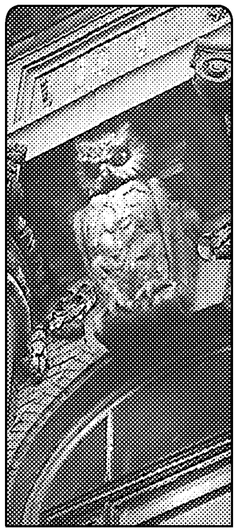
МАТЕМАТИКА



НАУЧНЫЙ ОТДЕЛ

УДК 517.927

О ДИФФЕРЕНЦИАЛАХ СТИЛТЬЕСА НА ВРЕМЕННЫХ ШКАЛАХ

Ж.И. Бахтина

Воронежский государственный университет,
кафедра математического анализа
E-mail: Ioanna83@mail.ru

В данной работе к теории динамических уравнений на временных шкалах применяется метод дифференциала Стилтьеса, предложенный Ю.В. Покорным. Оказалось возможным поставить эту теорию на серьезную математическую основу.

Ключевые слова: динамические уравнения, временные шкалы, дырка, левый край дырки, правый край дырки, дельта-производная, опережающий аргумент.

On Stilties Differential on Time Scales

Zh.I. Bakhtina

Voronezh State University,
Chair of Mathematical Analysis
E-mail: Ioanna83@mail.ru

In this paper we apply the method of Stilties differentials offered by U.V. Pokornyi to the theory of Dynamic Equations on Time Scales. It's possibly to put this theory on serious mathematical basis.

Key words: dynamic equations, time scales, hole, left edge of the hole, right edge of the hole, delta-derivative, outstripping argument.

В работе метод дифференциала Стилтьеса, предложенный Ю.В. Покорным [1], распространяется на так называемые динамические уравнения вида

$$(p(t)x^{\triangle}(t))^{\triangle} + q(t)x(\sigma(t)) = 0, \tag{1}$$

где $\triangle$-производная означает

$$x^{\triangle}(t_0) = \lim_{s \to t_0} \frac{x(\sigma(t_0)) - x(s)}{\sigma(t_0) - s},$$

а через $\sigma(t)$ обозначено: $\sigma(t) := inf\{s \in \mathbb{T} : s > t\}$.

Теория уравнений (1) на протяжении нескольких десятилетий является предметом бурного внимания англоязычных авторов [2–7]. В этой теории под *временной шкалой* $\mathbb{T}$ понимается произвольное замкнутое множество из $\mathbb{R}$, так что аргументы решения уравнения (1) принадлежат заведомо несвязному множеству. Если $\mathbb{T}$ связно, то уравнение (1) совпадает с обычным:

$$(px')'(t) + q(t)x(t) = 0. \tag{2}$$

В связи с разрывностью аргумента у решения уравнения (1) Ю.В. Покорным была высказана гипотеза о возможности погружения этой науки, развитой в работах [2–7] (мы эту науку называем [ДУВШ] — аббревиатура динамических уравнений на временных шкалах), в систему стандартных представлений и методов современного анализа. Существующие здесь препятствия — это очевидная аномалия уравнения (1) (помимо разрывности области определения) — необычность определения производной и присутствие в уравнении (1) эффекта опережения, так как аргумент решения во втором слагаемом имеет вид $\sigma(t)$, причем если $\sigma(t)$ не совпадает с t, то наверняка $\sigma(t)$ превосходит t.

Дифференциал Стилтьеса, введенный в [1], облегчает описание и изучение дифференциальных уравнений вида (2) с существенными особенностями в коэффициентах, когда, например, $q(t)$ может содержать компоненты типа δ-функций и когда, строго говоря, при отсутствии особенностей на концах, уравнение (2) допускает запись в виде

$$(p(t)\frac{d}{dt}x(t))' + Q'(t)x(t) = 0,$$

где $\frac{d}{dt}$ — обычная производная, а штрихи являются символами обобщенных производных. При этом $Q(t)$ — функция ограниченной вариации. Последнее уравнение с помощью дифференциала Стилтьеса допускает перезапись в виде

$$D(p(t)\frac{d}{dt}x(t)) + x(t)DQ(t) = 0,$$

что оказывается адекватным следующему интегродифференциальному уравнению, имеющему природу, аналогичную обыкновенному дифференциальному уравнению:

$$(pu')(x) - (pu')(0) + \int\limits_0^x u dQ = \int\limits_0^x dF. \tag{3}$$

Оказывается верна следующая теорема 1.

