МАТЕМАТИКА

УДК 517.968.23

ТРЕХЭЛЕМЕНТНАЯ КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ТИПА РИМАНА ДЛЯ МЕТААНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ В КРУГЕ

В.В. Алексеенков, К.М. Расулов

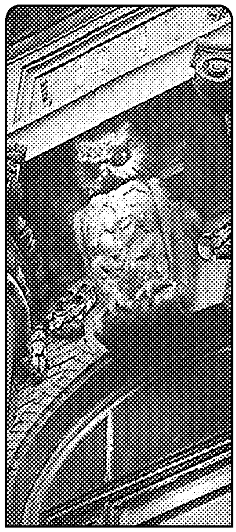
Смоленский государственный университет,
кафедра математического анализа
E-mail: vvalekseenkov@mail.ru, icspgu@sci.smolensk.ru (с пометкой «Для Расулова»)

Статья посвящена исследованию трехэлементной краевой задачи типа Римана для метааналитических функций. Получен конструктивный метод решения поставленной задачи в случае круга. Установлено, что решение рассматриваемой задачи в общем случае сводится к решению двух обобщенных и двух обычных скалярных задач Римана для аналитических функций в круге.

Three-Element Boundary Value Problem of Riemann Type for Metaanalytical Functions in a Circle

V.V. Alekseenkov, K.M. Rasulov

The article is devoted to the investigation of three-element boundary value problem of Riemann type for metaanalytical functions. A constructive method for solution of the problem in a circle was found. It is established that solution of the problem generally consists of solutions of two generalized and two usual scalar boundary value problems of Riemann for analytical functions in a circle.



Пусть $T^+ = \{z : |z| < 1\}$ — единичный круг на расширенной комплексной плоскости $\overline{C}$, границей которого служит окружность $L = \{t : |t| = 1\}$, а $T^- = \overline{C} \setminus (T^+ \cup L)$.

Всюду в дальнейшем в основном будем пользоваться обозначениями и терминами, принятыми в работе [1].

Напомним (см., например, [1], с. 139, или [2]), что функция $F(z) = U(x,y) + iV(x,y)$ комплексного переменного $z = x + iy$ называется *метааналитической* в области T^+ (T^-), если она имеет в этой области непрерывные частные производные по x и y до второго порядка включительно и удовлетворяет там уравнению

$$\frac{\partial^2 F(z)}{\partial \bar{z}^2} + A_1(z)\frac{\partial F(z)}{\partial \bar{z}} + A_0(z)F(z) = 0, \qquad (1)$$

где $\partial/\partial\bar{z} = (\partial/\partial x + \partial/\partial y)/2$ — дифференциальный оператор Коши – Римана,

$$A_k(z) = \begin{cases} a_k, & \text{если } z \in T^+, \\ a_k/z^{2-k}, & \text{если } z \in T^-, \end{cases}$$

причем a_k $(k = 0,\ 1)$ — некоторые комплексные постоянные.

Известно (см., например, [1], с. 139), что если уравнение

$$\delta^2 + a_1\delta + a_0 = 0 \qquad (2)$$

имеет один (двукратный) корень δ_0, то общее решение уравнения (1) в областях $T^\pm$ можно задать в виде

$$F(z)=\begin{cases}\left[\varphi_0^+(z)+\bar z\varphi_1^+(z)\right]\exp\left\{\delta_0\bar z\right\}, & z\in T^+,\\ \left[\varphi_0^-(z)+\bar z\varphi_1^-(z)\right]\exp\left\{\delta_0\bar z/z\right\}, & z\in T^-;\end{cases}\tag{3}$$

если же уравнение (2) имеет два различных корня δ_0 и δ_1, то общее решение уравнения (1) задается в виде

$$F(z)=\begin{cases}\varphi_0^+(z)\exp\left\{\delta_0\bar z\right\}+\varphi_1^+(z)\exp\left\{\delta_1\bar z\right\}, & z\in T^+,\\ \varphi_0^-(z)\exp\left\{\delta_0\bar z/z\right\}+\varphi_1^-(z)\exp\left\{\delta_1\bar z/z\right\}, & z\in T^-,\end{cases}\tag{4}$$

где $\varphi_0^+(z)$, $\varphi_1^+(z)$ ($\varphi_0^-(z)$, $\varphi_1^-(z)$) — произвольные аналитические в T^+ (T^-) функции.

