МАТЕМАТИКА

УДК 517.946

ОБ ОДНОЙ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ КВАЗИЛИНЕЙНОГО УРАВНЕНИЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО ТИПА

Р.А. Алиев

Азербайджанский университет кооперации, Баку,
кафедра информатики
E-mail: ramizaliyev1@mail.ru

В работе рассматриваются некорректные обратные задачи в определении неизвестных коэффициентов в квазилинейном эллиптическом уравнении. Доказаны теоремы существования, единственности и устойчивости. Используя метод последовательных приближений, строится регуляризирующий алгоритм для определения нескольких коэффициентов.

Ключевые слова: обратная задача, регуляризирующий алгоритм, квазилинейное уравнение эллиптического типа.

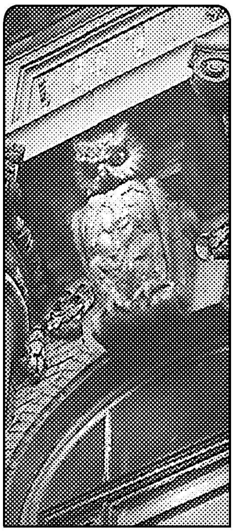
An Inverse Problem for Quasilinear Elliptic Equations

R.A. Aliev

Azerbaijan University of Cooperation, Baku,
Chair of Computer Science
E-mail: ramizaliyev1@mail.ru

The article examines incorrect return problems in the defining unknown factors in the quasilinear elliptic equation. Theorems of existence, uniqueness and stability have been proved. The consecutive approach method is used for the construction of the regulating algorithm for defining several factors.

Key words: return problem, regulating algorithm, quasilinear elliptic equation.



НАУЧНЫЙ ОТДЕЛ

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Обратные задачи для квазилинейных уравнений эллиптического типа рассмотрены в работах $[1, 2]$. Пусть D — ограниченная область n-мерного евклидова пространства E_n, $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ — произвольная точка области D, Γ — граница области D, предполагаемая достаточно гладкой, p_0 , p_1 — заданные числа, $Q \equiv [p_0, p_1]$.

Рассмотрим задачу об определении $\{k_n(u), q(u), u(x, p)\}$ из следующих условий:

$$-\sum_{i=1}^{n} k_i(u) u_{x_i x_i} + q(u)u = h(x, p), \quad x \in D, \quad p \in Q, \tag{1}$$

$$u(x, p)\,|_{\Gamma} = f(\xi, p), \quad \xi \in \Gamma, \quad p \in Q, \tag{2}$$

$$k_n\,(F_1)\,u_\nu\,(\xi_1, p) = g_1(p), \quad p \in Q, \tag{3}$$

$$k_n\,(F_2)\,u_\nu\,(\xi_2, p) = q\,(F_2)\,\phi(p) + g_2(p), \quad p \in Q, \tag{4}$$

где ξ_i, $i = 1, 2$ — фиксированные точки границы Γ, $F_i \equiv F_i(p) = f\,(\xi_i, p)$, $i = 1, 2$, $h(x, p)$, $\phi(p)$, $f(\xi, p)$, $g_i(p)$, $i = 1, 2$, $k_i(u)$, $i = 1, 2, \dots, n-1$, — заданные функции, $0 < k_i(u) \in \mathrm{Lip}\,[R_1, R_2]$, $i = 1, 2, \dots, n-1$, $g_i(p) \in \mathrm{Lip}\,(Q)$, $i = 1, 2$, $\phi(p) \in \mathrm{Lip}\,(Q)$, $h(x, p)$, $f(\xi, p)$ при любом $p \in Q$ принадлежат соответственно пространствам

$C^{\alpha}\left(\overline{D}\right)$, $C^{2+\alpha}(\Gamma)$, ν — направление внутренней нормали к границе в точке ξ_i, $i = 1, 2$, $u_\nu(\xi_i, p) \equiv \equiv \frac{\partial u}{\partial \nu}(\xi_i, p)$, $i = 1, 2$, $0 < \alpha < 1$, R_1, R_2 — некоторые числа, $\mathrm{Lip}\,(Q)$ — пространство функций, удовлетворяющих условию Липщица. Предположим, что функции $F_i(p)$, $i = 1, 2$ имеют обратные $\Phi_i\,(F_i)$, $i = 1, 2$, определенные на $[R_1, R_2]$ в области значения на Q и принадлежащие $\mathrm{Lip}\,(Q)$.

При совпадении коэффициентов $k_i(u)$, $i = 1, 2, \ldots, n$ постановка задачи совпадает с постановкой задачи работы [1]. В работе получена корректность более широкого класса обратных задач.

Определение 1. Функции $\{k_n(u),\, q(u),\, u(x, p)\}$ назовем *решением задачи* (1)–(4), если $0 < k_n(u)$, $q(u) \in C\,[R_1, R_2]$, $u(x, p) \in C\left(\overline{D}xQ\right)$, функция $u(x, p)$ при любом p принадлежит $C^2(D)$, существуют пределы $\lim\limits_{x\to\xi_i} u_\nu(x, p)$, $i = 1, 2$ и удовлетворяются соотношения (1)–(4).

