



МЕХАНИКА

УДК 539.3

СРАВНИТЕЛЬНЫЙ АНАЛИЗ РАСЧЕТА ПРОЧНОСТИ И УСТОЙЧИВОСТИ ПОДКРЕПЛЕННЫХ ОБОЛОЧЕК НА ОСНОВЕ ПК ОБОЛОЧКА И ПК ANSYS

Д.А. Баранова, А.Л. Волынин, В.В. Карпов

Санкт-Петербургский государственный
архитектурно-строительный университет,
кафедра прикладной математики и информатики
E-mail: vvkarpov@lan.spbgasu.ru

Для обоснования эффективности использования ПК ОБОЛОЧКА для исследования прочности и устойчивости подкрепленных оболочек дается сравнение полученных результатов расчета с результатами, найденными с использованием ПК ANSYS.

Ключевые слова: устойчивость оболочек, программный комплекс ОБОЛОЧКА, программный комплекс ANSYS.

The Comparative Analysis of Calculation of Durability and Stability of the Supported Shells on the Basis of the PC OBOLOCHKA and PC ANSYS

D.A. Baranova, A.L. Volynin, V.V. Karpov

Sanct-Petersburg State Architectural- University,
Chair of Applied Mathematics and Informatics
E-mail: vvkarpov@lan.spbgasu.ru

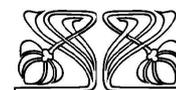
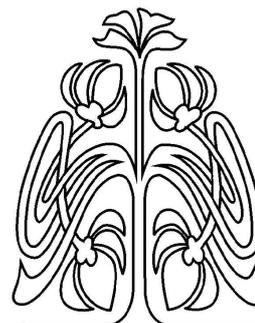
To substantiate the efficiency of the PC OBOLOCHKA use for research of durability and stability of the supported shells the article compares the received results of calculation with the results found through PC ANSYS use.

Key words: stability of the shells, PC OBOLOCHKA, PC ANSYS.

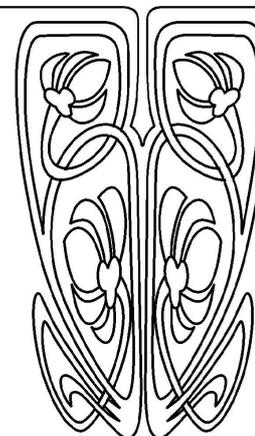
Проведение комплексных исследований подкрепленных оболочек по наиболее точным математическим моделям позволит аргументированно назначать коэффициент запаса прочности, что будет способствовать уменьшению материалоемкости конструкции и снижению ее себестоимости.

Необходимость разработки программного комплекса расчетов прочности и устойчивости подкрепленных оболочек обусловлена тем, что современные программные комплексы расчета строительных конструкций, рассчитанные на решение широкого круга задач, не могут с достаточной степенью точности проводить исследование устойчивости подкрепленных оболочек с учетом различных свойств материала.

ПК ОБОЛОЧКА, разработанный на кафедре прикладной математики и информатики Санкт-Петербургского государственного архитектурно-строительного университета, предназначен для исследования прочности и устойчивости оболочечных конструкций (плоские оболочки прямоугольного плана, цилиндрические, конические, сферические, тороидальные оболочки), подкрепленных ребрами жесткости, проходящими по координатным линиям, с учетом не-



НАУЧНЫЙ
ОТДЕЛ





линейных факторов (геометрической и физической нелинейности, ползучести материала). Используются теория оболочек, учитывающая поперечные сдвиги, сдвиговую и крутильную жесткости ребер.

ПК ОБОЛОЧКА позволяет исследовать местную и общую потерю устойчивости, симметричные и несимметричные формы потери устойчивости, находить нагрузку, соответствующую точкам бифуркации.

Основное применение ПК ОБОЛОЧКА — научные исследования и учебный процесс, хотя он может найти применение и в расчетах строительных конструкций при их проектировании.

Математическая модель деформирования подкрепленных оболочек представляет собой функционал полной энергии деформации оболочки в соответствии с поставленной задачей исследования (линейно-упругая, нелинейно-упругая, с учетом ползучести материала). К соответствующему функционалу применяется метод Рунге с последующим решением нелинейных систем алгебраических уравнений методом итераций или метод наискорейшего спуска при дискретной аппроксимации искомых функций.

Нагрузка, соответствующая максимуму кривой «нагрузка – прогиб» принимается за критическую нагрузку. При этой нагрузке происходит скачкообразный переход на новое равновесное состояние (оболочка прохлопывается).

Составлено несколько программных модулей, подробное описание которых можно найти в работе [1].

