующей методике реабилитации пациент передвигается на костылях, субъективно оценивает и реализует рекомендованную нагрузку конечности. При этом ошибка в нагрузке на кость может достигать 30–50%. Кроме того, в этих условиях нельзя исключить возможности случайной динамической перегрузки конечности, достигающей двух и более кратных значений. Эти обстоятельства характеризуют традиционный процесс реабилитации в целом как неконтролируемый, в котором в рассматриваемых участках кости могут иметь место повышенные деформации и повреждаемость матрикса, случайное разрушение остеонов. Как следствие, при этом существенно возрастает риск повторной травмы, а в ряде случаев возможен болевой синдром в дальнейшем. Так, статистический анализ данных травматизма по Пермскому краю показал, что в течение 5 лет после сочетанной травмы с вовлечением опорно-двигательного аппарата 75% пациентов испытывали боли различного характера [3]. Нельзя не учитывать социального аспекта проблемы, создающего спорные вопросы правового характера между пациентом и лечебным учреждением.

В связи с этим актуальным и перспективным представляется переход к контролируемой реабилитации, свободной от перечисленных недостатков. Первым и главным этапом ее разработки является математическое моделирование процесса восстановления упругих и прочностных характеристик костной ткани.

В настоящей статье формулируются общие положения контролируемой реабилитации, впервые представлена математическая модель адаптационных изменений минеральной компоненты состава кортикальной костной ткани. Приводится постановка начально-краевой задачи адаптационной пороупругости для фрагмента 5 (см. рис. 1) в случае одноосного напряженно-деформированного состояния. В качестве определяющих соотношений кортикальной костной ткани для напряжения и радиуса пор используются полученные ранее уравнения [4], а для процессов минерализации и деминерализации кости предлагаются новые кинетические соотношения.

Исследован типичный режим реабилитационных нагрузок и установлен высокий уровень прочности костной ткани при всех близких к реальным режимам нагружения. Отсюда, в частности, следует, что риск локального разрушения костной ткани возможен только при динамических перегрузках, т. е. при нарушении пациентом предписанного режима реабилитационных нагрузок.

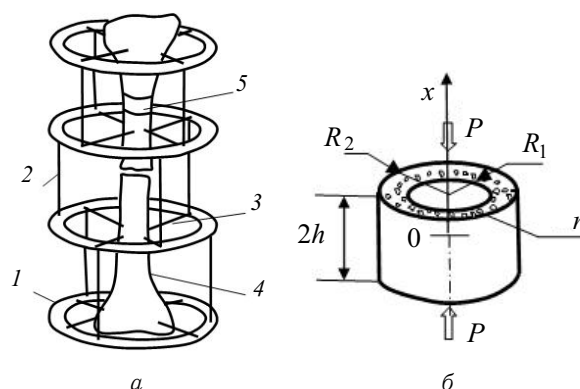


Рис. 1. Отломки большеберцовой кости в спицевом аппарате внешней фиксации Г.А. Илизарова (а): 1 — кольцевая опора, 2 — соединительный стержень, 3 — фиксирующая спица, 4 — нижний костный отломок, 5 — фрагмент; фрагмент диафиза верхнего отломка кости, находящейся в недогруженном состоянии (б): P — усилие сжатия, R_1 , R_2 — внутренний и внешний радиусы, r — радиус гаверсовых каналов

1. ОСНОВНЫЕ ПОЛОЖЕНИЯ КОНТРОЛИРУЕМОЙ РЕАБИЛИТАЦИИ

Процесс контролируемой реабилитации базируется на следующих положениях:

- процесс реабилитации кости встраивается в курс лечебно-восстановительной физкультуры (ЛФК), назначаемый после снятия аппарата внешней фиксации,
- в течение ЛФК пациент не опирается на восстанавливаемую конечность,
- реабилитационные нагрузки на восстанавливаемую конечность прикладываются в тренажерном устройстве (рис. 2),

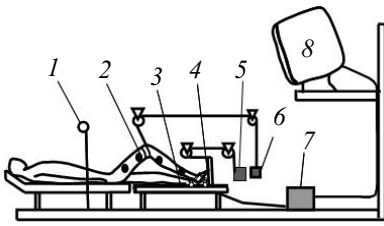


Рис. 2. Тренажер с двумя отягощениями: 1 — видеокамера, 2 — видеометка, 3 — подометрическая платформа, 4 — тележка, 5 — основной груз, 6 — вспомогательный груз, 7 — программный блок, 8 — дисплей

— назначение последовательности реабилитационных нагрузок осуществляется на основании предварительного биомеханического моделирования процесса восстановления упругих и прочностных свойств костной ткани.

Для самоконтроля заданного движения конечности с помощью видеокамеры 1 и видеометок 2 фиксируются межзвенные углы, и их изменение во времени отображается на дисплее 8. Аналогично контролируется пациентом поддержание заданной силы давления тележки 4 на подометрическую платформу 3. Величины грузов 5, 6 обеспечивают требуемую осевую силу сжатия кости для текущей стадии восстановления.