2. ЕДИНСТВЕННОСТЬ И УСТОЙЧИВОСТЬ РЕШЕНИЯ

Пусть кроме задачи (1)–(4) задана еще задача $(\bar{1})$–$(\bar{4})$, где все функции, входящие в (1)–(4), заменены соответствующими функциями с чертой. Положим $Z(x, p) = \overline{u}(x, p) - u(x, p)$, $\lambda(u) = \overline{k}_n(u) - k_n(u)$, $\mu(u) = \overline{q}(u) - q(u)$, $\delta_1(x, p) = \overline{h}(x, p) - h(x, p)$, $\delta_2(\xi, p) = \overline{f}(\xi, p) - f(\xi, p)$, $\delta_3^{(i)}(u) = \overline{k}_i(u) - k_i(u)$, $i = 1, 2, \ldots, n-1$, $\delta_4(p) = \overline{g}_1(p) - g_1(p)$, $\delta_5(p) = \overline{g}_2(p) - g_2(p)$, $\delta_6(p) = \overline{\phi}(p) - \phi(p)$.

Через $\tilde{\delta}_2(x, p)$, $\tilde{f}(x, p)$ обозначим функции на границе Γ, совпадающие соответственно с $\delta_2(\xi, p)$, $f(\xi, p)$ и при любом p принадлежащие $C^{2+\alpha}(\overline{D})$.

Определение 2. Если для произвольного $\varepsilon > 0$ можно указать такое $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, что при выполнении условий

$$\|\delta_1(x, p)\|_{C\left(\overline{D}xQ\right)} < \delta, \quad \max_p \left\|\tilde{\delta}_2(x, p)\right\|_{C^2\left(\overline{D}\right)} < \delta, \quad \left\|\delta_3^{(i)}(u)\right\|_{C[R_1,\, R_2]} < \delta, \quad i = 1, 2, \ldots, n-1,$$

$$\max_p |\delta_i(p)| < \delta, \quad i = 4, 5, 6, \tag{5}$$

выполняются неравенства $|Z(x, p)| < \varepsilon$, $|\lambda(u)| < \varepsilon$, $|\mu(u)| < \varepsilon$ при $x \in \overline{D}$, $p \in Q$, тогда скажем, что решение задачи (1)–(4) устойчиво.

Единственность решения обратной задачи (1)–(4) в предположении его существования устанавливает теорема 1.

Теорема 1. *Пусть $g_1(p) \neq 0$, $\phi(p) \neq 0$, $N \,\mathrm{mes}\, D < 1$. Тогда решение задачи* (1)–(4) *единственно и устойчиво. N — положительное постоянное, зависящее от данных и решений задачи.*

Доказательство. Из $(\bar{1})$–$(\bar{4})$ соответственно вычтем (1)–(4) и положим $Z_1(x, p) = Z(x, p) - \tilde{\delta}_2(x, p)$. Тогда получим

$$-\sum_{i=1}^{n} \overline{k}_i\left(\overline{u}\right) Z_{1x_ix_i} + \overline{q}\left(\overline{u}\right) Z_1 = \delta_7(x, p) + \sum_{i=1}^{n} \alpha_i(x, p)\left[\bar{k}_i\left(\bar{u}\right) - \bar{k}_i(u)\right] +$$

$$+\beta(x, p)\left[\bar{q}\left(\bar{u}\right) - \bar{q}(u)\right] + \alpha_n(x, p)\lambda(u) + \beta(x, p)\mu(u), \tag{6}$$

$$Z_1(x, p)|_\Gamma = 0, \tag{7}$$

$$\lambda\left(F_1\right) = \delta_8(p) - \left[\bar{k}_n\left(\bar{F}_1\right) - \bar{k}_n\left(F_1\right)\right] \times u_\nu\left(\xi_1, p\right) + \gamma_1(p) Z_{1\nu}\left(\xi_1, p\right), \tag{8}$$

$$\mu\left(F_2\right) = \delta_9(p) + \left[\bar{k}_n\left(\bar{F}_2\right) - \bar{k}_n\left(F_2\right)\right] \times [\phi(p)]^{-1} + \left[\bar{q}\left(\bar{F}_2\right) - \bar{q}\left(F_2\right)\right] + \gamma_2(p) Z_{1\nu}\left(\xi_2, p\right) + \gamma_2(p)\lambda\left(F_2\right), \tag{9}$$

где $\alpha_i(x,p) = u_{x_ix_i}$, $i = 1,2,\ldots,n$, $\beta(x, p) = -u$, $\delta_7(x, p) = \delta_1(x, p) + \sum\limits_{i=1}^{n-1} \alpha_i(x, p)\delta_3^{(i)}\left[u(x, p)\right] + + \sum\limits_{i=1}^{n} \overline{k}_i\left(\overline{u}\right) \tilde{\delta}_{2x_ix_i}(x, p) - \overline{q}\left(\overline{u}\right) \tilde{\delta}_2(x, p)$, $\gamma_1(p) = -\overline{k}_n\left(\overline{F}_1\right)\left[u_\nu\left(\xi_1, p\right)\right]^{-1}$, $\gamma_2(p) = \overline{k}_n\left(\overline{F}_2\right)[\phi(p)]^{-1}$, $\gamma_3(p) = u_\nu\left(\xi_2, p\right)[\phi(p)]^{-1}$, $\delta_8(p) = \left[\delta_4(p) - \overline{k}_n\left(\overline{F}_1\right)\tilde{\delta}_{2\nu}\left(\xi_1, p\right)\right]\left[u_\nu\left(\xi_1, p\right)\right]^{-1}$, $\delta_9(p) = \big[-\overline{q}\big(\overline{F_2}\big)\delta_5(p) - - \delta_6(p) + \overline{k}_n\big(\overline{F_2}\big)\tilde{\delta}_{2\nu}\big(\xi_2, p\big)\big]\,[\phi(p)]^{-1}$.