Функционал полной энергии деформации ребристой оболочки имеет вид:

– при линейно-упругом деформировании (учитывается геометрическая нелинейность)

$$\Theta = \Theta_y, \tag{1}$$

– при нелинейно-упругом деформировании (учитывается геометрическая и физическая нелинейность на основе деформационной теории пластичности [2, 3])

$$\Theta = \Theta_y - \Theta_{\text{п}}, \tag{2}$$

– при учете ползучести материала (на основе линейной теории наследственной ползучести [2, 4])

$$\Theta = \Theta_y - \Theta_{\text{с}}. \tag{3}$$

Здесь

$$\begin{aligned} \Theta_y = & \frac{E}{2(1-\mu^2)} \int_0^a \int_0^b \left\{ (h + \bar{F})(\varepsilon_x^2 + 2\mu\varepsilon_x\varepsilon_y + \varepsilon_y^2 + \mu_1\gamma_{xy}^2 + \mu_1k(\psi_x - \theta_1)^2 + \mu_1k(\psi_y - \theta_2)^2) + \right. \\ & + 2\bar{S}(\varepsilon_x\chi_1 + \mu\varepsilon_x\chi_2 + \varepsilon_y\chi_2 + \mu\varepsilon_y\chi_1 + 2\mu_1\gamma_{xy}\chi_{12}) + \left(\frac{h^3}{12} + \bar{J} \right) (\chi_1^2 + 2\mu\chi_1\chi_2 + \chi_2^2 + 4\mu_1\chi_{12}^2) - \\ & \left. - \frac{2(1-\mu^2)}{E} (P_xU + P_yV + qW) \right\} AB \, dx \, dy; \tag{4} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Theta_{\text{п}} = & \frac{E}{2(1-\mu^2)} \int_0^a \int_0^b \left\{ \varepsilon_x [I_1(\varepsilon_x + \mu\varepsilon_y) + I_2(\chi_1 + \mu\chi_2)] + \chi_1 [I_2(\varepsilon_x + \mu\varepsilon_y) + I_3(\chi_1 + \mu\chi_2)] + \right. \\ & + \varepsilon_y [I_1(\varepsilon_y + \mu\varepsilon_x) + I_2(\chi_2 + \mu\chi_1)] + \chi_2 [I_2(\varepsilon_y + \mu\varepsilon_x) + I_3(\chi_2 + \mu\chi_1)] + \mu_1\gamma_{xy} [I_1\gamma_{xy} + 2I_2\chi_{12}] + \\ & \left. + 2\mu_1\chi_{12} [I_2\gamma_{xy} + 2I_3\chi_{12}] + \mu_1k^2 I_1(\psi_x - \theta_1)^2 + \mu_1k^2 I_1(\psi_y - \theta_2)^2 \right\} AB \, dx \, dy; \tag{5} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Theta_{\text{с}} = & \frac{E}{2(1-\mu^2)} \int_0^a \int_0^b 2 \left\{ \varepsilon_x(t_k) \sum_{i=1}^k [(h + \bar{F})(\varepsilon_x(t_{i-1}) + \mu\varepsilon_y(t_{i-1})) + \bar{S}(\chi_1(t_{i-1}) + \mu\chi_2(t_{i-1}))] \bar{R}_1 + \right. \\ & + \chi_1(t_k) \sum_{i=1}^k \left[\bar{S}(\varepsilon_x(t_{i-1}) + \mu\varepsilon_y(t_{i-1})) + \left(\frac{h^3}{12} + \bar{J} \right) (\chi_1(t_{i-1}) + \mu\chi_2(t_{i-1})) \right] \bar{R}_1 + \\ & \left. + \varepsilon_y(t_k) \sum_{i=1}^k [(h + \bar{F})(\varepsilon_y(t_{i-1}) + \mu\varepsilon_x(t_{i-1})) + \bar{S}(\chi_2(t_{i-1}) + \mu\chi_1(t_{i-1}))] \bar{R}_1 + \right. \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
 & +\chi_2(t_k) \sum_{i=1}^k \left[\bar{S}(\varepsilon_y(t_{i-1}) + \mu\varepsilon_x(t_{i-1})) + \left(\frac{h^3}{12} + \bar{J} \right) (\chi_2(t_{i-1}) + \mu\chi_1(t_{i-1})) \right] \bar{R}_1 + \\
 & \quad + \mu_1 \gamma_{xy}(t_k) \sum_{i=1}^k [(h + \bar{F})\gamma_{xy}(t_{i-1}) + 2\bar{S}\chi_{12}(t_{i-1})] \bar{R}_2 + \\
 & \quad + 2\mu_1 \chi_{12}(t_k) \sum_{i=1}^k \left[\bar{S}\gamma_{xy}(t_{i-1}) + 2 \left(\frac{h^3}{12} + \bar{J} \right) \chi_{12}(t_{i-1}) \right] \bar{R}_2 + \\
 & \quad + k\mu_1 (\psi_x(t_k) - \theta_1(t_k)) \sum_{i=1}^k (h + \bar{F})(\psi_x(t_{i-1}) - \theta_1(t_{i-1})) \bar{R}_2 + \\
 & \quad + k\mu_1 (\psi_y(t_k) - \theta_2(t_k)) \sum_{i=1}^k (h + \bar{F})(\psi_y(t_{i-1}) - \theta_2(t_{i-1})) \bar{R}_2 \} AB \, dx \, dy. \tag{6}
 \end{aligned}$$

