



$$\Pi_{w0c}(\omega) = m_0^* D^{-1} \sqrt{\left( A_{psc} + \frac{D[A_{ck}Q_{so} + B_{ck}Q_{co}]}{n_1 m_0^* \omega^2} \right)^2 + \left( B_{psc} + \frac{D[A_{ck}Q_{co} - B_{ck}Q_{so}]}{n_1 m_0^* \omega^2} \right)^2},$$

$\Pi_{wps}(\omega) = D^{-1} \sqrt{A_{psk}^2 + B_{psk}^2}$  — амплитудные частотные характеристики упругого статора демфера,

$$\Psi_{wpc} = \arctg \frac{A_{psc} + \frac{D2lb}{n_1} [A_{ck}Q_{sp} - B_{ck}Q_{cp}]}{B_{psc} - \frac{D2lb}{n_1} [A_{ck}Q_{cp} + B_{ck}Q_{sp}]}, \quad \Psi_{w0c} = \arctg \frac{A_{psc} + \frac{D}{n_1 m_0^* \omega^2} (A_{ck}Q_{so} + B_{ck}Q_{co})}{B_{psc} + \frac{D}{n_1 m_0^* \omega^2} [A_{ck}Q_{co} - B_{ck}Q_{so}]},$$

$\Psi_{wps} = \arctg \frac{A_{psk}}{B_{psk}}$  — фазовые частотные характеристики упругого статора демфера.

Таким образом, найдено решение динамической задачи гидроупругости гидропоры, которое позволяет исследовать ее динамику и находить резонансные частоты колебаний ее вибратора и статора.

*Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 10-01-00177-а).*

### Библиографический список

1. Лойцянский Л.Г. Механика жидкости и газа. М.: Дрофа, 2003. 840 с.
2. Слезкин Н.А. Динамика вязкой несжимаемой жидкости. М.: Гостехиздат, 1955. 520 с.
3. Андрейченко К.П. Динамика поплавковых гироскопов и акселерометров. М.: Машиностроение, 1987. 126 с.
4. Попов В.С. Динамическая задача гидроупругости вибропоры с пластиной подкрепленной ребрами жесткости // Вестн. Сарат. гос. техн. ун-та. 2008. № 3, вып.1. С. 7–13.
5. Гориков А.Г., Морозов В.И., Пономарев А.Т., Шклярчук Ф.Н. Аэрогидроупругость конструкций. М.: Физматлит, 2000. 591 с.
6. Коновалов С.В. Теория виброустойчивости акселерометров. М.: Машиностроение, 1991. 272 с.

УДК 531/534:[57+61]

## ОПРЕДЕЛЯЮЩИЕ СООТНОШЕНИЯ СТРУКТУРНОЙ АДАПТАЦИИ КОСТНОЙ ТКАНИ

Ю.В. Акулич, П.А. Брюханов, М.В. Мерзляков, А.В. Сотин

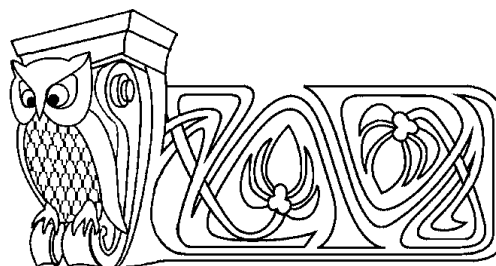
Пермский государственный технический университет, кафедра теоретической механики  
E-mail: Y.Akulich@yandex.ru, auv@cpl.pstu.ac.ru, sotin@mail.ru

Для кортикальной и трабекулярной костной ткани предлагаются определяющие соотношения функциональной адаптации структуры, устанавливающие связь скорости изменения радиуса пор с деформационным стимулом адаптации и активностью костных клеток. Развитый подход учёта клеточной активности является альтернативой известному экспериментальному методу Frost'a базовых многоклеточных единиц и позволяет распространить клеточный механизм ремоделирования на процесс функциональной адаптации.

**Ключевые слова:** костная ткань, структурная адаптация, определяющее соотношение, деформационный стимул, активность костных клеток.

### ВВЕДЕНИЕ

В первых работах по теории адаптационной пороупругости, использующих термодинамический подход, определяющее соотношение функциональной адаптации структуры костной ткани (закон ремоделирования в зарубежных публикациях) получено в виде кинетического уравнения [1]:



### The Constitutive Equations for the Bone Tissue Structural Adaptation

Yu.V. Akulich, P.A. Bruchanov, M.V. Merzlyakov, A.V. Sotin

Perm State Technical University,  
Chair of Theoretical Mechanics  
E-mail: Y.Akulich@yandex.ru, auv@cpl.pstu.ac.ru, sotin@mail.ru

The constitutive relationships for cortical and trabecular bone tissue structural adaptation are offered. These constitutive equations connect the rate of change of the porous radius with the strain adaptive stimulus and the bone cells activation. The used approach takes account of bone cells activation and it is alternative to the known experimental Frost's Basic Multicellular Units method. That approach allows spreading the cellular remodeling mechanism on the functional adaptation process.