2. МОДЕЛЬ АДАПТАЦИОННЫХ ИЗМЕНЕНИЙ МИНЕРАЛЬНОЙ КОМПОНЕНТЫ СОСТАВА КОРТИКАЛЬНОЙ КОСТНОЙ ТКАНИ

Процессы минерализации и деминерализации костной ткани связаны с движением крови в сосудах гаверсовой системы и деятельностью клеток, продуцирующих органические волокна матрикса, — остеобластов [5].

На микроциркуляцию в кости, в свою очередь, существенное влияние оказывает ее деформирование. На основании хорошего соответствия численной оценки объема протекающей крови за опорную фазу шага в диафизе большеберцовой кости экспериментальным значениям этой величины предложен механизм влияния анизотропии упругих свойств и объемной деформации плотной костной ткани на микроциркуляцию [6]. При этом предполагается, что данный механизм лежит в основе «реологической адаптации», регулирующей процессы метаболизма кости при изменении функциональной нагрузки (в том числе ее минеральное содержание). С ростом пиковой нагрузки на кость усиливается кровоснабжение костной ткани и, следовательно, увеличиваются приток минералов и минеральная плотность. Снижение уровня осевой пиковой нагрузки приводит к ослаблению микроциркуляции крови и доставки минералов в костную ткань, нарушающему минеральный баланс матрикса в сторону деминерализации.

Однако ввиду недостаточной изученности влияния механических факторов на микроциркуляцию крови и жидкости в костной ткани математическое описание механизма реологической адаптации в настоящее время отсутствует. В связи с этим представленная в данном исследовании математическая модель адаптивной пороупругости плотной костной ткани, учитывающая процессы минерализации и деминерализации костного вещества (матрикса), является новой.

В основе подхода лежит представление костной ткани как многокомпонентной смеси, рассматриваемой на двух структурных уровнях.

Модель первого структурного уровня включает матрикс и мягкие ткани со свободной водой, заполняющие гаверсовы каналы. Характерным размером структуры данного уровня является средний диаметр гаверсовых каналов ($\sim 0,06$ мм), что позволяет отнести масштаб рассматриваемой модели к масштабу мезоуровня. В соответствии с правилом осреднения свойств смеси [7] выражение модуля упругости костной ткани через модули упругости матрикса E_m и мягких тканей вместе со свободной водой, заполняющих гаверсовы каналы, E_t определяется как

$$E = \xi E_m + \xi_t E_t, \quad (1)$$

где ξ , ξ_t — объемные содержания матрикса и мягких тканей (вместе со свободной водой) соответственно. Поскольку модуль упругости матрикса существенно выше модуля упругости мягких тканей, а ξ , ξ_t являются величинами одного порядка, последним слагаемым в (1) можно пренебречь, т. е.

$$E = \xi E_m. \quad (2)$$

Определяющие соотношения изменения минеральной компоненты состава костного вещества устанавливаются, исходя из следующих данных.



Как известно, недогрузка кости приводит к потере минеральной компоненты ее матрикса, играющей главную роль в обеспечении жесткости плотной кости [8]. Поэтому при иммобилизации конечности наряду с резорбцией происходит деминерализация костной ткани, а в процессе реабилитации уровень минеральной плотности восстанавливается.

Модель второго структурного уровня относится к матриксу костной ткани и включает минеральную (гидроксиапатит) и органическую (тропоколлаген) компоненты. По правилу смеси модуль упругости матрикса связан с модулями упругости минеральной E_a и органической E_o компонент соотношением

$$E_m = \xi_a E_a + \xi_o E_o, \quad (3)$$

где ξ_a , ξ_o — объемные содержания минеральной и органической компонент соответственно. Учитывая малость величины модуля упругости тропоколлагеновых волокон (0,01–0,57 ГПа [9]) по отношению к кристаллам гидроксиапатита (40–90 ГПа [9]), в соотношении (3) последним слагаемым можно пренебречь и, следовательно,

$$E_m = \xi_a E_a. \quad (4)$$

Из равенств (2), (4) следует зависимость модуля упругости костной ткани от параметров структуры, определяющих ξ , и объемного содержания минеральной компоненты ξ_a в виде

$$E = \xi \xi_a E_a, \quad (5)$$

где произведение $\xi \xi_a$ является объемным содержанием минералов в костной ткани, вычисленным по *in vitro* экспериментальным данным и равным при физиологических нагрузках 0,24 [10].