При помощи функции Грина [3] из (6), (7) определим функцию $Z_1(x, p)$ через правую часть равенства

$$Z_1(x, p) = \int\limits_D G(x, \theta)\Big\{\delta_7(\theta, p) + \sum_{i=1}^{n} \alpha_i(\theta, p)[\bar{k}_i(\bar{u}) - \bar{k}_i(u)] + \beta(\theta, p)[\bar{q}(\bar{u}) - \bar{q}(u)] +$$

$$+\alpha_n(\theta,\, p)\lambda(u)+\beta(\theta,\, p)\mu(u)\Big\}d\theta. \tag{10}$$

Это выражение подставим в условие (8) и (9). Тогда получим

$$\lambda(F_1)=\delta_8(p)-[\bar{k}_n(\bar{F}_1)-\bar{k}_n(F_1)]\times u_\nu(\xi_1,\, p)+\gamma_1(p)\int\limits_D\frac{\partial}{\partial\nu}G(\xi_1,\,\theta)\{\delta_7(\theta,\, p)+$$

$$+\sum_{i=1}^{n}\alpha_i(\theta,\, p)[\bar{k}_i(\bar{u})-\bar{k}_i(u)]+\beta(\theta,\, p)[\bar{q}(\bar{u})-\bar{q}(u)]+\alpha_n(\theta,\, p)\lambda(u)+\beta(\theta,\, p)\mu(u)\}d\theta,$$

$$\mu(F_2)=\delta_9(p)+[\bar{k}_n(\bar{F}_2)-\bar{k}_n(F_2)]\times[\phi(p)]^{-1}+[\bar{q}(\bar{F}_2)-\bar{q}(F_2)]+\gamma_2(p)\int\limits_D\frac{\partial}{\partial\nu}G(\xi_2,\,\theta)\Big\{\delta_7(\theta,\, p)+$$

$$+\sum_{i=1}^{n}\alpha_i(\theta,\, p)[\bar{k}_i(\bar{u})-\bar{k}_i(u)]+\beta(\theta,\, p)[\bar{q}(\bar{u})-\bar{q}(u)]+\alpha_n(\theta,\, p)\lambda(u)+\beta(\theta,\, p)\mu(u)\Big\}d\theta+\gamma_3(p)\lambda(F_2). \tag{11}$$

Положим $\chi=\max\limits_{x,\,p}|Z_1(x,\, p)|+\max\limits_{u}|\lambda(u)|+\max\limits_{u}|\mu(u)|$. Тогда из (10) и из системы (11) следует, что

$$|Z_1(x,\, p)|\le\delta_{10}(p)+\chi\int\limits_D G(x,\,\theta)d\theta,\quad |\lambda\,(F_1)|\le\delta_{11}(p)+\chi\int\limits_D K_1\,(\xi_1,\,\theta)\,d\theta,$$

$$|\mu\,(F_2)|\le\delta_{12}(p)+\chi\int\limits_D K_2\,(\xi_2,\,\theta)\,d\theta+|\gamma_3(p)|\,|\lambda\,(F_2)|\,. \tag{12}$$

Здесь $\delta_i(p)$, $i=10,\,11,\,12,$ — функции, стремящиеся к нулю при условиях (5).

Функция Грина и полученные из оценок производных функций Грина функции $K_i\,(\xi_i,\,\theta)$, $i=1,\,2$, имеют следующую оценку [3]:

$$|G(x,\,\theta)|\le M_1\,|x-\theta|^{2-n}\,,\quad M_1>0,\quad |K_i\,(\xi_i,\,\theta)|\le M_{i+1}\,|\xi_i-\theta|^{1-n}\,,\quad M_{i+1}>0,\quad i=1,\,2. \tag{13}$$

При достаточно малой мере D для указанных интегралов в системе (12) существуют оценки $M_i[\operatorname{mes} D]^{\frac{1}{n}}$, $M_i>0$, $i=4,\,5,\,6$. Из системы (12) получим

$$\chi\le\delta_{13}(p)+\chi N\operatorname{mes} D. \tag{14}$$

По условию теоремы $\beta=N\operatorname{mes} D<1$. Тогда для χ имеем $\chi\le(1-\beta)^{-1}\delta_{13}(p)$. Следовательно, χ стремится к нулю при $\delta\to 0$ в условиях (5). Теорема доказана. □