**Key words:** bone tissue, structural adaptation, constitutive relationship, strain stimulus, bone cells activation.



$$\dot{\xi} = a(\xi) + \tilde{A}(\xi, \tilde{\varepsilon}) : \tilde{\varepsilon}, \quad (1)$$

где  $a(\xi)$ ,  $\tilde{A}(\xi, \tilde{\varepsilon})$  — экспериментально определяемые функции. Скалярную функцию  $a(\xi)$  можно трактовать как скорость изменения объёмного содержания матрикса  $\dot{\xi}$ , обусловленную процессами роста. Второе слагаемое равенства (1) определяет скорость изменения объёмного содержания костного вещества, обусловленную деятельностью костных клеток и деформацией костной ткани  $\tilde{\varepsilon}$ . Деформации полагаются малыми, отсчитываемыми от нулевых значений.

При исследовании костной ткани взрослого человека (старше 20 лет), когда ростовые процессы отсутствуют, соотношение (1) не содержит первого слагаемого

$$\dot{\xi} = \tilde{A}(\xi, \tilde{\varepsilon}) : \tilde{\varepsilon}. \quad (2)$$

Выражение (2) получено разложением в ряд Тейлора по степеням тензора малых деформаций  $\tilde{\varepsilon}$  некоторой нелинейной функции больших деформаций [1], поэтому компоненты тензорной функции  $\tilde{A}(\xi, \tilde{\varepsilon})$  определяются равенством

$$A_{ij}(\xi, \tilde{\varepsilon}) = \frac{1}{\rho_m} \frac{\partial}{\partial \varepsilon_{ij}} \left[ c(\xi, \tilde{\varepsilon}) \sqrt{\det(I + 2\tilde{\varepsilon})} \right] \Big|_{\tilde{\varepsilon}=0}, \quad i, j = \overline{1, 3}, \quad (3)$$

где  $\rho_m$ ,  $c(\xi, \tilde{\varepsilon})$  — плотность костного вещества (матрикса) и скорость формирования (или резорбции) матрикса костными клетками соответственно,  $I$  — единичный тензор.

Из соотношения (3) следует, что тензор  $\tilde{A}(\xi, \tilde{\varepsilon})$  характеризует анизотропию активности костных клеток. Однако трудности экспериментального определения функции  $c(\xi, \tilde{\varepsilon})$  не позволяют вычислить компоненты тензора  $\tilde{A}(\xi, \tilde{\varepsilon})$  и использовать соотношение (2) в алгоритмах адаптации.

Математическое описание зависимости между скоростью изменения пористости костной ткани  $\dot{p}$  и характеристиками процесса деятельности клеток-исполнителей было установлено несколько ранее путем геометрического представления процесса ремоделирования в виде [2]

$$\dot{p}(t) = -B(t) \cdot S_v, \quad t \in [0, T], \quad (4)$$

где  $B(t)$  — «балансовый фактор», или скорость изменения средней по длине остеона толщины слоя продуцируемого (или резорбируемого) матрикса (мм/день) на суммарной в единице объёма костной ткани площади остеогенной (внутренней) поверхности пор  $S_v$  (мм<sup>2</sup>/мм<sup>3</sup>), определяемый как

$$B(t) = \lambda_b(t)a_b(t)\delta_b(t) - \lambda_c(t)a_c(t)\delta_c(t), \quad t \in [0, T], \quad (5)$$

где функции времени  $\lambda_b(t)$ ,  $\lambda_c(t)$  — доли поверхности пор, занятой остеобластами или остеокластами соответственно,  $a_b(t)$ ,  $a_c(t)$  — скорости производства и резорбции матрикса соответственно (мм/день),  $\delta_b(t)$ ,  $\delta_c(t)$  — доли активных остеобластов и остеокластов из всех клеток, расположенных на поверхности пор, соответственно,  $T$  — длительность цикла ремоделирования [3]. Определение удельной площади остеогенной поверхности  $S_v$  предполагается экспериментальным стереологическим методом [4].

В равенстве (4) не учитывается влияние деформации на скорость изменения пористости (в отличие от равенства (2)), а также не содержится в качестве аргумента механическая величина, воспринимаемая костными клетками как стимул, запускающий процесс адаптации. Поэтому данное уравнение также не может рассматриваться в качестве определяющего соотношения структурной адаптации. В то же время оно устанавливает существенную связь структуры с характеристиками активности костных клеток (5), для которых известны экспериментальные значения.

