



МЕХАНИКА

УДК 629.78

ВЛИЯНИЕ ПЕРЕМЕННОГО АЭРОДИНАМИЧЕСКОГО МОМЕНТА НА ДВИЖЕНИЕ СПУТНИКА ОТНОСИТЕЛЬНО ЦЕНТРА МАСС

В. С. Асланов, А. В. Пироженок*, А. В. Кислов, А. И. Маслова*

Самарский государственный аэрокосмический университет им. акад. С.П. Королева, кафедра теоретической механики;

*Институт технической механики Национальной академии наук Украины и Национального космического агентства Украины, Днепрпетровск
E-mail: Aslanov_vs@mail.ru, Alex.Pirozhenko@mail.ru, alexkislov2008@mail.ru, Maslova_anjta@mail.ru

Рассматривается движение твердого тела относительно центра масс в плоскости круговой орбиты под действием гравитационного и аэродинамического моментов. Исследуется режим движения гравитационной стабилизации спутника, когда его продольная ось движется в окрестности местной вертикали. В модели аэродинамического момента учтены изменения плотности атмосферы при орбитальном движении спутника и изменения коэффициента аэродинамического момента в зависимости от его ориентации к набегающему потоку. Построено аналитическое решение уравнения малых колебаний и показано, что переменность аэродинамического момента может оказывать существенное влияние на точность стабилизации спутника.

Ключевые слова: спутник, изменения плотности атмосферы, переменность коэффициента аэродинамического момента, уравнение Хилла, параметрический резонанс.

Influence of the Variable Aerodynamic Moment on Satellite Attitude Motion

V. S. Aslanov, A. V. Pirozhenko*, A. V. Kislov, A. I. Maslova*

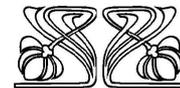
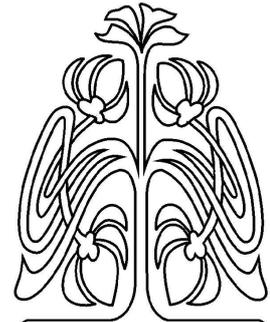
Samara State Aerospace University named after academician S.P. Korolyov, Chair of Theoretical Mechanics;

*Institute of Technical Mechanics National Academy of Sciences of Ukraine and National Space Agency of Ukraine, Dnipropetrovsk
E-mail: Aslanov_vs@mail.ru, Alex.Pirozhenko@mail.ru, alexkislov2008@mail.ru, Maslova_anjta@mail.ru

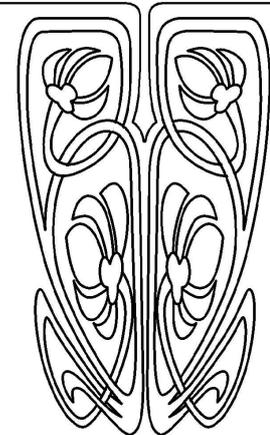
Attitude motion of a rigid body in the plane of a circular orbit under gravitational and aerodynamic moments is considered. The mode of the motion of a satellite gravitational stabilization when its long axis moves in the vicinity of a local vertical is investigated. Allowance of variations in the atmosphere density at a satellite orbital motion and in the aerodynamic moment coefficient depending on its orientation to an approach flow is included in the aerodynamic moment model. An analytical solution of a small oscillations equation is obtained, and it is shown that the variability of the aerodynamic moment may have a pronounced effect on the accuracy of the satellite stabilization.

Key words: satellite, atmosphere density variations, coefficient of the aerodynamic moment variations, Hills equations, parametric resonance.

Исследованию динамики спутника относительно центра масс с учетом гравитационного и аэродинамического моментов посвящено множество работ (см., например, [1, 2]). Большинство исследований проводились при определенных предположениях: постоянстве коэффициента лобового сопротивления спутника и постоянстве плотности атмосферы на круговой орбите [1, 2]. Вместе с тем в работах [3–6] отмечалась необходимость учета переменности коэффициента аэродинамического момента и изменения плотности атмосферы вдоль орбиты. В [7] показано, что для высот 550–750 км учет суточного