В процессе внутренней адаптационной перестройки в соотношении (5) изменяются объемные содержания как ξ , так и ξ_a . Величина ξ является функцией радиуса гаверсовых каналов $r(t)$:

$$\xi(r(t)) = 1 - \pi r^2(t) n, \quad (6)$$

где последнее слагаемое определяет пористость костной ткани, n — плотность гаверсовых каналов (м^{-2}). Для определения величины ξ_a постулируется кинетическое уравнение, устанавливающее линейную зависимость изменения объемного содержания минеральной компоненты матрикса от деформационного стимула адаптации

$$\dot{\xi}_a = -a_i (\varepsilon - \varepsilon^{eq}), \quad i = 1, 2, \quad (7)$$

где величины коэффициентов a_1 , a_2 определяются экспериментально для процессов деминерализации и минерализации соответственно. Кинетическое уравнение (7) является феноменологическим описанием механизма реологической адаптации кортикальной костной ткани при изменении одноосной деформации сжатия. С превышением текущей деформации сжатия ε ее равновесного значения ε^{eq} величина $\dot{\xi}_a > 0$, что говорит о минерализации костной ткани и, наоборот, при уменьшении текущей деформацией сжатия от ее равновесного значения $\dot{\xi}_a < 0$, т. е. осуществляется деминерализация.

3. НАЧАЛЬНО-КРАЕВАЯ ЗАДАЧА АДАПТАЦИОННОЙ ПОРОУПРУГОСТИ ФРАГМЕНТА БОЛЬШЕБЕРЦОВОЙ КОСТИ

В качестве исследуемой области берется фрагмент диафиза верхнего отломка кости (см. рис. 1, б). Специфическая «треугольная» форма поперечного сечения большеберцовой кости заменяется равной по площади круговой формой и имеет вид толстостенного цилиндра. На верхнем основании цилиндра показаны круговые сечения гаверсовых каналов радиуса r . Фрагмент сжимается равномерно распределенной осевой силой P , приложенной к торцам цилиндра параллельно его оси.

Напряженно-деформированное состояние (НДС) фрагмента предполагается одноосным (вдоль оси цилиндра) и является симметричным относительно серединного поперечного сечения, поэтому в качестве рассматриваемой области принимается верхняя половина цилиндра ($x \geq 0$).

Уравнения начально-краевой задачи, решаемой на каждой стадии реабилитационного нагружения, имеют скалярную форму и содержат нижеследующие соотношения.

Уравнение равновесия в пренебрежении весом

$$\frac{\partial \sigma}{\partial x} = 0, \quad x \in (0, h), \quad (8)$$

предполагает однородность напряженно-деформированного состояния фрагмента кости.

Определяющие соотношения внешней перестройки в виде кинетических уравнений изменения радиусов эндостальной R_1 и периостальной R_2 поверхностей [10]

$$\dot{R}_1 = a(\varepsilon - \varepsilon^{eq}), \quad \dot{R}_2 = -a(\varepsilon - \varepsilon^{eq}), \quad (9)$$

где a — коэффициент, характеризующий активность и плотность расположения костных клеток на поверхности пор [12], $\varepsilon, \varepsilon^{eq}$ — текущая и равновесная (установившаяся) деформации соответственно. Из соотношений (9) следует, что при росте сжимающей нагрузки P текущая деформация сжатия превышает ее равновесное значение и величина радиуса мозгового канала кости R_1 уменьшается, а наружный радиус кости R_2 растет. Это приводит к увеличению площади поперечного сечения кости и уменьшению текущей деформации сжатия до равновесного значения. В этом заключается адаптационный механизм внешней перестройки кости.

Определяющие соотношения внутренней перестройки для напряжения σ и радиуса гаверсовых каналов r принимают вид [4, 13]

$$\dot{\sigma} = -R'(\varepsilon - \varepsilon^{eq})\varepsilon + \xi E_m \dot{\varepsilon}, \quad (10)$$

$$\dot{r} = a(\varepsilon - \varepsilon^{eq}), \quad (11)$$

где точкой обозначена материальная производная по времени, ξ, E_m — объемное содержание и модуль упругости матрикса соответственно, R' — положительная функция параметров структуры, характеризующая чувствительность костной ткани к деформационному стимулу адаптации, определяемая следующим образом.

Для рассматриваемого случая одноосного НДС фрагмента кости кинетическое уравнение адаптационного изменения модуля упругости костной ткани как структуры E имеет вид [4]

$$\dot{E} = -R'(\varepsilon - \varepsilon^{eq}). \quad (12)$$

Поскольку материальная производная \dot{E} в равенстве (12) с учетом соотношений (5)–(7), (11) имеет вид

$$\dot{E}_i = -(2\pi r n a \xi_a + \xi a_i)(\varepsilon - \varepsilon^{eq}) E_a, \quad i = 1, 2, \quad (13)$$

при $i = 1$ имеет место поглощение кости костными клетками (резорбция), а при $i = 2$ — наоборот, продуцирование костного вещества, то из (12) и (13) следует искомое выражение для R'

$$R'_i = (2\pi r n a \xi_a + \xi a_i) E_a, \quad i = 1, 2. \quad (14)$$

Определяющее соотношение реологической адаптации (7).

Граничные условия. На границе $x = h$ (рис. 1, б) напряжение равно

$$\sigma = -P/\pi (R_2^2 - R_1^2) \quad (15)$$

и, следовательно, зависит от процесса внешней перестройки (9). На границе $x = 0$ заданы нулевые перемещения.