В выражениях (4)–(6) $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \gamma_{xy}$ — деформации в координатной поверхности оболочки, за которую принята срединная поверхность обшивки [5]; $\chi_1, \chi_2, \chi_{12}$ — функции изменения кривизны и кручения [5]; U, V, W — перемещения точек координатной поверхности вдоль осей x, y, z ; ψ_x, ψ_y — функции, характеризующие поперечные сдвиги в соответствующих плоскостях; A, B — параметры Ляме; E, μ — модуль Юнга и коэффициент Пуассона материала; P_x, P_y, q — составляющие нагрузки; h — толщина оболочки; a, b — предельные значения координат x, y ; $I_k = \int_{-h/2}^{h/2+H} \omega(\varepsilon_i) z^{k-1} dz$, $k = 1, 2, 3$, при этом секущий модуль принимается в виде $E_C = E(1 - \omega(\varepsilon_i))$; $\bar{R}_1 = R_1(t_k, t_{i-1})\Delta t$, $\bar{R}_2 = R_2(t_k, t_{i-1})\Delta t$, где $R_1(t, \tau), R_2(t, \tau)$ — функции влияния (ядра релаксации для соответствующего материала).

Высота и расположение ребер задается функцией

$$H(x, y) = \sum_{j=1}^m h^j \bar{\delta}(x - x_j) + \sum_{i=1}^n h^i \bar{\delta}(y - y_i) - \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m h^{ij} \bar{\delta}(x - x_j) \bar{\delta}(y - y_i),$$

где h^i, h^j — высота ребер параллельных осям y и x соответственно; $h^{ij} = \min\{h^i, h^j\}$; $\bar{\delta}(x - x_j), \bar{\delta}(y - y_i)$ — единичные столбчатые функции, равные единице в местах присоединения ребер и равные нулю вне таких мест. Контакт ребра и обшивки происходит по полосе.

Таким образом, толщина всей конструкции равна $h + H$. Если $H > 0$, то оболочка подкреплена ребрами или накладками, а если $H < 0$, то она ослаблена вырезами;

$$\bar{F} = \int_{h/2}^{h/2+H} dz = H, \quad \bar{S} = \int_{h/2}^{h/2+H} z \, dz = \frac{H(h+H)}{2}, \quad \bar{J} = \int_{h/2}^{h/2+H} z^2 \, dz = 0.25 h^2 H + 0.5 h H^2 + \frac{1}{3} H^3.$$

Программа исследования устойчивости оболочек вращения разработана на языке C# Д.А. Барановой. Использован метод LBFGS (усовершенствованный метод наискорейшего спуска), для аппроксимации искомым функций используются NURBS (дискретная аппроксимация). Программа исследования устойчивости пологих оболочек разработана на языке Delphi Р.Т. Беркалиевым, аппроксимирующие функции представляют собой синусы различных аргументов. Нагрузка может быть произвольной.

Программный комплекс снабжен удобным интерфейсом. При открытии программы и создании нового проекта задаются вид оболочки, ее размеры, размеры ребер, нагрузка, материал оболочки, задача исследования. Подготовительный процесс занимает не более 5 минут.

Во время расчета можно просматривать промежуточные результаты: графики перемещений, напряжений, зависимостей прогиба от нагрузки и времени. На графиках перемещений верхнее значение на вертикальной оси является максимальным значением перемещений.

После того как задача решена, окончательные результаты можно просмотреть и вывести на печать.

Программный комплекс ANSYS обладает широкими возможностями в области решения сложных проблем механики деформируемого твердого тела, теплообмена, гидродинамики и электромагнитных полей, а также адаптированностью программы к конечному пользователю [6].



К сожалению, отсутствует описание математической модели деформирования оболочек. Алгоритм исследования устойчивости оболочек основан на МКЭ.