НАУЧНЫЙ
ОТДЕЛ





эффекта вздутия атмосферы на солнечной стороне Земли может приводить к изменению плотности на постоянной высоте в 5 раз. При совместном учете суточного эффекта вздутия атмосферы и изменений высоты орбиты, обусловленных несферичностью Земли, плотность на орбите может меняться в 8 раз. При таких изменениях плотности предположение о ее постоянстве не представляется вполне обоснованным. Кроме того, в колебательном движении спутника появляется дополнительное периодическое возмущение, которое может приводить к резонансным эффектам.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассматривается движение спутника как твердого тела относительно центра масс в плоскости круговой орбиты под действием гравитационного и аэродинамического моментов. Исследуется режим движения гравитационной стабилизации, когда наибольшая ось эллипсоида инерции (продольная ось) спутника движется в окрестности местной вертикали. Предполагается, что моменты инерции спутника таковы, что обеспечивается физическая реализация гравитационной стабилизации движения. Примем, что $B \geq A > C$, $(A - C)/B > 0.5$, где A , B , C — главные центральные моменты инерции, C — момент инерции относительно продольной оси спутника. При построении уравнений движения предполагается, что спутник движется по кеплеровой круговой орбите. При моделировании плотности атмосферы учитываются изменения высоты орбиты спутника, обусловленные нецентральностью гравитационного поля Земли.

Новизна задачи обусловлена использованием новой модели аэродинамического момента, в которой учтены его основные переменные составляющие. Модель аэродинамического момента, во-первых, учитывает непостоянство коэффициента аэродинамического момента при изменении ориентации спутника к набегающему потоку. Предполагается, что коэффициент аэродинамического момента пропорционален синусу угла отклонения продольной оси спутника от местной вертикали φ (рис. 1).

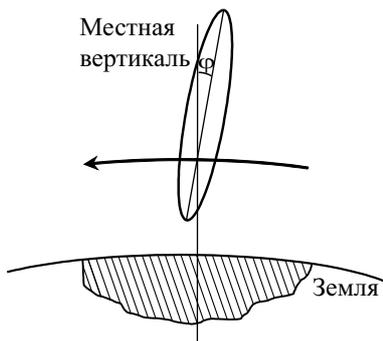


Рис. 1. Спутник на орбите

Это предположение основано на возможности разложения коэффициента аэродинамического момента в ряд Фурье по углу атаки. В [8] показано, что для ряда спутников с системой гравитационной стабилизации это предположение является достаточно обоснованным при углах отклонения, не превосходящих 10° .

Во-вторых, модель аэродинамического момента учитывает изменения плотности атмосферы при движении спутника по орбите, обусловленные неравномерностью плотности на заданной высоте из-за вздутия атмосферы на подсолнечной стороне Земли, а также изменением высоты орбиты из-за нецентральности гравитационного поля Земли.

Как показано в [7], рассматриваемые изменения плотности атмосферы хорошо описываются рядом Фурье с удержанием первых трех гармоник.

Актуальность исследований обусловлена важностью решения задачи повышения качества работы систем стабилизации движения спутника.

2. УРАВНЕНИЕ ДВИЖЕНИЯ

В качестве исходного уравнения рассматривается уравнение движения спутника относительно центра масс в плоскости круговой орбиты [9]:

$$B\ddot{\varphi} = -3\omega_0^2(A - C)\sin\varphi\cos\varphi + M_a, \quad (1)$$

где ω_0 — угловая скорость орбитального движения, M_a — момент аэродинамических сил, точки ($\dot{\varphi}$) означают производные по времени t .

Момент аэродинамических сил для режима гравитационной стабилизации будем описывать выражением [8]

$$M_a = a_0(1 + \sigma_a \sin\varphi)\frac{\rho V^2}{2},$$

где a_0 — величина, характеризующая среднее значение коэффициента аэродинамического сопротивления (размерность $[м^3]$), σ_a — безразмерный коэффициент, характеризующий изменение момента



при изменении ориентации спутника (далее, будем рассматривать КА, для которых $\sigma_a < 0.5$), V — модуль скорости спутника относительно потока, ρ — плотность атмосферы.

Плотность атмосферы будем описывать следующей зависимостью [7]:

$$\rho(t) = b_0 \left[1 + \sum_{n=1}^3 \bar{b}_n \cos(n\omega_0 t + f_n) \right],$$

где b_0 — средняя на орбите плотность атмосферы, \bar{b}_n, f_n — коэффициенты, характеризующие распределение плотности при движении спутника по орбите.

Плотность атмосферы на орбите, ее среднее значение (b_0) и изменения при орбитальном движении ($\bar{b}_n, n = 1, 2, 3$) зависят от множества факторов. Рассматривается влияние следующих факторов: высота орбиты, изменение высоты спутника при движении по орбите из-за нецентральности гравитационного поля Земли, расположение орбиты по отношению к солнечному горбу, а также уровень солнечной активности. Учет других факторов [10, 11], например, таких как сезонные изменения плотности атмосферы, может привести лишь к некоторым количественным отличиям в b_0 и \bar{b}_n , и не оказывает влияния на методику и качественные результаты исследований.