Начальные условия. В качестве начального момента времени исследуемого процесса адаптационных изменений в кости принимается день установки аппарата внешней фиксации. В этот момент времени должны быть известны значения следующих функций, характеризующих геометрию, напряженно-деформированное состояние, механические и структурные свойства кости, а именно

$$R_{10} = R_1(0), \quad R_{20} = R_2(0), \quad (16)$$

$$P_0 = P(0), \quad \varepsilon_0 = \varepsilon(0), \quad (17)$$

$$E_0 = E(0), \quad r_0 = r(0), \quad \xi_{a0} = \xi_a(0). \quad (18)$$



При расчетах принято: $R_{10} = 14$ мм, $R_{20} = 8$ мм, P_0 составляет 5% от физиологической нагрузки и определяет величину начальной деформации ε_0 , $E_0 = 18,7$ ГПа [5], $r_0 = 0,03$ мм [14], $\xi_{a0} = 0,253$, $a = 0,055$ мм/день/ЕОД, где ЕОД — единица относительной деформации.

Локальная прочность кости оценивается по напряжению разрушения σ_0^* при сжатии, для которого экспериментально установлена пропорциональность модулю упругости [15]

$$\sigma_0^* = kE_0, \quad (19)$$

где коэффициент k определяется по *in vitro* экспериментальным данным для влажной костной ткани проксимальной трети диафиза большеберцовой кости $\sigma_0^* = 90,9$ МПа [6], т. е. $k = 0,00486$. Предполагается, что соотношение пропорциональности (19) справедливо для текущего момента времени t процесса лечения, включающего временную стадию иммобилизации фрагмента кости в аппарате внешней фиксации и стадии реабилитационного нагружения, т. е.

$$\sigma^*(t) = kE(t), \quad t \in (0, T], \quad (20)$$

где T — длительность процесса лечения (8–9 месяцев).

4. РЕЗУЛЬТАТЫ МОДЕЛИРОВАНИЯ

Исследование включало три этапа: 1) анализ влияния внешней перестройки костной ткани; 2) идентификацию параметров a_1, a_2 модели (7); 3) анализ режима реабилитации.

4.1. Анализ влияния внешней перестройки костной ткани

Исследовалось адаптационное изменение пористости и модуля Юнга и деформации кортикальной костной ткани фрагмента верхней трети большеберцовой кости при уменьшении сжимающей нагрузки на 20% от нормального физиологического уровня. Рассматривались два случая. В первом случае учитывалось совместное влияние внешней и внутренней перестройки. Для этого из уравнений начально-краевой задачи (7)–(20) было исключено определяющее соотношение реологической адаптации (7). Во втором случае учитывалось влияние только внутренней перестройки, т. е. исключались соотношения (7) и (9). Для численного интегрирования дифференциальных уравнений (9)–(11) использовалась схема Эйлера с временным шагом в один день.

Расчеты показали, что при уменьшении нагрузки осуществляется резорбция матрикса путем расширения просвета гаверсовых каналов, что вызывает рост пористости (см. рис. 3, а), как в случае совместного влияния внешней и внутренней перестройки (ромбики), так и в случае действия только внутренней перестройки (сплошная линия). Сравнение этих данных показывает, что влияние внешней перестройки на рост пористости возрастает со временем, однако остается малым в течение всего процесса (наибольшее отклонение ромбиков от сплошной линии не превышает 3%).

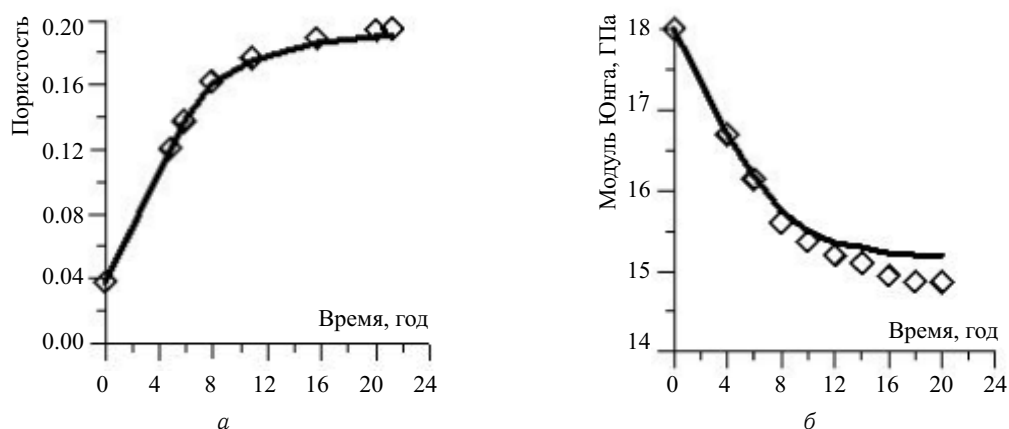


Рис. 3. Адаптационное изменение пористости (а) и модуля Юнга (б) кортикальной костной ткани фрагмента верхней трети большеберцовой кости при уменьшении сжимающей нагрузки на 20%. Совместное влияние внешней и внутренней перестройки представлено ромбиками, линия описывает влияние только внутренней перестройки



Рост пористости вызывает уменьшение модуля Юнга (см. рис. 3, б). Влияние внешней перестройки здесь также пренебрежимо мало (наибольшее отклонение ромбиков от линии также не превышает 3%).