Позднее правая часть соотношения (4) была представлена в терминах основных многоклеточных единиц, известных в литературе как БМЕ (базовые многоклеточные единицы) в виде [5, 6]

$$\dot{p} = -A(N_p/T_p - N_r/T_r), \quad (6)$$

где  $A$  — площадь поперечного сечения остеона, ограниченная цементной линией,  $N_p$ ,  $N_r$  — число продуцирующих и резорбирующих БМЕ в текущий момент времени соответственно, расположенных на единице площади поверхности,  $T_p$ ,  $T_r$  — временные периоды активности продуцирующих и резорбирующих БМЕ соответственно.



Параметры  $N_p$ ,  $N_r$  являются функциями времени и вычисляются интегрированием истории частоты активации БМЕ  $f(t)$  по времени соответствующих периодов активации [7] в течение жизни человека (частота активации БМЕ — число ремоделируемых остеонов, видимых на единице площади поперечного среза кортикальной кости в течение года ( $\text{мм}^{-2} \text{год}^{-1}$ )). Поскольку зависимости  $f(t)$  устанавливаются путём длительных экспериментальных (гистологических) исследований для каждой кости человека [8], в которых не фиксируются величины стимула адаптации, соотношение (6) также не может рассматриваться в качестве определяющего соотношения структурной адаптации как регуляционного процесса.

Таким образом, установление определяющего соотношения структурной адаптации костной ткани является актуальной задачей, решению которой посвящается настоящая статья. Показана необходимость конкретного представления формы пор костной ткани. Рассмотрено соотношение процессов ремоделирования и функциональной адаптации. Приводятся формулировки деформационного стимула и балансового фактора активности костных клеток для процесса функциональной адаптации. В результате модификации равенства (4) получены определяющие соотношения структурной адаптации губчатой и кортикальной костной ткани, устанавливающие связь скорости изменения радиуса пор с деформационным стимулом адаптации и активностью костных клеток.

## 1. МОДЕЛЬ СТРУКТУРЫ КОСТНОЙ ТКАНИ

Костная ткань является биоккомпозитом со сложной структурой, имеющей до пяти структурных уровней [9]. В данной работе принимается структурная модель первого уровня, согласно которой костная ткань включает однородное вещество кости (однородный матрикс) и мягкие ткани со свободной водой, заполняющие поры.

Соотношения (1), (4) получены в предположении именно такой модели структуры костной ткани, для которой пористость  $p$  и объёмное содержание матрикса  $\xi$  связаны соотношением [10]

$$p + \xi = 1. \quad (7)$$

Подстановка (7) в (4) приводит к равенству вида

$$\dot{\xi}(t) = B(t) \cdot S_v, \quad t \in [0, T]. \quad (8)$$

Форма пор в губчатой костной ткани принимается сферической радиуса  $r$ , а в кортикальной костной ткани гаверсовы каналы остеонов представляются круговыми цилиндрами одинакового радиуса  $r$ . Влияние поперечных каналов не учитывается ввиду их малой плотности.

Ввод в рассмотрение формы пор позволяет вычислить величину удельной площади их внутренней поверхности, не прибегая к экспериментальному определению, как

$$S_v(r) = \begin{cases} 4\pi r^2 n(r) & \text{— для губчатой костной ткани,} \\ 2\pi r n & \text{— для кортикальной костной ткани,} \end{cases}$$

где  $n$  — плотность пор, измеряемая в  $\text{мм}^{-3}$  в губчатой костной ткани и в  $\text{мм}^{-2}$  — в кортикальной. В губчатой костной ткани плотность пор изменяется в процессе адаптации в зависимости от величины радиуса пор  $r$  и выражается через плотности сырой костной ткани  $\rho_{ск}(r)$ , межтрабекулярной жидкости  $\rho_{ж}$  и матрикса  $\rho_{м}$  по формуле [10]

$$n(r) = \left(1 - \frac{\rho_{ск}(r) - \rho_{ж}}{\rho_{м} - \rho_{ж}}\right) \frac{3}{4\pi r^3}, \quad (9)$$

тогда как в кортикальной костной ткани эта характеристика в возрасте 20–70 лет остаётся практически неизменной и в среднем равна  $13 \text{ мм}^{-2}$  [11], что характеризует кортикальную костную ткань как более консервативную в отношении к изменению внутренней структуры по сравнению с губчатой костной тканью. Зависимость плотности сырой губчатой костной ткани от радиуса пор на основании экспериментальных данных [10] в интервале  $r = 0,15 - 0,45 \text{ мм}$  является линейной:

$$\rho_{ск}(r) = 3,379 - 5,836r.$$



## 2. СООТНОШЕНИЕ ПРОЦЕССОВ РЕМОДЕЛИРОВАНИЯ И ФУНКЦИОНАЛЬНОЙ АДАПТАЦИИ

В биомеханике в настоящее время не достигнуто общее понимание взаимосвязи процессов ремоделирования и функциональной адаптации.