Будем предполагать, что коэффициенты $a_0, \sigma_a, b_0, \bar{b}_n, f_n$ не зависят от времени; $V = R\omega_0$, где R — расстояние от центра Земли до центра масс спутника.

Переходя к новой независимой переменной $\tau = \omega_0 t$ уравнение (1) можно записать в виде

$$\varphi'' = -3I \sin \varphi \cos \varphi + \frac{1}{2} H \lambda (1 + \sigma_a \sin \varphi) \left(1 + \sum_{n=1}^3 \bar{b}_n \cos(n\tau + f_n) \right), \quad (2)$$

где $I = (A - C)/B$, $\lambda = a_0/B$, $H = b_0 R^2$ (штрихом обозначены производные по τ). Величина λ имеет размерность [м/кг]. Величина H (размерность [кг/м]) зависит только от параметров орбиты и является усредненным по орбите приведенным скоростным напором.

3. КВАЗИСТАТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ

Движение спутника в режиме гравитационной стабилизации можно рассматривать как колебания относительно некоторого (смещенного относительно местной вертикали) положения продольной оси спутника, т. е.

$$\varphi = \varphi_0 + \tilde{\varphi}(\tau), \quad (3)$$

где φ_0 — среднее положение продольной оси спутника относительно местной вертикали (угол смещения), $\tilde{\varphi}(\tau)$ описывает колебания спутника относительно φ_0 .

Значение среднего положения φ_0 определяется равенством гравитационного и аэродинамического моментов при постоянной, равной средней, плотности атмосферы. Угол смещения φ_0 является квазистатическим решением уравнения (2) при $\varphi = \text{const}$, $\bar{b}_n = 0, n = 1, 2, 3$. Тогда

$$\sin \varphi_0 \cos \varphi_0 = s(1 + \sigma_a \sin \varphi_0), \quad (4)$$

где $s = \frac{\lambda H}{6I}$ — безразмерный коэффициент.

Запишем (4) в виде

$$\sin \varphi_0 = \frac{s}{\cos \varphi_0 - s\sigma_a}. \quad (5)$$

Из (5) следует, что при $\cos \varphi_0 > |s\sigma_a|$ знак φ_0 совпадает со знаком s (т. е. знаком a_0) и с ростом $|s|$ увеличивается $|\varphi_0|$; совпадение знаков s и σ_a приводит к увеличению смещения продольной оси спутника. Характер зависимости φ_0 от коэффициентов s и σ_a приведен на рис. 2.

Из рисунка видно, что при малых $|s|$ (соответственно малых $|\varphi_0|$) переменность коэффициента аэродинамического момента σ_a слабо влияет на $|\varphi_0|$; в зависимости от s угол смещения может превосходить десятки градусов.

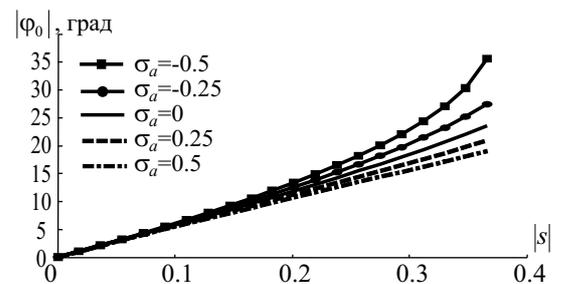


Рис. 2. Зависимость угла сдвига φ_0 от параметров s и σ_a



Отметим, что угол смещения φ_0 для одного и того же спутника будет различным в зависимости от параметра H . Следовательно, для достижения режима движения гравитационной стабилизации необходимо, чтобы характеристики спутника соответствовали ожидаемой плотности атмосферы для предполагаемых высоты и уровня солнечной активности. Это означает, что величины I и λ должны соответствовать величине H таким образом, чтобы коэффициент $|s|$ был мал, а следовательно, мал и угол $|\varphi_0|$.

Далее, будем предполагать, что параметры спутника и плотности атмосферы таковы, что $|\varphi_0|$ не превосходит нескольких градусов. Для определенности примем, что $|s| < 0.1$, тогда $|\varphi_0| < 6^\circ$.

4. УРАВНЕНИЯ МАЛЫХ КОЛЕБАНИЙ СПУТНИКА

Рассмотрим малые колебания спутника относительно среднего положения φ_0 . Подставляя (3) в уравнение (2) и линеаризуя полученное выражение с учетом (4), найдем

$$\ddot{\varphi} + [k^2 - 3Is\sigma_a \cos \varphi_0 \sum_{n=1}^3 \bar{b}_n \cos(n\tau + f_n)]\tilde{\varphi} = d \sum_{n=1}^3 \bar{b}_n \cos(n\tau + f_n), \quad (6)$$

где введены следующие обозначения: $k^2 = 3I(\cos 2\varphi_0 - s\sigma_a \cos \varphi_0)$, $d = 3Is(1 + \sigma_a \sin \varphi_0)$.