Графики кривых, изображенных на рис. 4–5, в силу их монотонности качественно правильно отражают адаптационный процесс. Однако количественно представляют его слишком медленным, поскольку процесс лечения (сращение плюс реабилитация) длится не более 8–9 месяцев. Этот факт свидетельствует о необходимости учета изменения минеральной компоненты состава костного вещества, описываемого соотношением (7).

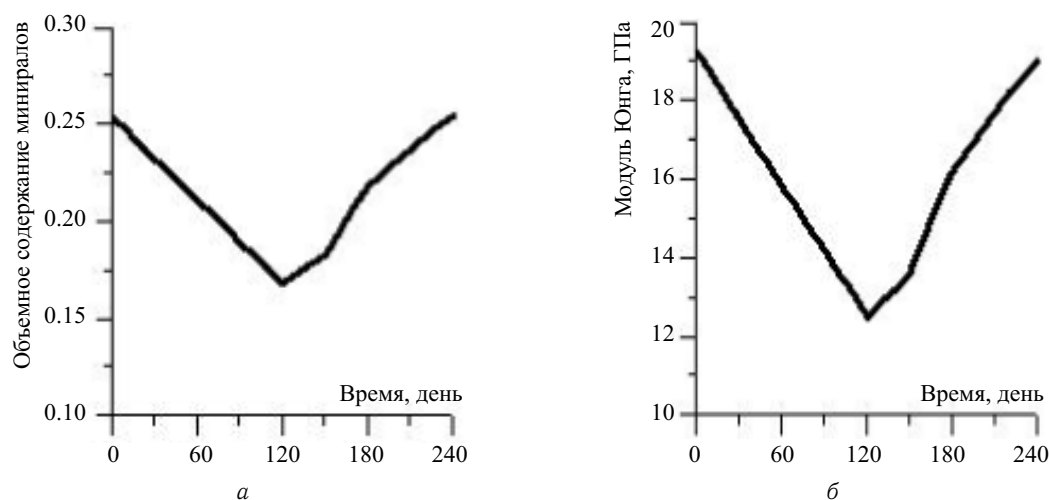


Рис. 4. Изменение объемного содержания минералов (а) и модуля Юнга (б) костной ткани фрагмента большеберцовой кости в течение послеоперационной иммобилизации (120 дней) и последующих четырех стадий реабилитационного нагружения (длительность каждой стадии 30 дней)

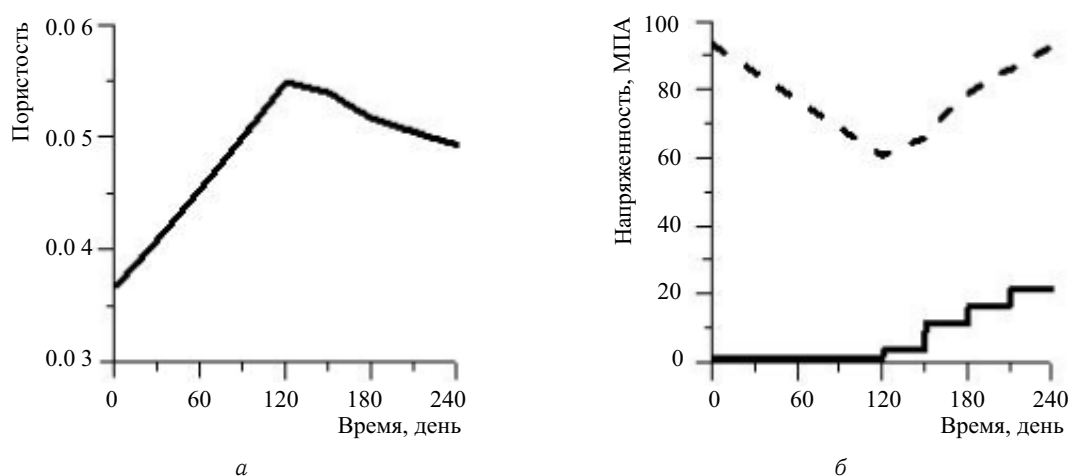


Рис. 5. Изменение пористости (а) и напряжения разрушения, пунктирная линия, и текущего напряжения, сплошная линия, (б) костной ткани фрагмента большеберцовой кости в течение послеоперационной иммобилизации (120 дней) и последующих четырех стадий реабилитационного нагружения (длительность каждой стадии 30 дней)

4.2. Идентификация параметров a_1 , a_2 модели (7)

Коэффициенты a_1 , a_2 определяются на основании следующих клинических данных. Минеральная плотность кортикальной кости (МПК) за время сращения перелома (3,5–4,0 месяца) уменьшается на 10–30%. Так, по нашим измерениям, уменьшение оптической плотности рентгенограмм проксимального отдела бедра до операции остеосинтеза шейки бедра и после 125 дней иммобилизации в области кортикального слоя шейки составило 13,5%.