В дальнейшем функции $F(z)$ вида (3) или (4) будем называть кусочно-метааналитическими функциями с линией скачков L, а функции $\varphi_0^\pm(z)$, $\varphi_1^\pm(z)$ — *аналитическими компонентами* кусочно-метааналитической функции $F(z)$.

Будем говорить, что кусочно-метааналитическая функция $F(z)$ принадлежит классу $M_2(T^\pm)\cap\cap H^{(1)}(L)$, если ее аналитические компоненты $\varphi_0^\pm(z)$, $\varphi_1^\pm(z)$ непрерывно продолжаются на границу L вместе со своими производными $\dfrac{d\varphi_0^\pm(z)}{dz}$, $\dfrac{d\varphi_1^\pm(z)}{dz}$, причем так, что граничные значения функций $\varphi_0^\pm(z)$, $\varphi_1^\pm(z)$ и указанных их производных удовлетворяют на L условию Гёльдера.

Кусочно-метааналитическую функцию $F(z)$, задаваемую формулой (3) или (4), назовем исчезающей на бесконечности, если $\Pi\left\{\varphi_k^-(z);\infty\right\}\geq k+1$ или $\Pi\left\{\varphi_k^-(z);\ \infty\right\}\geq 1$ соответственно (здесь $\Pi\left\{\varphi_k^-(z);\ \infty\right\}$ — порядок аналитической функции $\varphi_k^-(z)$ в точке $z=\infty$).

Трехэлементной краевой задачей типа Римана для метааналитических функций в круге, или, короче, задачей $\mathbf{GR}_{1,M}$ будем называть следующую задачу: *требуется найти все кусочно-метааналитические функции $F(z)=\{F^+(z),F^-(z)\}$ класса $M_2(T^\pm)\cap H^{(1)}(L)$, исчезающие на бесконечности и удовлетворяющие на L граничным условиям:*

$$\frac{\partial F^+(t)}{\partial x}=G_{11}(t)\frac{\partial F^-(t)}{\partial x}+G_{12}(t)\overline{\frac{\partial F^-(t)}{\partial x}}+g_1(t),\tag{5}$$

$$\frac{\partial F^+(t)}{\partial y}=G_{21}(t)\frac{\partial F^-(t)}{\partial y}-G_{22}(t)\overline{\frac{\partial F^-(t)}{\partial y}}+ig_2(t),\tag{6}$$

где $G_{kj}(t)$, $g_k(t)$ ($k=1,\ 2$; $j=1,\ 2$) — заданные на L функции, удовлетворяющие условию $H(L)$ (Гельдера), причем $G_{k1}(t)\neq 0$ на L. Здесь, в равенстве (6), множители (–1) при $G_{22}(t)$ и i при $g_2(t)$ введены для удобства в дальнейших обозначениях.

Основной целью настоящей заметки является построение конструктивного алгоритма решения задачи $\mathbf{GR}_{1,M}$ в случае, когда характеристическое уравнение (2) имеет один (двукратный) корень δ_0, т.е. когда решения задачи $\mathbf{GR}_{1,M}$ ищутся в виде (3).

Учитывая представление (3), соотношения (см., например, [3], с. 304) $\dfrac{\partial}{\partial x}=\dfrac{\partial}{\partial z}+\dfrac{\partial}{\partial\bar z}$, $\dfrac{\partial}{\partial y}=i\left(\dfrac{\partial}{\partial z}-\dfrac{\partial}{\partial\bar z}\right)$, а также то, что на окружности L имеет место тождество $\bar t=1/t$, краевые условия (5) и (6) можно переписать в виде:

$$\Phi_1^+(t)=\tilde G_{11}(t)\Phi_1^-(t)+\tilde G_{12}(t)\overline{\Phi_1^-(t)}+\tilde g_1(t),\tag{7}$$

$$\Phi_2^+(t)=\tilde G_{21}(t)\Phi_2^-(t)+\tilde G_{22}(t)\overline{\Phi_2^-(t)}+\tilde g_2(t),\tag{8}$$