Работу в ANSYS целесообразно начинать с построения геометрической модели рассматриваемой системы (оболочки). Для проведения расчетов необходима 3D-модель конструкции, так как задание оболочки при помощи формул невозможно. Средства препроцессорного твердотельного моделирования программы ANSYS очень трудоемки и значительно уступают специально ориентированным CAD-системам. На создание одной расчетной модели, описывающей оболочку, уходит от одного до двух часов в случае, если пользователь знаком со средой ANSYS.

В качестве примера использования разработанного программного комплекса ОБОЛОЧКА ниже приведены результаты исследования устойчивости пологих ребристых оболочек прямоугольного плана, шарнирно-неподвижно закрепленных по контуру и находящихся под действием равномерно распределенной поперечной нагрузки q . Рассматриваются три вида оболочек с параметрами $a = b = 600h$. Для 1-го вида оболочек радиусы кривизны $R_1 = R_2 = 377.5h$, безразмерная кривизна $k_\xi = k_\eta = 953.64$ ($k_\xi = a^2/(R_1h)$), для 2 вида — $R_1 = R_2 = 755h$, $k_\xi = k_\eta = 476.82$, для 3 вида — $R_1 = R_2 = 1510h$, $k_\xi = k_\eta = 238.41$. Оболочки могут быть подкреплены различным числом ребер высотой $3h$ и шириной $2h$. Первое и последнее ребро в каждом направлении является контурным.

В табл. 1 представлены для некоторых материалов размерные критические нагрузки при удержании в разложении искомым функций 16-ти членов ($N = 16$). В скобках указаны значения нагрузок при потере прочности (на основе критерия Мизеса).

Таблица 1

Размерные критические нагрузки для некоторых материалов

k_ξ	Число ребер	$q_{кр}$, МПа, для соответствующего материала		
		Сталь, $E = 2.1 \cdot 10^5$ МПа	Технический титан, $E = 1.1 \cdot 10^5$ МПа	Оргстекло, $E = 0.033 \cdot 10^5$ МПа
953.64	0	4.86 (4.2)	2.552 (1.31)	0.076
	18	6.2 (4.3)	3.249 (1.32)	0.97
	36	7.178 (4.1)	3.763 (1.26)	0.114
476.82	0	0.641	0.335	0.001
	18	1.045	0.55 (0.53)	0.0167
	36	1.323	0.693 (0.52)	0.0208
238.41	0	0.096	0.05	0.0015
	18	0.19	0.1	0.003
	36	0.218	0.114	0.0033

При исследовании несимметричных форм потери устойчивости к нагрузке q добавляется возмущающая несимметричная нагрузка $q_{нху}$. При этом значения критических нагрузок понижается (на 20—30 %, если прогиб при возмущающей нагрузке составляет около $0.5h$).

Был проведен расчет с помощью ПК ANSYS для стальной оболочки вида 3. В табл. 2 представлены значения критической нагрузки (МПа), полученные при использовании ПК ANSYS ($q_{кр}^A$), с помощью ПК ОБОЛОЧКА ($q_{кр}$) и при наличии несимметричных возмущений ($q_{кр}^H$) при различном числе подкрепляющих оболочку ребер.

Таблица 2

Зависимость критических нагрузок $q_{кр}^A$ и $q_{кр}^H$ от числа ребер

Число ребер	$q_{кр}^A$	$q_{кр}$	$q_{кр}^H$
0	0.068	0.096	0.067
18	0.161	0.19	0.152
36	0.273	0.218	0.196

Как видно из табл. 2, расхождение в критических нагрузках составило для оболочки без ребер — 0 %, для оболочки, подкрепленной 18-ю ребрами, — 6 %, для оболочки, подкрепленной 36-ю ребрами, — 39 %. Такое расхождение объясняется тем, что в ПК ANSYS

ребра вводятся как одномерные элементы. Введение ребер по линиям, как принято в ANSYS, без учета их взаимодействия с обшивкой по полосе, сдвиговой и крутильной жесткости ребер, приводит к тому, что жесткость конструкции завышается, и критические нагрузки получаются завышенными. Распределение прогибов и интенсивности напряжений по полю оболочки качественно совпадают с найденными по ПК ОБОЛОЧКА.