3. МЕТОД ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНЫХ ПРИБЛИЖЕНИЙ

Метод последовательных приближений для решения задачи (1)–(4) применялся по схеме

$$-\sum_{i=1}^{n-1}k_i\left(u^{(S)}\right)u^{(S+1)}_{x_ix_i}-k^{(S)}_n\left(u^{(S)}\right)u^{(S+1)}_{x_nx_n}+q^{(S)}\left(u^{(S)}\right)u^{(S+1)}=h(x,\, p),\quad x\in D,\quad p\in Q, \tag{15}$$

$$u^{(S+1)}(x,\, p)\Big|_\Gamma=f_1(\xi,\, p),\quad \xi\in\Gamma,\quad p\in Q, \tag{16}$$

$$k^{(S+1)}_n\left(u^{(S+1)}\right)u^{(S+1)}_\nu\left(\xi_1,\,\Phi_1\left(u^{(S+1)}\right)\right)=g_1\left(\Phi_1\left(u^{(S+1)}\right)\right), \tag{17}$$

$$k^{(S+1)}_n\left(u^{(S+1)}\right)u^{(S+1)}_\nu\left(\xi_2,\,\Phi_2\left(u^{(S+1)}\right)\right)=q^{(S+1)}\left(u^{(S+1)}\right)\phi\left(\Phi_2\left(u^{(S+1)}\right)\right)+g_2\left(\Phi_2\left(u^{(S+1)}\right)\right), \tag{18}$$

где $\Phi_i\,(F_i)$, $i=1,\,2$, являются обратными соответственно к функциям $F_i(p)=f(\xi_i,\, p)$, $i=1,\,2$. По схеме (15)–(18) последовательные итерации проводятся следующим образом: сперва выбираются некоторые $k^{(0)}_n\left(u^{(0)}\right)>0$, $q^{(0)}\left(u^{(0)}\right)>0$, принадлежащие $\operatorname{Lip}\,[R_1,\, R_2]$, и подставляются в уравнение (15). Далее решается задача (15), (16) и находится $u^{(1)}(x,\, p)$. По функциям $u^{(1)}_\nu\left(\xi_i,\,\Phi_i\left(u^{(1)}\right)\right)$, $i=1,\,2$, из условий (17)–(18) находятся $k^{(1)}_n\left(u^{(1)}\right)$, $q^{(1)}\left(u^{(1)}\right)$ и эти функции используются для проведения следующего шага итерации.

Теорема 2. *Пусть решение задачи* (1)–(4) *существует и при всех* $S = 0, 1, \ldots,$ $u^{(S)}(x, p) \in C\left(\bar{D}xQ\right)$, $u^{(S)}(x, p)$ *при любом* p *принадлежит* $C^2(D)$, $k_n^{(S)}\left(u^{(S)}\right) \in \mathrm{Lip}\,[R_1, R_2]$, $q^{(S)}\left(u^{(S)}\right) \in \mathrm{Lip}\,[R_1, R_2]$, $g_1(p)u_\nu^{(S)}(\xi_1, p) > 0$, $\phi(p)u_\nu^{(S)}(\xi_2, p) > 0$, $g_2(p)u_\nu^{(S)}(\xi_2, p) < 0$, $N \operatorname{mes} D < 1$, *производные функции* $u^{(S)}(x, p)$ *по* x *до второго порядка равномерно ограничены. Тогда функции* $\left\{k_n^{(S)}\left(u^{(S)}\right), q^{(S)}\left(u^{(S)}\right), u^{(S)}(x, p)\right\}$, *полученные методом последовательных приближений,* (15)–(18) *при* $S \to +\infty$ *равномерно сходятся к решению задачи* (1)–(4) *со скоростью геометрической прогрессии.* N *— положительное постоянное, зависящее от данных задачи.*

Доказательство. Положим

$$Z^{(S)}(x, p) = u(x, p) - u^{(S)}(x, p), \quad \lambda^{(S)}(u) = k_n(u) - k_n^{(S)}(u), \quad \mu^{(S)}(u) = q(u) - q^{(S)}(u).$$

Легко проверить, что эти функции удовлетворяют системе

$$-\sum_{i=1}^{n} k_i(u) Z_{x_i x_i}^{(S+1)} + q(u)Z^{(S+1)} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i^{(S)}(x, p)\left[k_i(u) - k_i\left(u^{(S)}\right)\right] + \alpha_n^{(S)}(x, p)\left[k_n^{(S)}(u) - k_n^{(S)}\left(u^{(S)}\right)\right] +$$

$$+\beta^{(S)}(x, p)\left[q^{(S)}(u) - q^{(S)}\left(u^{(S)}\right)\right] + \alpha_n^{(S)}(x, p)\lambda^{(S)}(u) + \beta^{(S)}(x, p)\mu^{(S)}(u), \tag{19}$$

$$Z^{(S+1)}(x, p)\Big|_\Gamma = 0, \quad \xi \in \Gamma, \quad p \in Q, \tag{20}$$

$$\lambda^{(S+1)}(F_1) = \gamma_1^{(S)}(p) Z_\nu^{(S+1)}(\xi_1, p), \tag{21}$$

$$\mu^{(S+1)}(F_2) = \gamma_2(p) Z_\nu^{(S+1)}(\xi_2, p) + \gamma_3(p)\lambda^{(S+1)}(F_2), \tag{22}$$

где $\alpha_i^{(S)}(x, p) = u_{x_i x_i}^{(S+1)}$, $i = 1, 2, \ldots, n$, $\beta^{(S)}(x, p) = -u^{(S+1)}$, $\gamma_1^{(S)}(p) = k_n(F_1)\left[-u_\nu^{(S+1)}(\xi_1, p)\right]^{-1}$, $\gamma_2(p) = k_n(F_2)\,[\phi(p)]^{-1}$, $\gamma_3^{(S)}(p) = [\phi(p)]^{-1}\left[u_\nu^{(S+1)}(\xi_2, p)\right]$.