где

$$\tilde G_{k1}(t)=G_{k1}(t)\exp\left\{\frac{\delta_0(1-t)}{t^2}\right\},\qquad \tilde G_{k2}(t)=t^2G_{k2}(t)\exp\left\{\bar\delta_0t^2-\delta_0/t\right\},$$

$$\tilde g_k(t)=tg_k(t)\exp\left\{-\delta_0/t\right\},\quad k=1,\ 2,$$

а функции $\Phi_k^+(z)$ и $\Phi_k^-(z)$ ($k=1,\ 2$), определенные по формулам

$$\Phi_1^+(z)=z\frac{d\varphi_0^+(z)}{dz}+\frac{d\varphi_1^+(z)}{dz}+\delta_0z\varphi_0^+(z)+(\delta_0+z)\varphi_1^+(z),\tag{9}$$

$$\Phi_2^+(z) = z\frac{d\varphi_0^+(z)}{dz} + \frac{d\varphi_1^+(z)}{dz} - \delta_0 z\varphi_0^+(z) - (\delta_0 + z)\varphi_1^+(z), \tag{10}$$

$$\Phi_1^-(z) = z\frac{d\varphi_0^-(z)}{dz} + \frac{d\varphi_1^-(z)}{dz} + \frac{\delta_0(z-1)}{z}\varphi_0^-(z) + \left(\frac{\delta_0(z-1)}{z^2} + z\right)\varphi_1^-(z), \tag{11}$$

$$\Phi_2^-(z) = z\frac{d\varphi_0^-(z)}{dz} + \frac{d\varphi_1^-(z)}{dz} - \frac{\delta_0(z+1)}{z}\varphi_0^-(z) - \left(\frac{\delta_0(z+1)}{z^2} + z\right)\varphi_1^-(z) \tag{12}$$

являются аналитическими в областях T^+ и T^- соответственно, причем $\Phi_k^-(z)$ $(k = 1,\ 2)$ исчезают на бесконечности.

Равенства (7) и (8) представляют собой граничные условия трехэлементных краевых задач типа Римана относительно исчезающих на бесконечности кусочно-аналитических функций $\Phi_1(z) = \left\{\Phi_1^+(z), \Phi_1^-(z)\right\}$ и $\Phi_2(z) = \left\{\Phi_2^+(z), \Phi_2^-(z)\right\}$ соответственно (см., например, [4], с. 222).

Таким образом, решение задачи $\mathbf{GR}_{1,M}$ по сути сводится к решению двух трехэлементных краевых задач Римана (7) и (8).

В свою очередь, хорошо известно (см., например, [4], с. 222), что каждую из задач (7) и (8) можно свести к определенной векторно-матричной задаче Римана для кусочно-аналитических функций. Для этого рассмотрим следующие системы равенств, состоящие из условия (7) (условия (8)) и краевого условия, полученного из (7) (из (8)) переходом к комплексно сопряженным значениям, т.е. системы вида

$$\left\{\begin{array}{l} \Phi_k^+(t) = \tilde{G}_{k1}(t)\Phi_k^-(t) + \tilde{G}_{k2}(t)\overline{\Phi_k^-(t)} + \tilde{g}_k(t), \\ \overline{\Phi_k^+(t)} = \overline{\tilde{G}_{k1}(t)\Phi_k^-(t)} + \overline{\tilde{G}_{k2}(t)}\Phi_k^-(t) + \overline{\tilde{g}_k(t)}, \quad k = 1,\ 2. \end{array}\right. \tag{13}$$

Далее, введем в рассмотрение новые неизвестные функции $\psi_{k1}^+(z)$, $\psi_{k2}^+(z)$ и $\psi_{k1}^-(z)$, $\psi_{k2}^-(z)$, аналитические соответственно в T^+ и T^-, определяемые по формулам:

$$\psi_{k1}^+(z) = \Phi_k^+(z),\ \psi_{k2}^+(z) = \frac{1}{z}\overline{\Phi_k^-}\left(\frac{1}{z}\right),\ \psi_{k1}^-(z) = \Phi_k^-(z),\ \psi_{k2}^-(z) = \frac{1}{z}\overline{\Phi_k^+}\left(\frac{1}{z}\right), \tag{14}$$

$$k = 1,\ 2.$$

Замечание 1. Важно отметить, что в силу формул (14) граничные значения функций $\psi_{k1}^\pm(z)$, $\psi_{k2}^\pm(z)$ должны удовлетворять следующим условиям "симметрии":

$$\psi_{k2}^+(t) = \overline{t\psi_{k1}^-(t)}, \quad \psi_{k2}^-(t) = \overline{t\psi_{k1}^+(t)}, \quad t \in L, \quad k = 1,\ 2. \tag{15}$$