Теорема 1. *Пусть для уравнения* (1) *выполняются допустимые условия [ДУВШ]. Тогда существуют функции $P(t)$ и $Q(t)$ с ограниченным изменением на $\mathbb{R}$ и такие, что каждому из допустимых решений $x(t)$ уравнения* (1) *соответствует определенное и непрерывное на всей оси $\mathbb{R} = (-\infty, \infty)$ решение $\hat{x}(t)$ уравнения*

$$[Px']_\alpha^\beta + \int\limits_\alpha^\beta x(t)dQ(t) = 0, \tag{4}$$

совпадающее с $x(t)$ на шкале $\mathbb{T}$.

В приведенной формулировке допустимыми условиями на коэффициенты из [ДУВШ] мы называем типичные для этой теории предположения о непрерывности $p(t), q(t)$. О необходимости наличия у $p(t)$ каких-либо производных в [ДУВШ] не упоминается. Далее, в [ДУВШ] не обсуждается и вопрос о существовании решения. Просто предполагается, что рассматриваемые решения имеют непрерывные как первую, так и вторую производные.

Дополнение $\mathbb{W}$ шкалы $\mathbb{T}$ до $\mathbb{R}$ является открытым множеством и потому является объединением непересекающихся интервалов (α, β). Каждый из таких интервалов (α, β) мы называем для удобства *дыркой* в $\mathbb{T}$. Множество левых краев дырок обозначим через $\mathfrak{N}$.

Лемма 1. *Для того чтобы интервал (α, β) был дыркой в $\mathbb{T}$, необходимо и достаточно, чтобы $\beta = \sigma(\alpha)$.*

Сформулированная теорема 1 означает, что уравнение (1) может иметь разумное с точки зрения обычного дифференцирования решение, допускающее непрерывное расширение на всю ось. При этом коэффициенты $P(t)$ и $Q(t)$ могут быть всего лишь суммируемыми. Соответствующее расширяющее уравнение (4) соотносится с уравнением (1) с помощью равенства вида

$$Q(t) = \int\limits_\alpha^t q_0 ds + \sum_{\tau\in\mathfrak{N}, \tau\le t} q(\tau)\theta(t - \sigma(\tau)), \tag{5}$$

где $q_0 = q(t)$ при $t = \sigma(t)$ и $q_0 \equiv 0$ на $\mathbb{W}$, $\theta(t)$ — функция Хевисайда.

Последнее представление показывает, что исходное в [ДУВШ] уравнение (1) не явно содержит сингулярные особенности (как δ-функции в коэффициенте q уравнения (2)). Эти особенности, порожденные левыми краями дырок, в теории [ДУВШ] оказываются незамеченными. Кроме того, понятийная среда, создаваемая в [ДУВШ] для преодоления нестандартности этой теории, приводит к невообразимо сложной технологии анализа, позволяющей добиться некоторых асимптотических приближений решений (при $t \to \infty$).