В процессе ремоделирования удаляется часть старой костной ткани и замещается вновь сформированной костной тканью. Считается, что костная ткань стареет по мере накопления усталостных повреждений структуры [12]. Следовательно, ремоделирование предотвращает усталостное разрушение костной ткани. Ремоделирование осуществляется костными клетками в остеонах старой костной ткани в одной и той же временной последовательности, называемой циклом ремоделирования. Цикл ремоделирования состоит из трёх основных временных стадий: стадии активации, резорбции и формирования. На стадии активации формируются остеокласты, на стадии резорбции костный матрикс остеона подвергается растворению ферментами остеокластов, а на стадии формирования остеобластами строится новый остеон [11].

R.V. Martin с соавторами предположил, что функциональная адаптация является расширением ремоделирования на случаи, в которых возможна только резорбция или только формирование матрикса [11]. По-видимому, в связи с этим предположением, как правило, процессы ремоделирования и функциональной адаптации отождествляются и определяются единым термином «ремоделирование», например см. [13, 14].

Однако в данном исследовании предполагается, что эти процессы протекают независимо. Обоснованием такого разделения является *дискретная локальность* процесса ремоделирования – замещаются только те остеоны, в которых усталостная поврежденность структуры достигла критического уровня. Таких остеонов в текущий момент времени адаптации в костной ткани человека относительно мало, поскольку в течение года обновляется только 3% кортикальной и 25% губчатой костной ткани [3]. Другими словами, в некотором произвольном представительном объеме костной ткани ремоделирование не наблюдается и, следовательно, не выполняется гипотеза сплошности для процесса ремоделирования.

Таким образом, из приведённого выше рассмотрения следуют два важных положения: 1) на фоне процесса ремоделирования и параллельно ему осуществляется функциональная адаптация кости; 2) усталостная поврежденность кости при переменных нагрузках является мерой механического стимулирования только процесса ремоделирования.

## 3. ДЕФОРМАЦИОННЫЙ СТИМУЛ СТРУКТУРНОЙ АДАПТАЦИИ

Важным фундаментальным результатом изучения в 20 веке механочувствительности костных клеток явилось установление механизма воздействия деформации матрикса на реакцию костных клеток. Оказалось, что деформация воспринимается остеоцито-канальцевой системой остеона в целом (рис. 1), т.е. эта система является единым «органом механочувствительности костной ткани» [15].

Деформация вызывает не только пьезоэлектрический потенциал ( $\sim 1$  мкВ), но и потенциал течения внутритканевой жидкости в канальцах. Причем величина потенциала течения в два раза выше уровня пьезоэлектрического потенциала и превышает порог чувствительности остеобластов ( $\sim 1,5$  мкВ), вызывая их пролиферацию (размножение делением) [16]. Однако какие-либо количественные соотношения между характеристиками этих явлений в настоящее время авторам не известны.

Кроме потенциала течения, поток внутритканевой жидкости в канальцах воздейству-



Рис. 1. Сеть лакун остеоцитов (чёрные эллипсы) и канальцев (радиальные линии, исходящие из лакун) в остеоне кортикальной костной ткани. Плотности остеоцитов и канальцев соответственно равны  $10^4$ – $10^5$  мм<sup>-3</sup> и  $5 \cdot 10^5$ – $5 \cdot 10^6$  мм<sup>-3</sup>. Ширина поля 180 мкм



ет напряжениями сдвига на остециты. Расчёты показали, что деформации изгиба 0,1% вызывают действие сдвиговых напряжений в канальце величиной около 1 Па, уверенно воспринимаемой остеocytes [17].

Опыты деформирования образцов плотной костной ткани, опущенных в окрашенный раствор, показали [18, 19], что при деформации кости, несмотря на их малую величину, происходят значительные локальные изменения объёма канальцев, вызывающие движение тканевой жидкости в них. Это позволяет принять в качестве стимула адаптации  $S$  изменение относительного объёма частицы костной ткани в виде

$$S = \text{sgn}(I_\varepsilon^{eq})(I_\varepsilon - I_\varepsilon^{eq}), \quad (10)$$

где  $I_\varepsilon, I_\varepsilon^{eq}$  — текущее (после изменения нагрузки) и равновесное значения первого инварианта тензора деформации соответственно. Функция  $\text{sgn}(I_\varepsilon^{eq})$  в равенстве (10) устанавливает характер объёмного деформирования костной ткани в частице кости при нагрузках равновесного состояния (сжатие, растяжение). При увеличении объёмного сжатия ( $I_\varepsilon < I_\varepsilon^{eq}$ ) или объёмного растяжения ( $I_\varepsilon > I_\varepsilon^{eq}$ ) стимул остается положительным.