С учетом (14) и (15) из системы (13) будем иметь (см. также [4], с. 223):

$$\psi_k^+(t) = G_k(t)\psi_k^-(t) + Q_k(t), \quad k = 1,\ 2, \tag{16}$$

где

$$\psi_k^\pm(z) = \begin{pmatrix} \psi_{k1}^\pm(z) \\ \psi_{k2}^\pm(z) \end{pmatrix}, \quad G_k(t) = \begin{pmatrix} \dfrac{|\tilde{G}_{k1}(t)|^2 - |\tilde{G}_{k2}(t)|^2}{\overline{\tilde{G}_{k1}(t)}} & \dfrac{t\tilde{G}_{k2}(t)}{\overline{\tilde{G}_{k1}(t)}} \\ -\dfrac{\overline{t\tilde{G}_{k2}(t)}}{\overline{\tilde{G}_{k1}(t)}} & \dfrac{1}{\overline{\tilde{G}_{k1}(t)}} \end{pmatrix}, \tag{17}$$

$$Q_k(t) = \begin{pmatrix} \dfrac{\overline{\tilde{G}_{k1}(t)}\tilde{g}_k(t) - \tilde{G}_{k2}(t)\overline{\tilde{g}_k(t)}}{\overline{\tilde{G}_{k1}(t)}} \\ -\dfrac{\overline{t\tilde{g}_k(t)}}{\overline{\tilde{G}_{k1}(t)}} \end{pmatrix}.$$

Итак, решение трехэлементной задачи Римана (7) сводится к решению векторно-матричной задачи Римана вида (16) относительно кусочно-аналитического вектора $\psi_1^\pm(z) = \begin{pmatrix} \psi_{11}^\pm(z) \\ \psi_{12}^\pm(z) \end{pmatrix}$, а решение задачи (8) сводится к решению векторно-матричной задачи Римана вида (16) относительно кусочно-аналитического вектора $\psi_2^\pm(z) = \begin{pmatrix} \psi_{21}^\pm(z) \\ \psi_{22}^\pm(z) \end{pmatrix}$.

Из формул (17) видно, что если выполняются условия

$$|\tilde{G}_{k1}(t)| \equiv |\tilde{G}_{k2}(t)|, \quad t \in L, \quad k = 1, 2, \tag{18}$$

то каждая из векторно-матричных задач Римана вида (16) (при фиксированном значении параметра k) сводится к последовательному решению двух скалярных задач Римана:

$$\psi_{k1}^{+}(t) = A_{k1}(t)\psi_{k2}^{-}(t) + Q_{k1}(t), \tag{19}$$

$$\psi_{k2}^{+}(t) = A_{k2}(t)\psi_{k1}^{-}(t) + Q_{k2}(t), \tag{20}$$

где

$$A_{k1}(t) = \frac{t\tilde{G}_{k2}(t)}{\overline{\tilde{G}_{k1}(t)}}, \quad Q_{k1}(t) = \frac{\overline{\tilde{G}_{k1}(t)}\tilde{g}_k(t) - \tilde{G}_{k2}(t)\overline{\tilde{g}_k(t)}}{\overline{\tilde{G}_{k1}(t)}},$$

$$A_{k2}(t) = -\frac{\overline{t\tilde{G}_{k2}(t)}}{\overline{\tilde{G}_{k1}(t)}}, \quad Q_{k2}(t) = \frac{1}{\overline{\tilde{G}_{k1}(t)}}\psi_{k2}^{-}(t) - \frac{\overline{t\tilde{g}_k(t)}}{\overline{\tilde{G}_{k1}(t)}}.$$

Если же выполняются условия

$$|\tilde{G}_{k1}(t)| \neq |\tilde{G}_{k2}(t)|, \quad t \in L, \quad k = 1, 2, \tag{21}$$

то нетрудно проверить, что все главные миноры матрицы $\tilde{G}_k(t)$ отличны от нуля на L. Следовательно (см. [1], с. 261), в этом случае для векторно-матричных задач вида (16) выполняются все условия теоремы 18.1 из монографии [1]. Поэтому для решения каждой из векторно-матричных задач Римана (16) (при фиксированном значении параметра k) пользуясь методом, предложенным в [1], получим следующий результат: решение векторно-матричной задачи Римана (16) (при фиксированном значении параметра k) сводится к последовательному решению обобщенной скалярной задачи Римана вида

$$\psi_{k2}^{+}(t) - \hat{G}_{k2}(t)\psi_{k2}^{-}(t) + \int_L B_{k2}(t,\tau)\psi_{k2}^{-}(\tau)\,d\tau = Q_{k2}(t) \tag{22}$$