Уравнение (6) представляет собой уравнение типа Хилла (с периодическими коэффициентами) с периодической правой частью. Для исследования свойств решения такого уравнения целесообразно применять приближенные методы [9, 12].

Особенностью уравнения (6) является наличие малого коэффициента s . Уравнение (6) можно отнести к следующему, более общему, виду уравнений:

$$\ddot{y} + (a^2 + \varepsilon P(t))y = F(t), \quad (7)$$

где y — искомая величина, a — постоянный коэффициент, $\varepsilon \ll 1$ — малый параметр, t — независимая переменная, $P(t)$, $F(t)$ — функции, которые могут быть представлены в виде линейной комбинации элементарных тригонометрических функций с частотами a_{P_i} , $i = 1, 2, \dots, l$, a_{F_i} , $i = 1, 2, \dots, m$ соответственно, точки (\dot{y}) означают производные по t .

Рассмотрим задачу Коши для уравнения (7) с начальными условиями $y(0) = y_0$, $\dot{y}(0) = \dot{y}_0$. Без потери общности будем считать, что свободные члены $P(t)$, $F(t)$ равны нулю.

Отметим, что выделение малого параметра в (7) предполагает, что другие параметры системы являются величинами порядка единицы, т.е. a , y_0 , \dot{y}_0 , A_{P_i} , $A_{F_i} \sim 1$, где A_{P_i} , A_{F_i} — амплитуды изменений функций $P(t)$ и $F(t)$ при соответствующих частотах.

Введем новую переменную y_1 с теми же начальными условиями ($y_1(0) = y_0$, $\dot{y}_1(0) = \dot{y}_0$):

$$y_1 = y - \tilde{y}^0,$$

где \tilde{y}^0 — решение уравнения $\ddot{\tilde{y}} + a^2\tilde{y} = F(t)$ с нулевыми начальными условиями, т.е. [13]

$$\tilde{y}^0 = \frac{1}{a} \int_0^t F(\tau) \sin a(t - \tau) d\tau.$$

Будем предполагать, что система не находится в окрестности линейного резонанса, т.е. $|a - a_{F_i}| \gg \varepsilon$. Тогда каждый член $F(t)$ привнесет в изменение \tilde{y}^0 слагаемые

$$\frac{A_{F_i}}{a^2 - (a_{F_i})^2} \sin(a_{F_i}t + \beta_{F_i}), \quad -\frac{A_{F_i}}{a(a^2 - (a_{F_i})^2)} (a \cos at \sin \beta_{F_i} + a_{F_i} \sin at \cos \beta_{F_i}),$$

амплитуда которых имеет порядок единицы, где β_{F_i} — сдвиг фазы, соответствующий частоте a_{F_i} , при представлении $F(t)$ в ряд по синусам, $i = 1, 2, \dots, m$.

Уравнение для y_1 запишется в виде

$$\ddot{y}_1 + (a^2 + \varepsilon P(t))y_1 = -\varepsilon P(t)\tilde{y}^0 = \varepsilon F_1(t). \quad (8)$$



Поскольку $P(t)$ не содержит свободных членов, то произведение $P(t)\tilde{y}^0$ не будет содержать членов с частотой a , и его можно представить в виде линейной комбинации элементарных тригонометрических функций с частотами $|a \pm a_{P_i}|$, $|a_{P_i} \pm a_{F_i}|$, а также свободного члена.

Заменой переменных $\tilde{y}_1 = y_1 - y_1^0$, где $y_1^0 = \varepsilon F_{10}/a^2$, а F_{10} — свободный член F_1 , приведем уравнение (8) к виду уравнения (7)

$$\ddot{\tilde{y}}_1 + (a^2 + \varepsilon P(t))\tilde{y}_1 = \varepsilon \tilde{F}_1(t), \quad (9)$$

но с правой частью, пропорциональной ε , $\tilde{F}_1(t) = F_1 - P(t)y_1^0$. К частотам F_1 в \tilde{F}_1 прибавятся частоты a_{P_i} . Изменяются также и начальные условия $\tilde{y}_1(0) = y_0 - y_1^0$, а $\dot{\tilde{y}}_1(0) = \dot{y}_0$.