#### 4. БАЛАНСОВЫЙ ФАКТОР РЕМОДЕЛИРОВАНИЯ КОСТНОЙ ТКАНИ КАК ФУНКЦИЯ ДЕФОРМАЦИОННОГО СТИМУЛА АДАПТАЦИИ

Полагая, что в процессе функциональной адаптации костные клетки-исполнители активируются в той же последовательности, что и в процессе ремоделирования, получим определяющее соотношение структурной адаптации из соотношения (8). Для этого балансый фактор (5) представляется функцией актуальной деформации  $\varepsilon(t)$  (рассматривается одномерный случай вдоль оси остеона компактной костной ткани). Гистологические исследования показали, что при деформации кости изменяется число активных костных клеток [20]. Это позволило предположить, что деформационный стимул адаптации оказывает непосредственное влияние на одновременный рост и убывание долей соответствующих активных костных клеток, то есть на величины  $\delta_b, \delta_c$  [21]. Следовательно, получим

$$B(\varepsilon(t)) = \lambda_b a_b \delta_b(\varepsilon(t)) - \lambda_c a_c \delta_c(\varepsilon(t)), \quad (11)$$

где величины  $\lambda_{b,c}$  и  $a_{b,c}$  являются постоянными. Функции  $\delta_b(\varepsilon), \delta_c(\varepsilon)$  в первом приближении принимаются линейными в интервале допустимых деформаций  $\varepsilon_{\max} \geq \varepsilon \geq \varepsilon_{\min}$  (деформации, при которых осуществляется адаптация, невелики и лежат в пределах  $\pm 0,3\%$  [22]). Изображенные на рис. 2 зависимости отражают экспериментально установленные закономерности [23], согласно которым в области кости, испытывающей при нормальных (равновесных) нагрузках растяжение ( $\varepsilon^{eq} > 0$ ), с ростом актуальной деформации растяжения  $\varepsilon$  увеличивается доля активных остеобластов и уменьшается доля активных остеокластов (рис. 2, а). Аналогично, в сжатой при равновесии области кости ( $\varepsilon^{eq} < 0$ ) с ростом актуальной сжимающей деформации в интервале  $\varepsilon_{\min} - \varepsilon_{\max}$  также увеличивается доля активных остеобластов и уменьшается доля активных остеокластов (рис. 2, б).

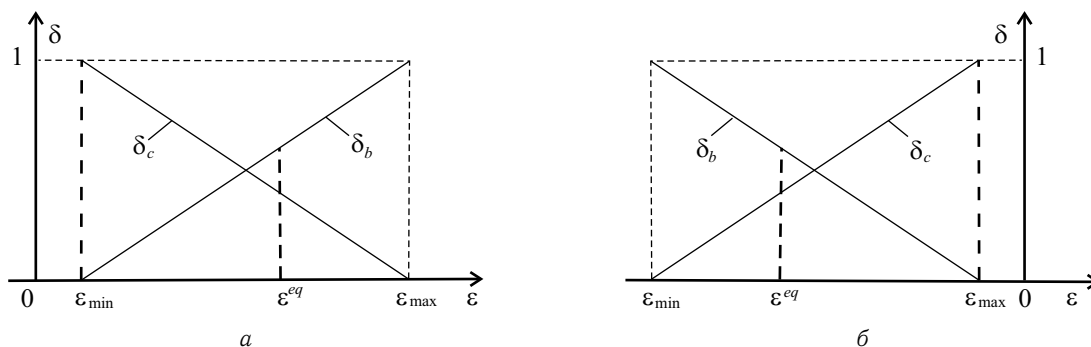


Рис. 2. Линейное приближение зависимости доли активных костных клеток  $\delta_{b,c}$  от одноосной деформации  $\varepsilon$  в интервале стимулирования адаптации  $\varepsilon_{\min} - \varepsilon_{\max}$  для областей кости, подверженных при равновесных нагрузках растяжению (а) и сжатию (б)



Линейные зависимости  $\delta_b(\varepsilon)$  и  $\delta_c(\varepsilon)$  преобразуются к виду линейных функций от стимула адаптации  $\delta_b(\varepsilon - \varepsilon^{eq})$  и  $\delta_c(\varepsilon - \varepsilon^{eq})$  в виде

$$\delta_b = \operatorname{sgn}(\varepsilon^{eq})(\varepsilon - \varepsilon^{eq}) / (\varepsilon_{\max} - \varepsilon_{\min}) - \operatorname{sgn}(\varepsilon^{eq}) \delta_b^{eq}, \quad (12)$$

$$\delta_c = -\operatorname{sgn}(\varepsilon^{eq})(\varepsilon - \varepsilon^{eq}) / (\varepsilon_{\max} - \varepsilon_{\min}) - \operatorname{sgn}(\varepsilon^{eq}) \delta_c^{eq}, \quad (13)$$