и обычной скалярной задачи Римана вида

$$\psi_{k1}^{+}(t) = \hat{G}_{k1}(t)\psi_{k1}^{-}(t) + Q_{k1}(t), \tag{23}$$

где

$$\hat{G}_{k1}(t) = \frac{|\tilde{G}_{k1}(t)|^2 - |\tilde{G}_{k2}(t)|^2}{\overline{\tilde{G}_{k1}(t)}}, \qquad \hat{G}_{k2}(t) = \frac{\tilde{G}_{k1}(t)}{|\tilde{G}_{k1}(t)|^2 - |\tilde{G}_{k2}(t)|^2},$$

$$Q_{k1}(t) = \frac{t\tilde{G}_{k2}(t)}{\overline{\tilde{G}_{k1}(t)}}\psi_{k2}^{-}(t) + \frac{\overline{\tilde{G}_{k1}(t)}\tilde{g}_k(t) - \tilde{G}_{k2}(t)\overline{\tilde{g}_k(t)}}{\overline{\tilde{G}_{k1}(t)}},$$

$$B_{k2}(t,\tau) = \frac{\overline{t\tilde{G}_{k2}(t)}}{\overline{\tilde{G}_{k1}(t)}}B_{k1}(t,\tau), \qquad Q_{k2}(t) = -\frac{\overline{t\tilde{G}_{k2}(t)}}{\overline{\tilde{G}_{k1}(t)}}q_k(t) - \frac{\overline{t\tilde{g}_k(t)}}{\overline{\tilde{G}_{k1}(t)}},$$

$$B_{k1}(t,\tau) = \frac{X_{k1}^{-}(t)}{2\pi i}\left[\frac{\tau\tilde{G}_{k2}(\tau)}{X_{k1}^{+}(\tau)\overline{\tilde{G}_{k1}(\tau)}} - \frac{t\tilde{G}_{k2}(t)}{X_{k1}^{+}(t)\overline{\tilde{G}_{k1}(t)}}\right]\frac{1}{\tau - t},$$

$$q_k(t) = \frac{X_{k1}^{-}(t)}{2\pi i}\int_L \frac{\overline{\tilde{G}_{k1}(\tau)}\tilde{g}_k(\tau) - \tilde{G}_{k2}(\tau)\overline{\tilde{g}_k(\tau)}}{X_{k1}^{+}(\tau)\overline{\tilde{G}_{k1}(\tau)}}\frac{d\tau}{\tau - t} - \frac{\overline{\tilde{G}_{k1}(t)}\tilde{g}_k(t) - \tilde{G}_{k2}(t)\overline{\tilde{g}_k(t)}}{2(|\tilde{G}_{k1}(t)|^2 - |\tilde{G}_{k2}(t)|^2)} + X_{k1}^{-}(t)P_{\chi_{k1}-1},$$

$\left\{X_{k1}^{+}(z), X_{k1}^{-}(z)\right\}$ — каноническая функция краевой задачи Римана (23), $P_{\chi_{k1}-1}(z)$ – многочлен степени не выше $\chi_{k1} - 1$ с произвольными комплексными коэффициентами.

Наконец, если уже найдены аналитические функции $\psi_{k1}^{+}(z)$, $\psi_{k2}^{+}(z)$, $\psi_{k1}^{-}(z)$, $\psi_{k2}^{-}(z)$, то учитывая условия (15) и используя обозначения (14) находим решение задач (7) и (8), т.е. кусочно-аналитические функции $\Phi_1^{\pm}(z)$ и $\Phi_2^{\pm}(z)$.

Покажем теперь, как по найденным функциям $\Phi_1^{\pm}(z)$ и $\Phi_2^{\pm}(z)$ определяются аналитические компоненты $\varphi_0^{\pm}(z)$ и $\varphi_1^{\pm}(z)$ искомой кусочно-метааналитической функции $F(z)$. Для этого необходимо отдельно рассмотреть 2 случая.

Случай 1. Пусть $\delta_0 = 0$. В этом случае при выполнении условия

$$\Phi_1^{+}(0) = \Phi_2^{+}(0) \tag{24}$$

из равенств (9)–(12) имеем:

$$\varphi_1^{\pm}(z) = \frac{\Phi_1^{\pm}(z) - \Phi_2^{\pm}(z)}{2z}, \tag{25}$$

$$\varphi_0^{\pm}(z) = \int\limits_{\Gamma^{\pm}} \frac{1}{2\zeta}\left(\Phi_1^{\pm}(\zeta) + \Phi_2^{\pm}(\zeta) - 2\frac{d\varphi_1^{\pm}(\zeta)}{d\zeta}\right) d\zeta, \tag{26}$$

где Γ^{+} (Γ^{-}) — произвольная гладкая кривая, лежащая в T^{+} (T^{-}) и соединяющая точки 0 и z (∞ и z). Тогда решение исходной задачи $\mathbf{GR}_{1,M}$ можно найти по формуле (3), где $\varphi_0^{\pm}(z)$ и $\varphi_1^{\pm}(z)$ определяются по формулам (25) и (26).