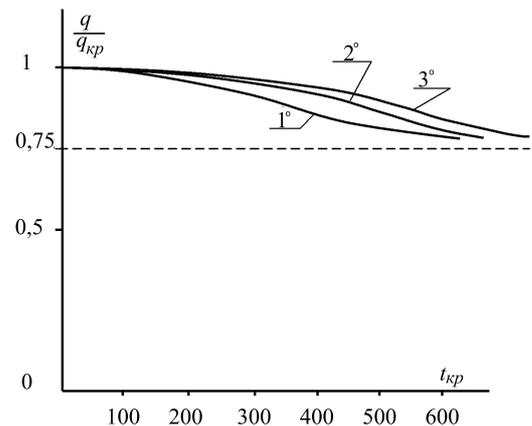
Исследование устойчивости при учете геометрической и физической нелинейности с помощью ПК ОБОЛОЧКА показали, что для гладкой оболочки вида 3 снижения критической нагрузки не наблюдается (оболочка теряет устойчивость, находясь в упругой зоне). Для оболочки, подкрепленной 18-ю и 36-ю ребрами, снижение критической нагрузки составило соответственно 3 и 4%. Расчет с помощью ПК ANSYS показал те же результаты.

При учете ползучести материала деформации со временем при постоянной нагрузке начинают расти, при этом оболочка может потерять устойчивость. На рисунке показаны кривые снижения критической нагрузки в результате развития ползучести в материале оболочки, найденные с помощью ПК ОБОЛОЧКА. Номер кривой означает вариант оболочки, индекс 0 означает, что оболочка не подкреплена ребрами.

Как видно из рисунка, чем больше кривизна оболочки, тем круче кривая снижения критической нагрузки, т. е. быстрее развивается ползучесть.

В ПК ANSYS построение графиков снижения критической нагрузки со временем требует самостоятельных действий пользователя, хотя возможности исследования ползучести в материале оболочек гораздо шире, так как имеется возможность использования различных теорий ползучести.

Таким образом, ПК ОБОЛОЧКА позволяет исследовать прочность и устойчивость подкрепленных оболочек при учете различных свойств материала с достаточно высокой точностью, при этом он прост в использовании.



Кривые снижения критической нагрузки от ползучести материала для оболочек различной кривизны

Библиографический список

1. Карпов, В.В. Программный комплекс исследования устойчивости оболочек / В.В. Карпов, Д.А. Баранова, Р.Т. Беркалиев. – СПб.: СПбГАСУ, 2009. – 102 с.
2. Малинин Н.Н. Прикладная теория пластичности и ползучести / Н.Н. Малинин. – М.: Машиностроение, 1968. – 400 с.
3. Качанов, Л.М. Основы теории пластичности / Л.М. Качанов. – М.: Наука, 1969. – 420 с.
4. Ржаницын, А.Р. Строительная механика / А.Р. Ржаницын. – М.: Высшая школа, 1982. – 400 с.
5. Новожилов, В.В. Теория тонких оболочек / В.В. Новожилов. – Л.: Судпромиздат, 1962. – 431 с.
6. Каплун, А.Б. ANSYS в руках инженера: практическое руководство / А.Б. Каплун, Е.М. Морозов, М.А. Олферьева. – М.: Едиториал УРСС, 2003. – 272 с.

УДК 532.529.5

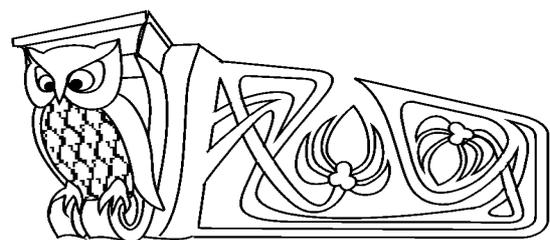
РАСПРОСТРАНЕНИЕ ВОЛН ДАВЛЕНИЯ В ПУЗЫРЬКОВЫХ ЗОНАХ КОНЕЧНЫХ РАЗМЕРОВ

М.Н. Галимзянов

Институт механики Уфимского научного центра РАН,
лаборатория дифференциальных уравнений механики
E-mail: monk@anrb.ru

Изучаются особенности эволюции волн в жидкости, содержащей область с пузырьками газа. Задача рассматривается с учетом двумерных эффектов. Представлены результаты исследований воздействия волнового импульса на твердую стенку, частично покрытую пузырьковой завесой.

Ключевые слова: волна давления, пузырьковая жидкость, пузырьковая область.



Propagation of Pressure Waves in Finite-Size Bubbles Zones

M.N. Galimzyanov

Institute of Mechanics, Ufa Science Center, RAS,
Laboratory of Differential Equations of Mechanics
E-mail: monk@anrb.ru

Peculiarities of pressure waves propagation in liquids with bubbly zones have been studied. The problem is studied taking into account two-dimensional effects. Results of the research of a wave impulse influence on the firm wall partially covered with a bubble screen are presented.

Key words: pressure wave, bubble liquid, bubble zone