Функцией Грина из (19)–(20) определим $Z^{(S+1)}(x, p)$ через правую часть равенства (19).

$$Z^{(S+1)}(x, p) = \int\limits_D G(x, \theta)\left[\sum_{i=1}^{n} \alpha_i^{(S)}(\theta, p)\left[k_i(u) - k_i\left(u^{(S)}\right)\right] + \alpha_n^{(S)}(\theta, p)\left[k_n^{(S)}(u) - k_n^{(S)}\left(u^{(S)}\right)\right] + \right.$$

$$\left. +\beta^{(S)}(\theta, p)\left[q^{(S)}(u) - q^{(S)}\left(u^{(S)}\right)\right] + \alpha_n^{(S)}(\theta, p)\lambda^{(S)}(u) + \beta^{(S)}(\theta, p)\mu^{(S)}(u)\right] d\theta. \tag{23}$$

Подставим это выражение в условия (21) и (22). Тогда получим

$$\lambda^{(S+1)}(F_1) = \gamma_1^{(S)}(p)\int\limits_D G_\nu(\xi_1, \theta)\left[\sum_{i=1}^{n} \alpha_i^{(S)}(\theta, p)\left[k_i(u) - k_i\left(u^{(S)}\right)\right] + \right.$$

$$+\alpha_n^{(S)}(\theta, p)\left[k_n^{(S)}(u) - k_n^{(S)}\left(u^{(S)}\right)\right] + \beta^{(S)}(\theta, p)\left[q^{(S)}(u) - q^{(S)}\left(u^{(S)}\right)\right] +$$

$$\left. +\alpha_n^{(S)}(\theta, p)\lambda^{(S)}(u) + \beta^{(S)}(\theta, p)\mu^{(S)}(u)\right] d\theta,$$

$$\mu^{(S+1)}(F_2) = \gamma_2^{(S)}(p)\int\limits_D G_\nu(\xi_2, \theta)\left[\sum_{i=1}^{n} \alpha_i^{(S)}(\theta, p)\left[k_i(u) - k_i\left(u^{(S)}\right)\right] + \right.$$

$$+\alpha_n^{(S)}(\theta, p)\left[k_n^{(S)}(u) - k_n^{(S)}\left(u^{(S)}\right)\right] + \beta^{(S)}(\theta, p)\left[q^{(S)}(u) - q^{(S)}\left(u^{(S)}\right)\right] +$$

$$\left. +\alpha_n^{(S)}(\theta, p)\lambda^{(S)}(u) + \beta^{(S)}(\theta, p)\mu^{(S)}(u)\right] d\theta + \gamma_3(p)\lambda^{(S+1)}(F_2). \tag{24}$$

Положим $\chi^{(S)} = \max\limits_{x,\,p}\left|Z^{(S)}(x, p)\right| + \max\limits_{u}\left|\lambda^{(S)}(u)\right| + \max\limits_{u}\left|\mu^{(S)}(u)\right|$. Прежним путем из (23) и системы (24) следует, что $\chi^{(S+1)} \le \chi^{(S)} N \operatorname{mes} D$. Таким образом, теорема доказана. □

4. СУЩЕСТВОВАНИЕ РЕШЕНИЯ

Существование решения задачи (1)–(4) доказывается для частных случаев.

1. Пусть $k_n(u) > 0$ — заданная функция, из условий (1), (2), (4) требуется определить функции $\{q(u), u(x, p)\}$.

Теорема 3. *Пусть $h(x, p) = 0$, $f(\xi, p) \geq 0$, $g_2(p) = 0$, $\phi(p) < 0$, $N \cdot \operatorname{mes} D < 1$. Тогда задача* (1), (2), (4) *имеет хотя бы одно решение. N — положительное число, зависящее от данных задачи.*

Доказательство. Нетрудно проверить, что при всех приближениях $q(u)$ положительно. В силу принципа максимума [3] для решения задачи (19), (20) справедлива оценка $\left\|u^{(S+1)}\right\|_{C\left(\bar{D}\times Q\right)} \leq$ $\leq \|f\|_{C(\Gamma\times Q)}$, т.е. последовательность $\left\{u^{(s)}(x, p)\right\}$ равномерно ограничена. Докажем равномерную ограниченность последовательности $\left\{q^{(S)}\left(u^{(S)}\right)\right\}$. Переносим слагаемое $q^{(S)}\left(u^{(S)}\right)u^{(S+1)}$ в правую часть уравнения (15) и с помощью функции Грина найдем выражение для $u^{(S+1)}(x, p)$.