Таким образом, в случае $\delta_0 = 0$ получаем следующий результат.

Теорема 1. *Если $\delta_0 = 0$ и $|\tilde{G}_{k1}(t)| \equiv |\tilde{G}_{k2}(t)|$ на L ($k = 1,\ 2$), то решение задачи $\mathbf{GR}_{1,M}$ сводится к решению в классах аналитических функций двух скалярных задач Римана вида* (19) *и двух скалярных задач Римана вида* (20).

Если же $\delta_0 = 0$ и $|\tilde{G}_{k1}(t)| \neq |\tilde{G}_{k2}(t)|$ на L ($k = 1,\ 2$), то решение задачи $\mathbf{GR}_{1,M}$ сводится к решению в классах аналитических функций двух обобщенных скалярных задач Римана вида (22) *и двух обычных скалярных задач Римана вида* (23).

При этом задача $\mathbf{GR}_{1,M}$ разрешима тогда и только тогда, когда одновременно разрешимы указанные скалярные задачи Римана для аналитических функций и выполняется условие (24).

Случай 2. Пусть $\delta_0 \neq 0$. Тогда из равенств (9) и (10) получим

$$\frac{d\varphi_1^{+}(z)}{dz} - \frac{\delta_0}{z^2}\varphi_1^{+}(z) = \frac{1}{z^2}f^{+}(z), \tag{27}$$

$$\varphi_0^{+}(z) = \frac{\Phi_1^{+}(z) - \Phi_2^{+}(z)}{2\delta_0 z} - \frac{\delta_0 + z}{\delta_0 z}\varphi_1^{+}(z), \tag{28}$$

где

$$f^{+}(z) = \frac{z}{2}\left(\frac{d\Phi_1^{+}(z)}{dz} - \frac{d\Phi_2^{+}(z)}{dz}\right) - \frac{1}{2}\left(\Phi_1^{+}(z) - \Phi_2^{+}(z)\right) - \frac{\delta_0 z}{2}\left(\Phi_1^{+}(z) + \Phi_2^{+}(z)\right). \tag{29}$$

Равенство (27) есть линейное неоднородное дифференциальное уравнение первого порядка. Будем рещать уравнение (27) методом степенных рядов (см., например, [5]).

Разложим аналитическую в круге T^{+} функцию $f^{+}(z)$ в ряд Маклорена: $f^{+}(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n$, где $a_n = \dfrac{1}{n!}\dfrac{d^n f^{+}(0)}{dz^n}$. Тогда нетрудно проверить, что функция вида

$$\varphi_1^{+}(z) = -\frac{a_0}{\delta_0} - \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{q=1}^{n} \frac{(n-1)!\cdot a_{n-q+1}}{(n-q)!\cdot \delta_0^{q}} z^n \tag{30}$$

будет аналитическим в $T^{+} = \{z : |z| < 1\}$ решением дифференциального уравнения (27), если ряд в правой части (30) сходится в этом круге.

Замечание 2. Для всякой аналитической в круге $T^{+} = \{z : |z| < 1\}$ функции $\varphi_1^{+}(z)$, определяемой по формуле (30), имеет место соотношение: $\varphi_1^{+}(0) = -a_0/\delta_0$ или (с учетом введенного обозначения (29)) $a_0 = f^{+}(0) = -\frac{1}{2}\left(\Phi_1^{+}(0) - \Phi_2^{+}(0)\right) = -\delta_0\varphi_1^{+}(0)$. Последнее соотношение гарантирует аналитичность в точке $z = 0$ функции $\varphi_0^{+}(z)$, определяемой по формуле (28).

Замечание 3. Поскольку решения исходной краевой задачи $\mathbf{GR}_{1,M}$ должны принадлежать классу $M_2(T^{\pm}) \cap H^{(1)}(L)$, то для того чтобы аналитическая в $T^{+} = \{z : |z| < 1\}$ функция $\varphi_1^{+}(z)$, определяемая формулой (30), была аналитической компонентой искомого решения краевой задачи $\mathbf{GR}_{1,M}$, нужно еще выполнение следующих условий:

$$\left|\frac{d^p\varphi_1^+(z)}{dz^p}\right| \leq \frac{M_p}{(1-r)^{1-\alpha_p}}, \quad r=|z|, \quad 0<\alpha_p\leq 1, \quad p= \; 1, \; 2, \tag{31}$$

где M_p –конечные постоянные.