где  $\delta_b^{eq}$ ,  $\delta_c^{eq}$  — равновесные значения величин  $\delta_b$  и  $\delta_c$  соответственно равные

$$\delta_b^{eq} = \frac{\varepsilon_b - \varepsilon^{eq}}{\varepsilon_{\max} - \varepsilon_{\min}}, \quad \delta_c^{eq} = \frac{\varepsilon^{eq} - \varepsilon_c}{\varepsilon_{\max} - \varepsilon_{\min}},$$

где обозначено

$$\varepsilon_b = \begin{cases} \varepsilon_{\min}, & \varepsilon^{eq} > 0, \\ \varepsilon_{\max}, & \varepsilon^{eq} < 0, \end{cases} \quad \varepsilon_c = \begin{cases} \varepsilon_{\max}, & \varepsilon^{eq} > 0, \\ \varepsilon_{\min}, & \varepsilon^{eq} < 0. \end{cases}$$

Подстановка соотношений (12), (13) в равенство (11) даёт линейную функцию балансового фактора  $B$  от стимула адаптации вида

$$B = a \operatorname{sgn}(\varepsilon^{eq})(\varepsilon - \varepsilon^{eq}) - \operatorname{sgn}(\varepsilon^{eq})(\lambda_b a_b \delta_b^{eq} - \lambda_c a_c \delta_c^{eq}) / (\varepsilon_{\max} - \varepsilon_{\min}), \quad (14)$$

где коэффициент  $a$  зависит от активности и плотности расположения костных клеток на поверхности  $S_v$  и определяется выражением

$$a = \frac{a_b \lambda_b + a_c \lambda_c}{\varepsilon_{\max} - \varepsilon_{\min}} > 0.$$

Учитывая, что при равновесных нагрузках величина балансового фактора равна нулю, т.е.  $B(\varepsilon^{eq})=0$ , из равенства (14) следует, что последнее слагаемое в этом выражении равно нулю. Следовательно, окончательно получим

$$B(\varepsilon) = a \operatorname{sgn}(\varepsilon^{eq})(\varepsilon - \varepsilon^{eq}). \quad (15)$$

## 5. ОПРЕДЕЛЯЮЩЕЕ СООТНОШЕНИЕ СТРУКТУРНОЙ АДАПТАЦИИ

Подстановка (15) в (4) приводит к определяющему соотношению вида

$$\dot{p}(\varepsilon) = -a \operatorname{sgn}(\varepsilon^{eq})(\varepsilon - \varepsilon^{eq}) S_v(r). \quad (16)$$

Так как пористость по определению равна  $p(r) = v(r)n(r)$ , где  $v(r)$  — объём единичной поры, то левая часть равенства (16) выражается через параметры структуры в виде

$$\dot{p}(r) = \left( \frac{\partial v(r)}{\partial r} n(r) + v(r) \frac{\partial n(r)}{\partial r} \right) \dot{r}, \quad (17)$$

где для первого слагаемого и сферических и цилиндрических пор справедливо равенство

$$\frac{\partial v(r)}{\partial r} n(r) = S_v(r). \quad (18)$$

Второе слагаемое для губчатой кости с учётом (9) вычисляется как

$$v(r) \frac{\partial n(r)}{\partial r} = \frac{\partial \rho_{\text{ск}}(r) / \partial r + 3(\rho_{\text{ск}}(r) - \rho_{\text{м}}) / r}{\rho_{\text{м}} - \rho_{\text{ж}}}, \quad (19)$$

а для кортикальной кости равно нулю в силу принятого выше условия  $n(r) = \text{const}$ .

Подстановка соотношений (17)–(19) в (16) приводит к определяющему уравнению структурной адаптации губчатой костной ткани

$$\dot{r}(\varepsilon, r) = -a \operatorname{sgn}(\varepsilon^{eq})(\varepsilon - \varepsilon^{eq}) S_v(r) / f(r), \quad (20)$$

где обозначено

$$f(r) = S_v(r) + \frac{\partial \rho_{\text{ск}}(r) / \partial r + 3(\rho_{\text{ск}}(r) - \rho_{\text{м}}) / r}{\rho_{\text{м}} - \rho_{\text{ж}}}.$$



Определяющее уравнение структурной адаптации кортикальной костной ткани следует из (16) с учётом (17) и (18)

$$\dot{\varepsilon} = -a \operatorname{sgn}(\varepsilon^{eq})(\varepsilon - \varepsilon^{eq}). \quad (21)$$

Соотношения (20), (21) записаны для случая одноосного деформирования. В общем случае пространственной деформации эти соотношения содержат деформационный стимул адаптации в форме (10), а именно

$$\dot{I}_{\varepsilon, r} = \begin{cases} -\frac{aS_v(r)}{f(r)} \operatorname{sgn}(I_{\varepsilon}^{eq})(I_{\varepsilon} - I_{\varepsilon}^{eq}) & \text{— губчатая костная ткань,} \\ -a \operatorname{sgn}(I_{\varepsilon}^{eq})(I_{\varepsilon} - I_{\varepsilon}^{eq}) & \text{— кортикальная костная ткань.} \end{cases}$$