Вообще говоря, возможно продолжение процедуры замены переменной для повышения порядка малости правой части (9) (построения частного решения с нулевыми начальными условиями уравнения (7)). Но продолжение этой процедуры сталкивается с необходимостью удаления в уравнениях типа (8) резонансных членов, порождаемых самой процедурой. Это приводит к достаточно громоздким преобразованиям.

Таким образом, проведенная замена переменных позволила явно ввести в правую часть уравнений малый параметр, что дает возможность применить асимптотические методы для исследования движений.

Построим с помощью метода усреднения первое приближение по ε для решения (9). Для этого введем новые переменные B и w — амплитуду и фазу колебаний переменной \tilde{y}_1 :

$$\tilde{y}_1 = B \cos w, \quad \dot{\tilde{y}}_1 = -B \dot{w} \sin w.$$

Нетрудно получить (см., например, [14]), что уравнения для B и w имеют вид

$$\dot{B} = \frac{\varepsilon B}{2a} P(t) \sin 2w - \frac{\varepsilon}{a} \tilde{F}_1(t) \sin w, \quad \dot{w} = a + \frac{\varepsilon}{a} P(t) \cos^2 w - \frac{\varepsilon}{aB} \tilde{F}_1(t) \cos w,$$

т. е. приводятся к виду, стандартному для применения метода усреднения. Усредним уравнения вдоль порождающего решения $B = \text{const}$, $w = a(t - t_0)$, получаемого при $\varepsilon=0$. В случае, когда система не близка к параметрическому резонансу $|2a - a_{P_i}| \gg \varepsilon$ и линейному резонансу $|a - a_{F_i}| \gg \varepsilon$, где a_{F_i} — частоты F_1 , получим, что амплитуда колебаний \tilde{y}_1 не изменяется в первом приближении по ε .

Нетрудно видеть, что проведенные выше рассуждения доказывают, что при отсутствии резонансов решение уравнения (7) с точностью порядка ε совпадает с решением уравнения $\ddot{y} + a^2 y = F(t)$ на интервале времени порядка $1/\varepsilon$.

Таким образом, при отсутствии резонансных совпадений частот движение спутника в плоскости круговой орбиты при малых $\tilde{\varphi}$ с точностью порядка $|s\tilde{\varphi}|$ описывается уравнением

$$\ddot{\tilde{\varphi}} + k^2 \tilde{\varphi} = d \sum_{n=1}^3 \bar{b}_n \cos(n\tau + f_n). \quad (10)$$

5. ЧАСТОТЫ И РЕЗОНАНСЫ В СИСТЕМЕ

Определим возможность резонансных совпадений частот в системе. Для качественных оценок условие неблизости к резонансам в уравнении (7) запишем как условие $\sqrt{\varepsilon}$ удаленности частот: $\left| \frac{a_j}{a} - 1 \right| > \sqrt{\varepsilon}$ и $\left| \frac{a_{P_i}}{2a} - 1 \right| > \sqrt{\varepsilon}$, где через a_j обозначены частоты функций F и F_1 . Для уравнения (6) запишем его в виде: $\left| \frac{i}{k} - 1 \right| > |s|$, $i = 1, 2, \dots, 6$, и $\left| \frac{n}{2k} - 1 \right| > |s|$, $n = 1, 2, 3$. Так как в рассматриваемом случае $|s| \ll 1$, частота колебаний спутника близка к частоте гравитационных колебаний, $|k - \sqrt{3I}| \approx |s|$, то, как нетрудно видеть, система может быть близка только к линейному резонансу $k \approx 1$ и к параметрическому резонансу, обусловленному близостью удвоенной частоты собственных колебаний с утроенной частотой орбитального движения (третьей гармоникой разложения плотности атмосферы), $2k \approx 3$. Отметим, что учет других, более высоких, гармоник разложения плотности не приводит к появлению новых резонансов.

Расчет значений k для определенных выше параметров дает следующий диапазон возможного изменения: $1.18 \leq k \leq 1.73$. Таким образом, для рассматриваемых случаев в движении спутников линейный резонанс невозможен, а возможен только параметрический резонанс $2k \approx 3$.

6. ДВИЖЕНИЕ СПУТНИКА В НЕРЕЗОНАНСНЫХ СЛУЧАЯХ

С учетом решения уравнения (10), изменение угла φ можно представить в виде [13]

$$\varphi = \varphi_0 + (\varphi^0 - \varphi_0) \cos k\tau + \frac{\varphi'^0}{k} \sin k\tau + \sum_{n=1}^3 A_n \left[\frac{n}{k} \sin k\tau \sin f_n - \cos k\tau \cos f_n + \cos(n\tau + f_n) \right]. \quad (11)$$

где $\varphi^0 = \varphi(0)$, $\varphi'^0 = \varphi'(0)$ — начальные условия движения, $A_n = d \frac{\bar{b}_n}{k^2 - n^2}$ — амплитуда вынужденных колебаний с частотой n .