Основой доказательства теоремы 1 является расширение пространства допустимых решений. На временную шкалу за счет компактности каждого ее ограниченного множества легко переносятся основные факты теории непрерывных на отрезке функций. Следуя классическим идеям, мы через $\operatorname{Var} x(t)$ на промежутке $[\alpha, \beta]$ обозначаем $\sup \sum\limits_{k=1}^{n} |x_{k+1}(t) - x_k(t)|$, где супремум берется по всем «разбиениям» $t_1 < t_2 < \ldots < t_n$ из $[\alpha, \beta] \bigcap \mathbb{T}$. Мы рассматриваем функции, каждая из которых имеет локально ограниченную вариацию, т.е. ограниченную на каждом ограниченном сегменте $[\alpha, \beta] \subset \mathbb{T}$. Для таких функций справедлив аналог теоремы Жордана, а именно

Лемма 2. *Для любой функции $x(t)$ с локально ограниченной на $\mathbb{T}$ вариацией существуют неубывающие функции $u(t)$ и $v(t)$, для которых (локально на $\mathbb{T}$) $x(t) = u(t) - v(t)$ (локально).*

Обозначим через AC множество функций, абсолютно непрерывных на $\mathbb{T}$, и через EAC - множество функций, у каждой из которых обычная первая производная имеет ограниченную вариацию на $\mathbb{T}$.

Доказательство теоремы 1 основано на расширении пространства EAC до множества функций $\mathbb{E}^0_{\mathbb{T}}$, сужение каждой из которых на $\mathbb{T}$ принадлежит EAC, а на каждой из *дырок* эти функции линейны. Соответствующее расширение $x(t)$ из EAC в $\mathbb{E}^0_{\mathbb{T}}$ мы обозначаем через $\hat{x}$.

Лемма 3. *Для того чтобы определенная на $\mathbb{T}$ функция $x(t)$ с абсолютно непрерывной производной принадлежала EAC, необходимо и достаточно, чтобы ее соответствующее линейчатое продолжение $\hat{x}(t)$ было абсолютно непрерывным и его обычная вторая производная имела локально ограниченную вариацию на $\mathbb{T}$.*

Мы не останавливаемся на доказательствах приведенных лемм, поскольку они проводятся совершенно стандартными методами, хотя и не совсем в стандартных ситуациях. Эти леммы позволяют установить следующий результат, усиливающий теорему 1:

Теорема 2. *Если P и Q имеют ограниченные вариации, то в пространстве $\mathbb{E}^0_{\mathbb{T}}$ существует решение задачи* (4)*, которое на $\mathbb{T}$ совпадает с обобщенным решением уравнения* (1).

Здесь мы под обобщенным решением уравнения (1) понимаем функцию $x(t)$. $(px^{\triangle})^{\triangle}$ в каждом левом краю *дырки* оказывается второй правой обычной производной, и при этом при $t = \alpha - 0$ (α — левый край) (1) адекватно обыкновенному уравнению вида (2).

Автор выражает благодарность Ю.В.Покорному за постановку задачи, М.Б. Зверевой и С.А. Шаброву — за полезные советы.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (*проект* 07-01-00397).

Библиографический список

1. *Покорный Ю.В., Зверева М.Б., Шабров С.А.* Осцилляционная теория Штурма – Лиувилля для импульсных задач // Успехи мат. наук. 2008. Т. 63, вып. 1(379). С. 111–154.

2. *Бодин С., Бохнер М., Лутц Д.* Асимптотическое поведение решений динамических уравнений // Совр. мат. Фундаментальные направления. 2003. Т. 1. С. 30–39.

3. *Saker S.H.* Oscillation of Second-Order Forced Nonlinear Dynamic Equations on Time Scales // Electronic J. of Qualitative Theory of Differential Equations. 2005. № 23. P. 1–17.

4. *Hilger S.* Analysis on measure chains — a unified approach to continuous and discrete calculus // Results Math. 1990. V. 18. P. 18–56.

5. *Bohner M., Peterson A.* Dynamic Equations on Time Scales: an Introduction with Applications. Boston: Birkhäuser Boston Inc., 2001. 358 c.

6. *Dosly O., Hilger S.* A necessary and sufficient condition for oscillation of the Sturm Liouville dynamic equation on time scales // J. Comp. Appl. Math. 2002. V. 141. P. 147–158.

7. *Erbe L., Peterson A.* Riccati equations on a measure chain // Dynamic systems and applications 3 (Atlanta, GA, 1999), Dynamic, Atlanta, GA, 2001. P. 193–199.