$$u^{(S+1)}(x, p) = \int\limits_D G(x, \theta)\left[\sum_{i=1}^n k_i\left(u^{(S)}\right)\tilde{f}_{\theta_i\theta_i}(\theta, p) - q^{(S)}\left(u^{(S)}\right)u^{(S+1)}\right]d\theta + \tilde{f}(x, p).$$

Подставив это выражение в условие (18) при $x = \xi_2$ получим

$$q^{(S+1)}\left(F_2\right) = F^{(S)}(p) - \int K^{(S)}\left(\xi_2, \theta\right)q^{(S)}\left(u^{(S+1)}\right)u^{(S+1)}(\theta, p)d\theta, \tag{25}$$

где

$$F^{(S)}(p) = k_n\left(F_2\right)[\phi(p)]^{-1}\left[\tilde{f}_\nu\left(\xi_2, p\right) + \int\limits_D G_\nu\left(\xi_2, \theta\right)\right]\left[\sum_{i=1}^n k_i\left(u^{(S)}\right)\tilde{f}_{\theta_i\theta_i}(\theta, p)\right]d\theta,$$

$$K^{(S)}\left(\xi_2, \theta\right) = [\phi(p)]^{-1}k_n\left(F_2\right)G_\nu\left(\xi_2, \theta\right).$$

Для $K^{(S)}\left(\xi_2, \theta\right)$ имеет место оценка (13).

Положим $q_1^{(S)} = \max\left|q^{(S)}\left(u^{(S)}\right)\right|$, $R_1 \leq u^{(S)} \leq R_2$. Тогда из (25) при достаточно малой мере D имеем

$$q_1^{(S+1)} \leq M_7 + N \operatorname{mes} D\, q_1^{(S)}.$$

Здесь $M_7 > 0$ и не зависит от S.

Обозначим $\beta = N \operatorname{mes} D$. Учитывая, что $0 < \beta < 1$, имеем

$$q_1^{(S+1)} \leq \frac{1}{1-\beta}M_7 + q_1^{(0)}.$$

Из этого неравенства вытекает равномерная ограниченность последовательности $\left\{q^{(S)}\left(u^{(S)}\right)\right\}$. Таким образом, при всех приближениях $q^{(S)}(u^{(S)})$ — непрерывная и равномерно ограниченная функция. Тогда из общей теории эллиптических уравнений следует, что при условиях теоремы последовательность $\left\{u^{(S)}(x, p)\right\}$ равномерно ограничена по норме $W_{p_1}^2(D)$ для всех $p_1 > n$, $p \in Q$. Поэтому $u^{(S)}(x, p)$ компактна в $C^1\left(\bar{D}\right)$. При этом из условия (18) следует, что последовательность $\left\{q^{(S)}\left(u^{(S)}\right)\right\}$ будет компактна в $C\left[R_1, R_2\right]$. Отсюда и из (15), (16) вытекает компактность $\left\{u^{(S)}(x, p)\right\}$ в $C^2\left(\bar{D}\right)$. Переходя в системе (15), (16), (18) к пределу при $S \to +\infty$, получим, что существует пара функций $\{q(u), u(x, p)\}$ удовлетворяющая условиям задачи (1), (2), (4). Теорема доказана. □

2. Пусть $q(u)$ — заданная функция. Обозначая $y = x_2$ из условий (1)–(3) при $n = 2$ требуется определить функции $\{k_1(u), u(x, y, p)\}$. В частном случае рассмотрим определение функции $\{k_1(u), u(x,y)\}$ в прямоугольной области:

$$-k_1(u)u_{xx} - k_2(u)u_{yy} + q(u)u = h(x, y), \quad (x, y) \in D, \tag{26}$$

$$u(x, 0) = \varphi_1(x), \quad u(x, l_2) = \varphi_2(x), \quad 0 \leq x \leq l_1, \tag{27}$$

$$u(0, y) = \phi_1(y), \quad u\left(l_1, y\right) = \phi_2(y), \quad 0 \leq y \leq l_2, \tag{28}$$

$$k_1\left(\phi_1(y)\right)u_x(0, y) = g_1(y), \quad 0 \leq y \leq l_2, \tag{29}$$

удовлетворяющей условиям $\varphi_1(0) = \phi_1(0)$, $\varphi_1(l_1) = \phi_2(0)$, $\varphi_2(l_1) = \phi_2(l_2)$, $\phi_1(l_2) = \varphi_2(0)$. Здесь $D = \{(x, y)\,|0 < x < l_1, 0 < y < l_2\}$.

Аналогично схеме (15)–(18) метод последовательных приближений применяется к задаче (26)–(29). Сначала докажем следующую лемму.