Из решения (11) видно, что амплитуда вынужденных колебаний спутника существенно зависит от частоты собственных колебаний k . Учитывая, что соотношение моментов инерции спутника может изменяться в диапазоне $0.5 < I < 1$ и $|s| < 0.1$, величина k^2 находится приблизительно в диапазоне от 1.4 до 3, т.е. в зависимости от инерционных параметров, амплитуда вынужденных колебаний с орбитальной частотой может как вдвое увеличиваться, так и вдвое уменьшаться относительно амплитуды приведенного аэродинамического момента с данной частотой (приведенная динамическая жесткость системы для орбитальной частоты находится в диапазоне от 0.4 до 2). Для удвоенной орбитальной частоты приведенная динамическая жесткость находится в диапазоне от 1 до 2.6. Влияние третьей гармоники разложения плотности атмосферы, при отсутствии параметрического резонанса, очень мало в силу высокой динамической жесткости системы и наблюдаемой при расчетах малости коэффициента \bar{b}_3 .

7. ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

Проведенные расчеты движения спутника по круговым орбитам на высотах 550–750 км показывают, что амплитуды переменной составляющей плотности атмосферы \bar{b}_n ($\bar{b}_n > 0$) могут достигать значений: \bar{b}_1 — до 0.83, \bar{b}_2 — до 0.23, \bar{b}_3 — до 0.02 (расчеты плотности проводятся согласно [11]).

Численное интегрирование уравнения (2) для указанного диапазона изменения параметров показывает, что в случае, когда система не находится в окрестности резонансов и при малых амплитудах колебаний решение (11) дает хорошее совпадение с решением исходного уравнения. Например, при движении спутника с параметрами, близкими к параметрам украинского спутника «Сич-1М»: $I = 0.555$, $\sigma_a = -0.116$, $\lambda = -0.0037$ м/кг, на высоте 750 км по полярной орбите, плоскость которой перпендикулярна оси симметрии атмосферного горба, при низком уровне солнечной активности $F_0 = 75 \cdot 10^{-22}$ Вт/(м²Гц) амплитуда вынужденных колебаний будет составлять всего 0.02° (рис. 3, а) и отличия между численным ($\varphi_{\text{числ}}$) и аналитическим ($\varphi_{\text{ан}}$) решениями уравнений (2) и (11) соответственно пренебрежимо малы. При движении этого же спутника на высоте 550 км по экваториальной орбите с максимальными изменениями плотности атмосферы в условиях высокой солнечной активности $F_0 = 250 \cdot 10^{-22}$ Вт/(м²Гц) амплитуда вынужденных колебаний достигает 15° (рис. 3, б). Здесь уже наблюдаются отличия в решениях (2) и (11) (на рис. 3 $\varphi_{\text{числ}}$ и $\varphi_{\text{ан}}$ соответственно), проявляющиеся в основном в сдвиге фазы колебаний. Можно утверждать, что эти отличия обусловлены нелинейностью уравнения (2), поскольку проведенные численные расчеты решений уравнений (11) и (6) в этом случае практически совпадают.

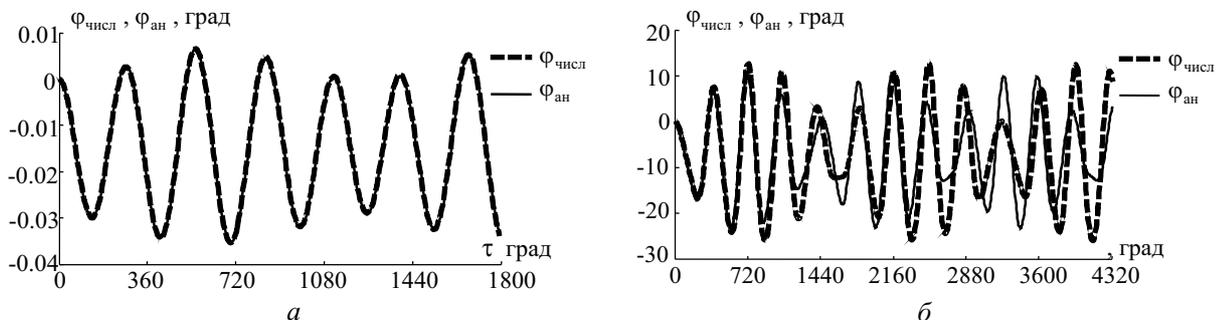


Рис. 3. Сравнение численного и аналитического решений для разных орбит

Сравним влияние переменной плотности атмосферы и стационарного (среднего) значения плотности на движение спутника. Переменность плотности атмосферы обуславливает появление вынуж-