Численные эксперименты показали, что при уменьшении МПК в течение четырехмесячного периода сращения перелома на 30% коэффициент a_1 равен 0,7.



Вторым важным экспериментальным фактом является то, что МПК в течение реабилитации на костылях восстанавливается к дооперационному уровню в среднем за 4,0–4,5 месяцев. Удовлетворяющее этому условию значение коэффициента a_2 лежит в пределах 1,16–1,25 (верхний предел соответствует 4,0 месяцам).

4.3. Анализ режима реабилитации

Исследуемый процесс состоит из пяти стадий. В течение первой стадии осуществляется сращение отломков кости, с одной стороны, и иммобилизации фрагментов кости аппаратом внешней фиксации, с другой стороны. Остальные четыре стадии являются восстановительными. Длительности стадий и уровни реабилитационных нагрузок (в процентах по отношению к физиологической нагрузке) представлены в таблице.

На каждой стадии процесса решается начально-краевая задача (7), (8), (10)–(20) с применением схемы Эйлера для численного интегрирования дифференциальных уравнений (7), (10), (11).

Длительности стадий и уровни реабилитационных нагрузок

№ стадии	1	2	3	4	5
Длительность, день	120	30	30	30	30
Нагрузка, %	5	17	53	77	100

Результаты моделирования представлены на рис. 4–5.

В течение стадии иммобилизации объемное содержание минералов (см. рис. 4, а) уменьшается практически линейно (в силу соотношения (7)), поскольку на данной стадии деформация кости изменяется незначительно. Затем по мере увеличения реабилитационной нагрузки начинается минерализация кости. Причем, чем больше величина стимула адаптации $\varepsilon - \varepsilon^{eq}$, тем более заметна нелинейность изменения объемного содержания минералов. Например, на третьей стадии (интервал между 150-м и 180-м днями) стимул адаптации имеет наибольшее значение, а изменение объемного содержания минералов на данной стадии имеет ярко выраженный нелинейный характер (см. рис. 4, а). Эти закономерности свойственны кривым изменения модуля Юнга (см. рис. 4, б) и пористости (см. рис. 5, а).

Характер изменения модуля Юнга (см. рис. 4, б) аналогичен кривой изменения объемного содержания минералов (см. рис. 4, а). Кроме того, величина пористости не достигает начального уровня к концу процесса реабилитации (см. рис. 5, а). Отсюда, с учетом соотношения (5), следует важный вывод о слабом влиянии изменения пористости по сравнению с влиянием изменения минеральной компоненты состава костного вещества на адаптацию кортикальной кости в целом и на изучаемый реабилитационный процесс в частности.

Разложение в ряд Тейлора функции (5) по степеням приращений $\Delta\xi$ и $\Delta\xi_a$ на стадии иммобилизации с учетом соотношения (6) дает оценку вклада изменения пористости в изменение модуля Юнга, равную 5,5%. Другими словами, вклад изменения минеральной компоненты состава костного вещества в изменение модуля упругости превосходит в 17 раз (94,5/5,5) вклад от изменения пористости кости. Следовательно, для кортикальной костной ткани наиболее существенное влияние на изменение механических свойств оказывает реологическая адаптация.

Полученная выше сравнительная оценка влияния пористости и минерального содержания кости на изменение модуля Юнга распространяется и на стадии реабилитационного нагружения, поскольку величина коэффициента a в определяющем соотношении (11) принимается одинаковой как для процесса резорбции кости на стадии иммобилизации, так и для процесса продуцирования костного вещества на стадиях реабилитационного нагружения конечности.

Характер изменения исследуемых характеристик костной ткани (рис. 4, 5) обладает общими свойствами регуляционных процессов в биологии кости — монотонностью и ограниченностью. Монотонность обуславливается инерционностью участвующих клеточных процессов, а ограниченность при деминерализации следует из поддержания гомеостаза состава матрикса живым организмом, а при минерализации объемное содержание минералов ограничивается физиологическим уровнем.

Другим важным свойством моделируемого процесса реабилитации является реалистичность времени его завершения — при достижении реабилитационной нагрузкой физиологического уровня (100% нагрузка, см. таблицу) за 4-месячный восстановительный период содержание минералов (см. рис. 4, а) и модуль упругости (см. рис. 4, б) достигают физиологических нормальных значений. Это свойство



модели получено благодаря учету влияния деформации на минеральное содержание матрикса костной ткани с помощью соотношения (7) и позволяет характеризовать модель как адекватную процессам контролируемого восстановления кортикальной костной ткани нижней конечности.