Лемма. *Пусть задача*

$$-a(x, y)u_{xx} - b(x, y)u_{yy} + u = 0, \quad (x, y) \in D,$$
$$u(x, 0) = \varphi_1(x), \quad u(x, l_2) = \varphi_2(x), \quad 0 \le x \le l_1,$$
$$u(0, y) = \phi_1(y), \quad u(l_1, y) = \phi_2(y), \quad 0 \le y \le l_2,$$

удовлетворяющая условиям $\varphi_1(0) = \phi_1(0)$, $\varphi_1(l_1) = \phi_2(0)$, $\varphi_2(l_1) = \phi_2(l_2)$, $\phi_1(l_2) = \varphi_2(0)$ *при заданном* $a(x, y) \ge \mu_0$, $b(x, y) \ge \mu_0$, $\mu_0 > 0$, *имеет решение, принадлежащее* $C^2(D)\cap C(\overline{D})$ *и* $n(x) \le \varphi_1(x) - \varphi_2(x) \le Ml_2$, $m(y) \le \phi_1(y) - \phi_2(y) \le Ml_1$, $\varphi_2(x) \ge 0$, $\phi_2(y) \ge 0$, $\varphi_1(0) \ge \varphi_1(x) + m(0)xl_1^{-1}$, $\varphi_2(0) \ge \varphi_2(x) + m(l_2)xl_1^{-1}$, $\varphi_{ix}(x) \ge -M$, $i = 1, 2$, $\phi_{iyy}(y) = 0$. *Тогда*

$$-M - \phi_1(y)(2\mu_0)^{-1}l_1 \le u_x(0, y) \le -m(y)l_1^{-1}, \tag{30}$$

где $m(y) \in C^2[0, l_2]$, $m''(y) \ge 0$, $M = \max\{\max\limits_{i=1,2}\max\limits_x|\varphi_{ix}(x)|\}$, $\max\limits_x l_2^{-1}[\varphi_1(x) - \varphi_2(x)]$, $\max\limits_x l_1^{-1}[\phi_1(y) - \phi_2(y)]$.

Доказательство. Положим $\upsilon(x, y) = u(x, y) + mxl_1^{-1} - \phi_1(y)$, $V(x, y) = -u(x, y) + \phi_1(y) - Mx - \phi_1(y)(2\mu_0)^{-1}x(l_1 - x)$. Нетрудно проверить, что $\upsilon(x, y)$ удовлетворяет условиям задачи

$$-a(x, y)\upsilon_{xx} - b(x, y)\upsilon_{yy} + \upsilon = -\phi_1(y) + xm(y)l_1^{-1},$$
$$\upsilon(x, 0) = \varphi_1(x) - \varphi_1(0) + xm(0)l_1^{-1}, \quad \upsilon(x, l_2) = \varphi_2(x) - \varphi_2(0) + xm(l_2)l_1^{-1},$$
$$\upsilon(0, y) = 0, \quad \upsilon(l_1, y) = -\phi_1(y) + m(y) + \phi_2(y).$$

Поэтому по условию леммы наибольшее положительное значение функции $\upsilon(x, y)$ достигается при $x = 0$. Тогда $\upsilon_x(0, y) \le 0$, другими словами,

$$u_x(0, y) \le -m(y)l_1^{-1}. \tag{31}$$

Аналогично, прежним путем при условиях леммы следует что, наибольшее положительное значение функция $V(x, y)$ достигает при $x = 0$, поэтому $V_x(0, y) \le 0$, или

$$-M - \phi_1(y)\,(2\mu_0)^{-1}\,l_1 \le u_x(0, y). \tag{32}$$

Объединяя оценки (31) и (32), получим оценку (30). Лемма доказана. □

Теорема 4. *Пусть* $\varphi_i(x) \in C^{2+\alpha}(0, l_1)\cap C[0, l_1]$, $\phi_i(y) \in C^{2+\alpha}(0, l_2)\cap C[0, l_2]$, $i = 1, 2$, $h(x, y) = 0$, $q(u) = 1$, $n(x) \le \varphi_1(x) - \varphi_2(x) \le Ml_2$, $m(y) \le \phi_1(y) - \phi_2(y) \le Ml_1$, $\varphi_2(x) \ge 0$, $\phi_2(y) \ge 0$, $\varphi_1(0) \ge \varphi_1(x) + m(0)xl_1^{-1}$, $\varphi_2(0) \ge \varphi_2(x) + m(l_2)xl_1^{-1}$, $\varphi_{ix}(0) < 0$, $\varphi_{ix}(x) \ge -M$, $i = 1, 2$, $\phi_{iyy}(y) = 0$, $g_0' \le -g_1(y) - 1/2\phi_1(y)l_1$, $g_1(y) < 0$, $N\,\mathrm{mes}\,D < 1$, $m(y)$ — *такая неотрицательная функция, что* $g_1(y)[m(y)]^{-1}$ *ограничено,* g_0' — *положительное число. Тогда задача* (26)–(29) *имеет хотя бы одно решение,* N — *положительное число, зависящее от данных задачи.*

Доказательство. Доказательство проводится методом последовательных приближений. Из утверждения леммы следует, что

$$-M[1 + \phi_1(y)(2g_0')^{-1}l_1] \le u_x^{(S+1)}(0, y) \le -m(y)l_1^{-1}, \quad 0 < y < l_2.$$