Как известно (см. [6], с. 397), согласно теореме Харди и Литтльвуда, условия (31) являются необходимыми и достаточными, для того чтобы аналитическая в круге $T^+=\{z:|z|<1\}$ функция $\varphi_1^+(z)$ и ее производная $\dfrac{d\varphi_1^{\pm}(z)}{dz}$ были непрерывными в замкнутом круге $\overline{T^+}=\{z:|z|\leq 1\}$ и на окружности $L=\{t:|t|=1\}$ удовлетворяли условию Гёльдера.

Замечание 4. В дальнейшем ради удобства будем говорить, что дифференциальное уравнение (27) *разрешимо в круге* $T^+=\{z:|z|<1\}$, если оно имеет аналитические в этом круге решения, задаваемые формулой (30) и удовлетворяющие условиям (31). В противном случае его будем называть *неразрешимым в круге* $T^+=\{z:|z|<1\}$.

Далее предположим, что дифференциальное уравнение (27) разрешимо в круге $T^+=\{z:|z|<1\}$ и уже найдено его решение по формуле (30). Тогда подставляя в правую часть (28) вместо $\varphi_1^+(z)$ ее значения, найденные по формуле (30), определим аналитическую в круге $T^+=\{z:|z|<1\}$ функцию $\varphi_0^+(z)$.

Наконец, из равенств (11) и (12) будем иметь:

$$\frac{d\varphi_1^-(z)}{dz}+\left(\frac{1}{z}-\frac{\delta_0}{z^2}-\frac{\delta_0}{z^3}\right)\varphi_1^-(z)=f^-(z), \tag{32}$$

$$\varphi_0^-(z)=\frac{\Phi_1^-(z)-\Phi_2^-(z)}{2\delta_0}-\frac{\delta_0+z^2}{\delta_0 z}\varphi_1^-(z), \tag{33}$$

где

$$f^-(z)=\frac{1}{2z}\left(\frac{d\Phi_1^-(z)}{dz}-\frac{d\Phi_2^-(z)}{dz}\right)-\frac{\delta_0}{2z^3}\left(\Phi_1^-(z)-\Phi_2^-(z)\right)-\frac{\delta_0}{2z^2}\left(\Phi_1^-(z)+\Phi_2^-(z)\right).$$

Решим дифференциальное уравнение (32) методом интегрирующего множителя. С этой целью, умножив обе части равенства (32) на $z\exp\left(\dfrac{\delta_0}{z}+\dfrac{\delta_0}{2z^2}\right)$, получим

$$\frac{d}{dz}\left[z\varphi_1^-(z)\exp\left(\frac{\delta_0}{z}+\frac{\delta_0}{2z^2}\right)\right]=zf^-(z)\exp\left(\frac{\delta_0}{z}+\frac{\delta_0}{2z^2}\right).$$

Так как функция $f^-(z)$ является аналитической в области T^-, то для функции $zf^-(z)\exp\left(\dfrac{\delta_0}{z}+\dfrac{\delta_0}{2z^2}\right)$ интегрированием найдем первообразную в T^-, исчезающую на бесконечности (здесь поскольку $\Pi\{f^-(z);\ \infty\}\geq 3$, то при интегрировании не возникают выражения, содержащие логарифмы). Обозначим эту первообразную через $f_1^-(z)$. Тогда общее решение дифференциального уравнения (32) можно задавать в виде

$$\varphi_1^-(z)=\frac{1}{z}\exp\left(-\frac{\delta_0}{z^2}-\frac{\delta_0}{z^3}\right)[C+f_1^-(z)], \tag{34}$$

где C — произвольная постоянная. Но поскольку функция $\varphi_1^-(z)$ должна иметь на бесконечности нуль не ниже второго порядка, то в (34) нужно положить $C=0$. Итак, окончательно имеем:

$$\varphi_1^-(z)=\frac{1}{z}f_1^-(z)\exp\left(-\frac{\delta_0}{z^2}-\frac{\delta_0}{z^3}\right). \tag{35}$$

Следовательно, с учетом (35) из (33) получаем

$$\varphi_0^-(z)=\frac{\Phi_1^-(z)-\Phi_2^-(z)}{2\delta_0}-\frac{\delta_0+z^2}{\delta_0 z^2}f_1^-(z)\exp\left(-\frac{\delta_0}{z^2}-\frac{\delta_0}{z^3}\right). \tag{36}$$

Таким образом, в случае $\delta_0 \neq 0$ решение исходной задачи $\mathbf{GR}_{1,M}$ можно найти по формуле (3), где $\varphi_0^{\pm}(z)$ и $\varphi_1^{\pm}(z)$ определяются по формулам (28), (30), (35) и (36).