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Обосновывается необходимость формулировки определяющих соотношений структурной функциональной адаптации губчатой и кортикальной костной ткани, учитывающих активность костных клеток и деформационный стимул их активации. Модель структуры включает поры, заполненные жидкостью, и костный матрикс. Форма пор принимается сферической в губчатой кости и цилиндрической для гаверсовых каналов в кортикальной кости. Механизм клеточной активности принимается таким же, как и в процессе ремоделирования. Учитываются две основные стадии цикла ремоделирования — резорбцию и формирование остеона. Кинетическое уравнение Р.В. Мартин'а, устанавливающее связь скорости изменения пористости с активностью и численностью остеокластов и остеобластов, было модифицировано с учётом предполагаемой линейной зависимости доли активных костных клеток обоих видов от деформации. Полученные определяющие соотношения отражают влияние деформационного стимула, как на процесс резорбции, так и на процесс формирования. Применённый подход учёта клеточной активности является альтернативой известному экспериментальному методу Frost'а базовых многоклеточных единиц (БМЕ) и позволяет распространить клеточный механизм ремоделирования на процесс функциональной адаптации.

## Библиографический список

1. Hegedus D.H., Cowin S.C. Bone remodeling II: small strain adaptive elasticity // J. of Elasticity. 1976. Vol. 6, № 4. P. 337–352.
2. Martin R.B. The effects of geometric feedback in the development of osteoporosis // J. of Biomechanics. 1972. Vol. 5. P. 447–455.
3. Демпстер Д.В. Ремоделирование кости // Риггз Б.Л., Мелтон III Л.Д. Остеопороз. М.; СПб.: Изд-во Бином, Невский диалект, 2000. С. 85–100.
4. Underwood E.E. Quantitative Stereology. Reading, MA: Addison-Wesley Publishing Co., 1970. 232 p.
5. Martin R.B. The usefulness of mathematical models for bone remodeling // Yearbook of Physical Anthropology. 1985. Vol. 28. P. 227–236.
6. Hart R.T., Davy D.T. Theories of bone modeling and remodeling // Bone mechanics / ed. S.C. Cowin. Bossa Raton: CRS Press, 1989. P. 253–277.
7. Hazelwood S.J., Martin R.B., Rashid M.M., Rodrigo J.J. The mechanistic model for internal bone remodeling exhibits different dynamic responses in disuse and overload // J. of Biomechanics. 2001. Vol. 34. P. 299–308.
8. Frost H.M. Mathematical Elements of Lamellar Bone Remodeling. N.Y.: Springer, 1964. 246 p.
9. Кнетс И.В., Пфафрод Г.О., Саулгозис Ю.Ж. Деформирование и разрушение твердых биологических тканей. Рига: Зинатне, 1989. 317 с.
10. Акулич А.Ю., Акулич Ю.В., Денисов А.С. Определение параметров структуры губчатой кости проксимального отдела бедра человека по оптической плотности рентгенологического изображения // Известия вузов. Поволжский регион. Медицинские науки. 2007. № 1. С. 3–11.
11. Martin R.B., Burr D.B., Sharkey N.A. Skeletal Tissue Mechanics. N.Y.: Springer, 1998. 392 p.
12. Parfit A.M. Bone age, mineral density, and fatigue damage // Calcified Tissue Intern. 1993. Vol. 53. P. 82–86.
13. Cowin S.C. Structural adaption of bone // Applied Mechanics Review. 1990. (Supplement). Vol. 43, № 5. P. 126–133.
14. Jacobs C.R., Simo J.S., Beaupre G.S., Carter D.R. Adaptive bone remodeling incorporating simultaneous density and anisotropy considerations // J. of Biomechanics. 1997. Vol. 30, № 6. P. 603–613.
15. Cowin S.C., Weinbaum S., Zeng Y. A case for bone canaliculi as the anatomical site of strain generated potentials // J. of Biomechanics. 1995. Vol. 28, № 11. P. 1117–1126.
16. Salzstein R.A., Pollack S.R. Electromechanical potentials in cortical bone - experimental analysis