денных колебаний с амплитудами A_n . Среднее значение плотности сказывается в основном на абсолютном значении угла смещения φ_0 . Отношение амплитуды вынужденных колебаний с орбитальной частотой A_1 к модулю угла смещения при $\sigma_a = 0$ приближенно равно $\frac{A_1}{|\varphi_0|} \approx \frac{\bar{b}_1}{1 - 1/k^2}$. В рассматриваемом случае коэффициент динамичности системы [15] $1/(1 - k^{-2})$ меняется приблизительно от 1.5 до 3.5. Тогда с учетом возможных значений \bar{b}_1 можно утверждать, что существуют орбиты, для которых амплитуда вынужденных колебаний больше угла смещения. Более того, можно утверждать, что для спутников с отношением моментов инерции I , близким к 0.5, амплитуда вынужденных колебаний может превышать абсолютную величину угла смещения в несколько раз.

ВЫВОДЫ

Предложена модель динамики спутника в плоскости круговой орбиты с учетом основных переменных составляющих аэродинамического момента. Построено квазистатическое решение, определяющее смещение продольной оси спутника относительно местной вертикали при постоянной, равной средней по орбите, плотности атмосферы. Получены оценки угла смещения в зависимости от безразмерного коэффициента, характеризующего отношение гравитационного и аэродинамического моментов.

Показано, что малые колебания спутника описываются уравнениями типа Хилла с периодической правой частью. Построено приближенное аналитическое решение малых колебаний при отсутствии резонансов и показано, что амплитуда вынужденных колебаний в зависимости от частоты собственных колебаний системы может как увеличиваться, так и уменьшаться относительно амплитуды приведенного аэродинамического момента.

Показано, что амплитуда вынужденных колебаний, обусловленная переменностью плотности атмосферы, может быть в несколько раз большей угла смещения, зависящего от среднего значения плотности атмосферы на орбите.

Проведен анализ возможности возникновения резонансов и показано, что в системе может наблюдаться параметрический резонанс, обусловленный близостью удвоенной частоты собственных колебаний с утроенной частотой орбитального движения.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 09-01-00384-а)

Библиографический список

1. Сарычев В. А. Вопросы ориентации искусственных спутников. М.: ВИНТИ, 1978. 223 с.
2. Сарычев В. А., Мирер С. А., Дегтярев А. А., Дуарте Е. К. Исследование положений равновесия спутника, подверженного действию гравитационного и аэродинамического моментов. Препринты ИПМ им. М. В. Келдыша РАН. М., 2004.
3. Ковтуненко В. М., Камеко В. Ф., Яскевич Э. П. Аэродинамика орбитальных космических аппаратов. Киев: Наук. думка, 1977. 156 с.
4. Сарычев В. А., Сазонов В. В. Влияние сопротивления атмосферы на одноосную гравитационную ориентацию искусственного спутника // Космические исследования. 1982. Т. 20, № 5. С. 659–673.
5. Сазонов В. В. Об одном механизме потери устойчивости режима гравитационной ориентации спутника // Космические исследования. 1989. Т. 27, № 6. С. 836–848.
6. Басс В. П., Петрушенко Н. В., Стасенко С. Т. Анализ аэродинамических возмущений, действовавших на космический аппарат «Океан-О» в условиях его эксплуатации // Техническая механика. 2004. Вып. 1. С. 86–95.
7. Маслова А. И., Пироженко А. В. Изменения плотности атмосферы при движении космических аппаратов на низких околоземных орбитах // Космична наука і технологія. 2009. Т. 15, № 1. С. 13–18.
8. Маслова А. И., Пироженко А. В. Аппроксимация момента аэродинамических сил, действующих на космический аппарат с гравитационной системой стабилизации // Техническая механика. 2008. Вып. 1. С. 9–20.
9. Белецкий В. В. Движение искусственного спутника относительно центра масс. М.: Наука, 1965. 416 с.
10. Абалакин В. К., Аксенов Е. П., Гребенников Е. А., Демин В. Г., Рябов Ю. А. Справочное руководство по небесной механике и астродинамике. М.: Наука, 1976. 864 с.
11. ГОСТ Р 25645.166–2004. Атмосфера Земли верхняя. Модель плотности для баллистического обеспечения полетов искусственных спутников Земли. М.: ИПК Изд-во стандартов, 2004. 24 с.
12. Горяченко В. Д. Элементы теории колебаний. М.: Высш. шк., 2001. 395 с.
13. Кильчевский Н. А. Курс теоретической механики: в 2 т. Т. 1. Кинематика, статика, динамика. М.: Наука, 1972. 456 с.
14. Алпатов А. П., Белецкий В. В., Драновский В. И., Закржевский А. Е., Пироженко А. В., Трогер Г., Хоро-



шилов В. С. Динамика космических систем с тросовыми и шарнирными соединениями. Ижевск: Регулярная и хаотическая динамика, 2007. 558 с.