Тогда

$$g_0'M^{-1} \le k_1^{(S+1)}(u^{(S+1)}) \le \max_y\{-g_1(y)[m(y)]^{-1}\}l_1.$$

Таким образом, при всех приближениях $\{k_1^{(S)}(u^{(S)})\}$ — строго положительные, непрерывные и равномерно ограниченные функции. Тогда из общей теории эллиптических уравнений следует, что при условиях теоремы последовательность $\{u^{(S)}(x, y)\}$ равномерно ограничена по норме $W_{p_1}^2(D)$ для всех $p_1 > 2$. Поэтому $\{u^{(S)}(x, y)\}$ компактна в $C^1(\overline{D})$. При этом из условий (17) следует, что для прямоугольной области последовательности $\{k_1^{(S)}(u^{(S)})\}$ будет компактна в $C[R_1, R_2]$. Отсюда и из (15), (16) вытекает компактность $\{u^{(S)}(x, y)\}$ в $C^2(\overline{D})$ для прямоугольной области. Переходят в системе (15)–(17) к пределу при $S \to +\infty$, получим, что существует пара функций $\{k_1(u), u(x,y)\}$, удовлетворяющая условиям (26)–(29). Теорема доказана. $\square$

Через $\tilde{f}(x, y)$ обозначим функцию, совпадающую на границах прямоугольной области соответственно с функциями $\varphi_i(x)$, $\phi_i(y)$, $i = 1, 2$, принадлежащую $C^{2+\alpha}(\bar{D})$. Функцию $\tilde{f}(x, y)$ можно определить следующем образом:

$$\tilde{f}(x, y) = \frac{l_1 - x}{l_1}\phi_1(y) + \frac{l_2 - y}{l_2}[\varphi_1(x) - \varphi_1(0) + \frac{x}{l_1}\varphi_1(0)] + \frac{x}{l_1}\left[\phi_2(y) - \phi_2(0) + \frac{y}{l_2}\phi_2(0)\right] +$$

$$+\frac{y}{l_2}\left[\varphi_2(x) - \varphi_2(0) + \frac{x}{l_1}\varphi_2(0)\right] - \frac{xy}{l_1 l_2}\phi_2\left(l_2\right).$$

Аналогично можно определить любой из коэффициентов $k_i(u)$, $i = 1, 2, \ldots, n-1$.

Библиографический список

1. *Искендеров, А.Д.* Обратная задача об определении коэффициентов квазилинейного эллиптического уравнения / А.Д. Искендеров // Изв. АН. Аз.ССР. 1978. № 2. С. 80–85.
2. *Клибанов, М.В.* Единственность в целом обратных задач для одного класса дифференциальных уравнений / М.В. Клибанов // Дифференциальные уравнения. 1984. Т. 20, № 11. С. 1947–1953.
3. *Миранда, К.* Уравнения с частными производными эллиптического типа / К. Миранда. М.: Иностр. лит., 1957. 252 с.

УДК 517.955.8

АСИМПТОТИКА В ОКРЕСТНОСТИ ТОЧКИ ВЫРОЖДЕНИЯ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ С СИЛЬНЫМ ВЫРОЖДЕНИЕМ

А.В. Глушко, А.Д. Баев, Д.С. Шумеева

Воронежский государственный университет,
кафедра математического анализа
E-mail: kuchp2@math.vsu.ru, alexsandrbaev@mail.ru,
kuchp@math.vsu.ru

В работе рассматривается уравнение теплопроводности с сильным вырождением. Известно, что для таких задач не требуется задавать начальные условия при $t = 0$, так как существует лишь единственное гладкое решение такого уравнения. В работе выделяется класс единственности решения и изучается разрешимость уравнения в пространствах непрерывных функций. Построено асимптотическое представление решения в окрестности точки вырождения, то есть выделяется главная часть решения при $t \to +0$ и оцениваются остатки.

Ключевые слова: уравнение теплопроводности, сильное вырождение, асимптотика решения.

Asymptotics Around the Degeneration Spot of Heat Equation Solution with Strong Degeneration

A.V. Glushko, A.D. Baev, D.S. Shumeeva

Voronezh State University,
Chair of Mathematical Analysis
E-mail: kuchp2@math.vsu.ru, alexsandrbaev@mail.ru,
kuchp@math.vsu.ru

The paper deals with heat equation with strong degeneration. It is known that for such problems initial conditions are not stated at $t = 0$ as there exists the only smooth solution of such equation. The paper investigates a class of uniqueness of the solution and studies solvability of the problem in spaces of continuous functions. An asymptotic representation of solution around the degeneration spot is built, i.e. the main part of the solution is defined at $t \to +0$ and residuals are estimated.

Key words: heat equation, strong degeneration, asymptotics of solution.

ВВЕДЕНИЕ

В работе рассматривается уравнение теплопроводности с сильным вырождением:

$$\alpha(t)\frac{\partial v(x, t)}{\partial t} - \Delta v(x,t) = f(x,t), \quad x \in \mathrm{R}^3, \quad t \in (0; d). \tag{1}$$

Условие сильного вырождения налагает следующие ограничения на коэффициент $\alpha(t)$: $\alpha(t) \in \in C^n([0;d])$, $n \in \mathrm{N}$, $n \geq 2$; при этом предполагается, что $\alpha(0) = \alpha'(0) = \ldots = \alpha^{(n-1)}(0) = 0$,