// J. of Biomechanics. 1987. Vol. 20. P. 271–280.  
 17. Weinbaum S., Cowin S.C., Zeng Y. A model for the excitation of osteocytes by mechanical loading-induced bone fluid shear stresses // J. of Biomechanics. 1994. Vol. 27, № 3. P. 339–360.  
 18. Стецула В.И., Брусско А.Т. Механизм адаптационной перестройки костей // Структура и биомеханика скелетно-мышечной и сердечно-сосудистой систем позвоночных: сб. науч. тр. Киев: Наук. думка, 1984. С. 141–143.  
 19. Knothe-Tate M.L., Niederer P., Knothe U. In vivo tracer transport through the lacunocanalicular system of rat bone in an environment devoid of mechanical loading // Bone. 1998. № 22. P. 107–117.  
 20. Neidlinger-Wilke C., Stall I., Claes L., Brand R., Hoellen I., Rubenacker S., Arand M., Kinzl L. Human

osteoblasts from younger normal and osteoporotic donors show differences in proliferation and TGF-3 release in response to cyclic strain // J. of Biomechanics. 1995. Vol. 28. P. 1411–1418.  
 21. Сотин А.В., Акулич Ю.В., Подгаец Р.М. Модель адаптивной перестройки кортикальной костной ткани // Рос. журн. биомеханики. 2001. Т. 5, № 1. С. 24–32.  
 22. Регирер С.А., Штейн А.А., Логвенков С.А. Свойства и функции костных клеток: биомеханические аспекты // Современные проблемы биомеханики. Механика роста и морфогенеза. М.: Изд-во Моск. ун-та, 2000. Вып. 10. С. 174–224.  
 23. Lanyon L.E. Functional strain in bone tissue as an objective and controlling stimulus for adaptive bone remodeling // J. of Biomechanics. 1997. Vol. 20, № 11. P. 1083–1093.

УДК 539.374

## АЛГОРИТМ ПОСТРОЕНИЯ ОПТИМАЛЬНЫХ СИСТЕМ ОДНОМЕРНЫХ ПОДАЛГЕБР ТРЕХМЕРНЫХ УРАВНЕНИЙ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ ПЛАСТИЧНОСТИ

В.А. Ковалев<sup>1</sup>, Ю.Н. Радаев<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Московский городской университет управления  
 Правительства Москвы,  
 кафедра прикладной математики;

<sup>2</sup>Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН  
 E-mail: vlad\_koval@mail.ru, y.radayev@gmail.com

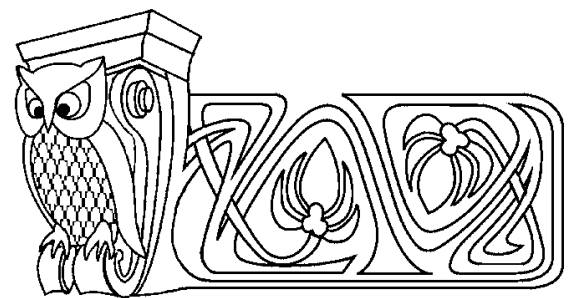
Рассматривается естественная конечномерная (размерности 12) подалгебра алгебры симметрий, соответствующей группе симметрий предложенных в 1959 г. Д.Д. Ивлевым трехмерных гиперболических уравнений пространственной задачи теории идеальной пластичности для состояний, отвечающих ребру призмы Кулона – Треска, сформулированных в изостатической системе координат. Приводится алгоритм построения оптимальной системы одномерных подалгебр указанной естественной конечномерной подалгебры алгебры симметрий, насчитывающей один трехпараметрический элемент, 12 двухпараметрических, 66 однопараметрических элементов и 108 индивидуальных элементов (всего 187 элементов).

**Ключевые слова:** теория пластичности, изостатические координаты, группа симметрий, алгебра симметрий, подалгебра, оптимальная система, алгоритм.

### 1. ВВОДНЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ

Для ребра призмы Кулона – Треска, определяемого условием «полной пластичности» Хаара – Кармана  $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 \pm 2k$  ( $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$  — главные нормальные напряжения,  $k$  — предел текучести при сдвиге), уравнения равновесия, полученные Д.Д. Ивлевым в 1959 г. [1], можно представить в форме одного векторного уравнения (см. [2, 3]):

$$\text{grad}\sigma_3 \mp 2k\text{div}(\mathbf{n} \otimes \mathbf{n}) = \mathbf{0}, \quad (1)$$



An Optimal System Constructing Algorithm for Symmetry Algebra of Three-Dimensional Equations of the Perfect Plasticity

V.A. Kovalev<sup>1</sup>, Yu.N. Radayev<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Moscow City Government University of Management,  
 Chair of Applied Mathematics

<sup>2</sup>Institute for Problems in Mechanics RAS, Moscow  
 E-mail: vlad\_koval@mail.ru, y.radayev@gmail.com

The present study is devoted to study of a natural 12-dimensional symmetry algebra of the three-dimensional hyperbolic differential equations of the perfect plasticity, obtained by D.D. Ivlev in 1959 and formulated in isostatic co-ordinate net. An optimal system of one-dimensional subalgebras constructing algorithm for the Lie algebra is proposed. The optimal system (total 187 elements) is shown consist of a 3-parametrical element, twelve 2-parametrical elements, sixty six 1-parametrical elements and one hundred and eight individual elements.

**Key words:** theory of plasticity, isostatic co-ordinate, symmetry group, symmetry algebra, subalgebra, optimal system, algorithm.