Мерой оценки прочности восстанавливаемой костной ткани является близость кривых текущего напряжения и напряжения разрушения (см. рис. 5, б). На первой стадии величина текущего напряжения мала ввиду низкого значения нагрузки (5% от физиологического уровня, см. таблицу). В течение каждой стадии нагружения величина текущего напряжения постоянна, поскольку площадь сечения образца не изменяется ввиду пренебрежения процессом внешней перестройки. Наименьшее расстояние между кривыми текущего напряжения и напряжения разрушения наблюдается в начале третьей стадии и составляет не менее 60 МПа. Коэффициент запаса прочности при этом равен 6,3. Следовательно, разрушение восстанавливаемой кортикальной костной ткани невозможно при любом распределении реабилитационных нагрузок по стадиям. И только случайное динамическое нагружение с шестикратным превышением напряжений в костной ткани является опасным. Применение контролируемой реабилитации исключает такого рода случайность.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Контролируемая реабилитация костей нижней конечности позволяет избежать случайных перегрузок и микроразрушений структуры костной ткани, вызывающих боли в отдаленные сроки. Первым и главным этапом разработки режимов контролируемого восстановления костной ткани является биомеханическое моделирование адаптационных изменений ее структуры и механических свойств.

Построена модель, в которой учитываются три вида адаптации: внешняя, описывающая изменение размеров кости, внутренняя, описывающая изменение пористости, и реологическая, описывающая изменение минерального содержания матрикса. Определяющее соотношение реологической адаптации сформулировано впервые и устанавливает линейную связь между скоростью изменения объемного содержания минералов в матриксе и деформационным стимулом адаптации. Коэффициенты пропорциональности для резорбции и для продуцирования матрикса устанавливаются по известным экспериментальным данным.

Анализ моделирования исследуемого режима реабилитационных нагрузок выявил слабое влияние внешней адаптации по сравнению с внутренней адаптацией на изменение механических и структурных характеристик восстанавливаемой кортикальной костной ткани. Этот факт обусловлен существенным различием величин площадей внешней и внутренней остеогенных поверхностей кости. Площадь наружной поверхности исследуемого фрагмента кости (суммарная поверхность надкостницы и костномозгового канала) существенно меньше суммарной площади гаверсовых каналов. Кроме того, установлено также слабое влияние внутренней структурной адаптации по сравнению с реологической адаптацией. Показано, что пренебрежение внутренней адаптацией при моделировании процесса реабилитации рассматриваемого фрагмента большеберцовой кости приведет на стадии иммобилизации к погрешности определения модуля Юнга, не превышающей 5,5%.

Библиографический список

1. Янсон, Х.А. Биомеханика нижней конечности / Х.А. Янсон. Рига: Зинатне, 1975. 362 с.
2. Акулич, Ю.В. Сравнительный анализ влияния механических факторов на потерю массы костной ткани протезированного бедра / Ю.В. Акулич, А.В. Сотин // Механика композиционных материалов и конструкций. 2007. Т. 13, № 2. С. 254–264.
3. Ладейщиков, В.М. Оптимизация диагностики и комплексного лечения пострадавших с сочетанной травмой: автореф. дис. ... д-ра мед. наук / Ладейщиков В.М. Самара, 2008. 39 с.
4. Акулич, Ю.В. Математическая модель процесса внутренней адаптационной перестройки спонгиозной и кортикальной костных тканей человека / Ю.В. Акулич // Механика композиционных материалов и конструкций. 2005. Т. 11, № 2. С. 157–168.
5. Регирер, С.А. Движение крови и интерстициальной жидкости в костной ткани / С.А. Регирер, Н.Х. Шадрина // Механика жидкости и газа. 1999. Т. 5. С. 4–28.
6. Кнетс, И.В. Деформирование и разрушение твердых биологических тканей / И.В. Кнетс, Г.О. Пфафрод, Ю.Ж. Саулгозис. Рига: Зинатне, 1980. 317 с.
7. Победря, Б.Е. Механика композиционных материалов / Б.Е. Победря. М.: Изд-во МГУ, 1984. 336 с.
8. Currey, J.D. The many adaptations of bone / J.D. Currey // J. of Biomechanics. 2003. Vol. 36. P. 1487–1495.
9. Lawson, A.C. Collagen-calcium-phosphate composites