Резюмируя все сказанное выше, в случае $\delta_0 \neq 0$ можно сформулировать следующий основной результат.

Теорема 2. *Если* $\delta_0 \neq 0$ *и* $|\tilde{G}_{k1}(t)| \equiv |\tilde{G}_{k2}(t)|$ *на* L $(k = 1,\ 2)$, *то решение задачи* $\mathbf{GR}_{1,M}$ *сводится к решению в классах аналитических функций двух скалярных задач Римана вида* (19) *и двух скалярных задач Римана вида* (20).

Если же $\delta_0 \neq 0$ *и* $|\tilde{G}_{k1}(t)| \neq |\tilde{G}_{k2}(t)|$ *на* L $(k = 1,\ 2)$, *то решение задачи* $\mathbf{GR}_{1,M}$ *сводится к решению в классах аналитических функций двух обобщенных скалярных задачи Римана вида* (22) *и двух обычных скалярных задач Римана вида* (23).

Кроме того, задача $\mathbf{GR}_{1,M}$ *разрешима тогда и только тогда, когда одновременно разрешимы указанные задачи Римана для аналитических функций и дифференциальное уравнение* (27).

Библиографический список

1. *Расулов К.М.* Краевые задачи для полианалитических функций и некоторые их приложения. Смоленск: Изд-во СГПУ, 1998. 344 с.
2. *Расулов К.М., Сенчилов В.В.* О решении одной видоизмененной краевой задачи типа Рикье для метааналитических функций в круге // Дифференциальные уравнения. 2005. Т. 41, № 43. С. 415–418.
3. *Гахов Ф.Д.* Краевые задачи. М.: Наука, 1977. 640 с.
4. *Литвинчук Г.С.* Краевые задачи и сингулярные интегральные уравнения со сдвигом. М.: Наука, 1977. 448 с.
5. *Голубев В.В.* Лекции по аналитической теории дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1966. 436 с.
6. *Голузин Г.М.* Геометрическая теория функций комплексного переменного. М.: Наука, 1966. 628 с.

УДК 517.984

О РАВНОСХОДИМОСТИ РАЗЛОЖЕНИЙ ДЛЯ НЕКОТОРОГО КЛАССА ФУНКЦИОНАЛЬНО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ С ИНВОЛЮЦИЕЙ НА ГРАФЕ

М.Ш. Бурлуцкая, А.П. Хромов*

Воронежский государственный университет,
кафедра математического анализа
*Саратовский государственный университет,
кафедра дифференциальных уравнений и прикладной математики
E-mail: bums@kma.vsu.ru, KhromovAP@info.sgu.ru

Для функционально-дифференциального оператора первого порядка, заданного на графе-цикле, устанавливается равносходимость разложений в ряд по собственным и присоединенным функциям и в тригонометрический ряд Фурье.

On the Equiconvergence of Expansions for the Certain Class of the Functional-Differential Operators with Involution on the Graph

M.Sh. Burlutskaya, A.P. Khromov

The equiconvergence of expansions in eigen- and adjoint functions and trigonometric Fourier series is established for a 1-st order functional-differential operator on the graph-cycle.

На связном геометрическом графе Γ, состоящем из трех ребер, образующих цикл, рассматривается функционально-дифференциальный оператор, порождающий следующий оператор L в пространстве вектор-функций $y(x) = (y_1(x), y_2(x), y_3(x))^T$ (T — знак транспонирования), $x \in [0,1]$,

$$(Ly)(x) = (l_1(y_1), l_2(y_2), l_3(y_3))^T, \tag{1}$$

$$y_1(0) = y_3(1), \quad y_2(0) = y_1(1), \quad y_3(0) = y_2(1), \tag{2}$$

где $l_k(y_k) = \alpha_k y_k'(x) + \beta_k y_k'(1-x) + p_{k1}(x)y_k(x) + p_{k2}(x)y_k(1-x)$,
$\beta_k^2 - \alpha_k^2 > 0$, $\beta_1^2 + \beta_2^2 + \beta_3^2 \neq 0$, $p_{ij}(x) \in C^1[0,1]$. Краевые условия (2) — это условия непрерывности $y(x)$ во внутренних узлах Γ.