15. Пановко Я. Г. Введение в теорию механических колебаний. М.: Наука, 1991. 256 с.

УДК 62.534(031)

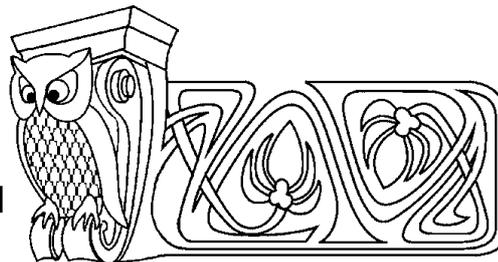
ПОСТРОЕНИЕ И СТАБИЛИЗАЦИЯ ПРОГРАММНЫХ ДВИЖЕНИЙ НЕАВТОНОМНЫХ ГАМИЛЬТОНОВЫХ СИСТЕМ

С. П. Безгласный, Е. В. Куркина

Самарский государственный аэрокосмический университет им. акад. С.П. Королева, кафедра теоретической механики
E-mail: bezglasnsp@rambler.ru, ekaterina.kurkina@mail.ru

Решена задача о построении асимптотически устойчивых произвольно заданных программных движений неавтономной гамильтоновой системы. Решение получено синтезом активного программного управления, приложенного к системе, и стабилизирующего управление по принципу обратной связи. Управление построено в виде точного аналитического решения в классе непрерывных функций. Задача решена на основе прямого метода Ляпунова теории устойчивости с использованием функции Ляпунова со знакопостоянными производными. В качестве примеров решены задачи о синтезе и стабилизации программных движений однородного стержня переменной длины и математического маятника переменной длины во вращающейся плоскости.

Ключевые слова: гамильтониан, неавтономная система, программное движение, функция Ляпунова.



Construction and Stabilization Program Motions of Nonautonomous Hamiltonian Systems

S. P. Bezglasnyi, E. V. Kurkina

Samara State Aerospace University named after academician S.P. Korolyov, Chair of Theoretical Mechanics
E-mail: bezglasnsp@rambler.ru, ekaterina.kurkina@mail.ru

We consider program motion of Hamiltonian system and solve the problem of construction asymptotically stability programm motion. The programm motion can be any function. Control is received in the method and the method of limiting functions and systems. In this case we use the Lyapunov's functions having constant signs derivatives. The following examples are considered: stabilization of program motions of homogeneous rod of variable length and stabilization of program motions of mathematical pendulum variable length in the rotation plane.

Key words: Hamiltonian, nonautonomous system, program motion, Lyapunov's function.

ВВЕДЕНИЕ

Задачи об управляемых программных движениях механических систем являются актуальными и привлекают внимание многих исследователей. Построение и исследование свойств и условий устойчивости таких движений рассматривались в работах многих ученых, например [1–4].

В данной работе ставится и решается задача об определении управления, реализующего и стабилизирующего произвольные заданные движения механической гамильтоновой системы. Решение задачи сводится к исследованию нулевого решения неавтономной системы и проводится на основе прямого метода Ляпунова [5]. Метод предельных систем [6] и его модификация [7] позволяют при использовании функций Ляпунова со знакопостоянными производными строить искомое управление в замкнутой аналитической форме в классе непрерывных функций.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассматривается управляемая механическая система, движение которой описывается уравнениями Гамильтона:

$$\begin{cases} \frac{dq}{dt} = \frac{\partial H(t, q, p)}{\partial p} + u, \\ \frac{dp}{dt} = -\frac{\partial H(t, q, p)}{\partial q} + v, \end{cases} \quad (1)$$

где $q = (q_1, \dots, q_n)^T$ — n -вектор обобщенных координат в действительном линейном пространстве R^n с нормой $\|q\|$, $p = (p_1, \dots, p_n)^T$ — n -вектор обобщенных моментов, $p \in R^n$ с нормой $\|p\|$ и $H(t, q, p)$ — гамильтониан системы, u, v — силы управляющих воздействий.

Приведем постановку и решение задачи о стабилизации программных движений системы, которая состоит в следующем: для выбранного произвольного движения механической системы надо