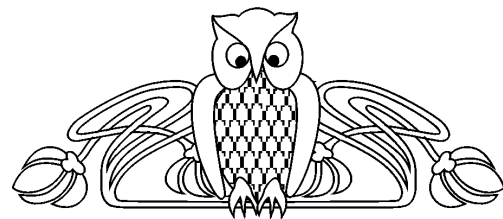


/ A.C. Lawson, J.T. Czernutzka // Proc. Inst. Mech. Engrs. 1998. Vol. 212, part H. P. 413–425.
 10. Аврунин, А.С. Наноразмерный механизм жесткости и прочности кости / А.С. Аврунин [и др.] // Травматология и ортопедия России. 2008. Т. 2, № 48. С. 77–83.
 11. Cowin, S.C. Bone remodeling of diaphysal surfaces under constant load: theoretical predictions / S.C. Cowin, K.J. Firoozbakhsh // J. of Biomechanics. 1981. Vol. 7. P. 471–484.
 12. Sotin, A.V. The model of cortical bone tissue adaptive remodeling / A. V. Sotin, Yu. V. Akulich, R. M. Podgaets // Rus. J. of Biomechanics. 2001. Vol. 5, № 1. P. 24–31.
 13. Акулич, Ю.В. Адаптационные изменения свойств

костной ткани фрагментов кости после остеосинтеза шейки бедра жёсткими резьбовыми фиксаторами / Ю.В. Акулич, А.Ю. Акулич, А.С. Денисов // Механика композиционных материалов и конструкций. 2008. Т. 14, № 3. С. 313–331.
 14. Martin, R.B. Skeletal Tissue Mechanics / R.B. Martin, D. Burr, N.A. Sharkey. N.Y.: Springer, 1998. 392 p.
 15. Lindahl, O. Cortical bone in man. II. Variation in tensile strength with age and sex / O. Lindahl, A. Lindgren // Acta Orthopaed. Scand. 1967. Vol. 38. P. 141–147.

УДК 539.374

ПРОХОЖДЕНИЕ ОБОБЩЕННОЙ GNIII-ТЕРМОУПРУГОЙ ВОЛНЫ ЧЕРЕЗ ВОЛНОВОД С ПРОНИЦАЕМОЙ ДЛЯ ТЕПЛА СТЕНКОЙ



В.А. Ковалев¹, Ю.Н. Радаев², Р.А. Ревинский³

¹Московский городской университет управления Правительства Москвы, кафедра прикладной математики
 E-mail: vlad_koval@mail.ru

²Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН, Москва
 E-mail: y.radayev@gmail.com,

³Саратовский государственный университет, кафедра теории упругости и биомеханики
 E-mail: rvskra@gmail.com

Generalized Cross-Coupled Type-III Thermoelastic Waves Propagating via a Waveguide under Sidewall Heat Interchange

V.A. Kovalev¹, Yu.N. Radayev², R.A. Revinsky³

¹Moscow City Government University of Management, Chair of Applied Mathematics
 E-mail: vlad_koval@mail.ru

²Institute for Problems in Mechanics RAS, Moscow
 E-mail: y.radayev@gmail.com

³Saratov State University, Chair of Mathematical Theory of Elasticity and Biomechanics
 E-mail: rvskra@gmail.com

Настоящее исследование посвящено изучению распространения обобщенных связанных термоупругих волн в длинном цилиндрическом волноводе. При этом предполагается, что стенка волновода свободна от нагрузок и является проницаемой для тепла. Исследование проводится, следуя теории связанной обобщенной GNIII-термоупругости, согласованной с основными принципами термодинамики. Данная теория сочетает оба известных типа распространения тепла: термодиффузионный и волновой. Предельными случаями обобщенной термоупругости типа III являются классическая термоупругость (GNI/CTE) и гиперболическая термоупругость (GNII), которая может быть сформулирована в терминах классической теории поля. Дифференциальные уравнения поля в этом случае принадлежат гиперболическому аналитическому типу. Методом разделения переменных найдено замкнутое решение уравнений связанной GNIII-термоупругости, которое удовлетворяет необходимым краевым условиям на стенке волновода, в том числе и условию конвективного теплообмена с окружающей средой. Проведен численный анализ частотного уравнения. Описана схема локализации корней частотного уравнения и найдены волновые числа связанных термоупругих волн, в частности первого азимутального порядка.

Ключевые слова: термоупругость, GNIII-термоупругость, частотное уравнение, волновод, волновое число, форма волны, азимутальный порядок.

The paper is devoted to a study of cross-coupled type-III generalized thermoelastic waves propagation via a long cylindrical waveguide. The sidewall of the waveguide is assumed free from tractions and permeable to heat. The analysis is carried out in the framework of coupled generalized theory of GNIII-thermoelasticity consistent with the basic thermodynamic principles. The theory combines the both possible mechanisms of heat transfer: thermodiffusion and wave. Type-III generalized thermoelasticity includes classical thermoelasticity (GNI/CTE) and the theory of hyperbolic thermoelasticity (GNII) as limiting cases. The GNII-theory can be formulated as a field theory and differential field equations are of hyperbolic analytical type. Closed solution of the coupled GNIII-thermoelasticity equations satisfying the required boundary conditions on the surface of waveguide including convective heat interchanging condition has been obtained. The paper provides numerical analysis of frequency equation. A scheme of frequency equation roots localization is described and wavenumbers of the coupled thermoelastic waves of the first azimuthal order are computed.

Key words: thermoelasticity, type-III thermoelasticity, frequency equation, waveguide, wavenumber, wave mode, azimuthal order.