шилов В. С. Динамика космических систем с тросовыми и шарнирными соединениями. Ижевск: Регулярная и хаотическая динамика, 2007. 558 с.

15. *Пановко Я. Г.* Введение в теорию механических колебаний. М.: Наука, 1991. 256 с.

УДК 62.534(031)

ПОСТРОЕНИЕ И СТАБИЛИЗАЦИЯ ПРОГРАММНЫХ ДВИЖЕНИЙ НЕАВТОНОМНЫХ ГАМИЛЬТОНОВЫХ СИСТЕМ

С. П. Безгласный, Е. В. Куркина

Самарский государственный аэрокосмический университет им. акад. С.П. Королева,
кафедра теоретической механики
E-mail: bezglasnsp@rambler.ru, ekaterina.kurkina@mail.ru

Решена задача о построении асимптотически устойчивых произвольно заданных программных движений неавтономной гамильтоновой системы. Решение получено синтезом активного программного управления, приложенного к системе, и стабилизирующего управление по принципу обратной связи. Управление построено в виде точного аналитического решения в классе непрерывных функций. Задача решена на основе прямого метода Ляпунова теории устойчивости с использованием функции Ляпунова со знакопостоянными производными. В качестве примеров решены задачи о синтезе и стабилизации программных движений однородного стержня переменной длины и математического маятника переменной длины во вращающейся плоскости.

Ключевые слова: гамильтониан, неавтономная система, программное движение, функция Ляпунова.

Construction and Stabilization Program Motions of Nonautonomous Hamiltonian Systems

S. P. Bezglasnyi, E. V. Kurkina

Samara State Aerospace University
named after academician S.P. Korolyov,
Chair of Theoretical Mechanics
E-mail: bezglasnsp@rambler.ru, ekaterina.kurkina@mail.ru

We consider program motion of Hamiltonian system and solve the problem of construction asymptotically stability programm motion. The programm motion can be any function. Control is received in the method and the method of limiting functions and systems. In this case we use the Lyapunov's functions having constant signs derivatives. The following examples are considered: stabilization of program motions of homogeneous rod of variable length and stabilization of program motions of mathematical pendulum variable length in the rotation plane.

Key words: Hamiltonian, nonautonomous system, program motion, Lyapunov's function.

ВВЕДЕНИЕ

Задачи об управляемых программных движениях механических систем являются актуальными и привлекают внимание многих исследователей. Построение и исследование свойств и условий устойчивости таких движений рассматривались в работах многих ученых, например [1–4].

В данной работе ставится и решается задача об определении управления, реализующего и стабилизирующего произвольные заданные движения механической гамильтоновой системы. Решение задачи сводится к исследованию нулевого решения неавтономной системы и проводится на основе прямого метода Ляпунова [5]. Метод предельных систем [6] и его модификация [7] позволяют при использовании функций Ляпунова со знакопостоянными производными строить искомое управление в замкнутой аналитической форме в классе непрерывных функций.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассматривается управляемая механическая система, движение которой описывается уравнениями Гамильтона:

$$\begin{cases} \dfrac{dq}{dt} = \dfrac{\partial H(t,q,p)}{\partial p} + u, \\ \dfrac{dp}{dt} = -\dfrac{\partial H(t,q,p)}{\partial q} + v, \end{cases} \tag{1}$$

где $q = (q_1, \dots, q_n)^T$ — n-вектор обобщенных координат в действительном линейном пространстве R^n с нормой $\|q\|$, $p = (p_1, \dots, p_n)^T$ — n-вектор обобщенных моментов, $p \in R^n$ с нормой $\|p\|$ и $H(t, q, p)$ — гамильтониан системы, u, v — силы управляющих воздействий.

Приведем постановку и решение задачи о стабилизации программных движений системы, которая состоит в следующем: для выбранного произвольного движения механической системы надо построить программное управляющее воздействие, реализующее это заданное движение, и синтезировать позиционное стабилизирующее управление, обеспечивающее асимптотическую устойчивость программного движения.

Введем следующее определение.

Определение. *Программным* (*желаемым*) *движением системы* назовем пару $p^* = p^*(t)$, $q^* = q^*(t)$, где $q^*(t)$ и $p^*(t)$ — ограниченные, дважды кусочно-непрерывно дифференцируемые n-мерные вектор-функции, описывающие некоторое заданное движение механической системы.

В общем случае функции $q^(t)$, $p^*(t)$ могут не являться решением системы (1). Поэтому сначала поставим и решим задачу о реализации программного движения $q^*(t)$, $p^*(t)$ системы (1).

2. ПРОГРАММНОЕ УПРАВЛЕНИЕ И УРАВНЕНИЯ В ОТКЛОНЕНИЯХ

Пусть необходимо, чтобы система совершала некоторое программное движение $(q^*(t), p^*(t))$. Добавим к правой части системы (1) управляющие силы вида u^p и v^p:

$$\begin{cases} \dot{q} = \dfrac{\partial H(t,q,p)}{\partial p} + u^p, \\ \dot{p} = -\dfrac{\partial H(t,q,p)}{\partial q} + v^p. \end{cases} \tag{2}$$

Подставляя программное движение в систему (1) с управляющими силами u^pи v^p, получим уравнения управляемого движения вида

$$\begin{cases} \dot{q}^* = \dfrac{\partial H(t,q^*,p^*)}{\partial p} + u^p, \\ \dot{p}^* = -\dfrac{\partial H(t,q^*,p^*)}{\partial q^*} + v^p. \end{cases} \tag{3}$$

Из системы (3) вычислим программное управление:

$$\begin{cases} u^p = \dot{q}^* - \dfrac{\partial H(t,q^*,p^*)}{\partial p_i}, \\ v^p = \dot{p}^* + \dfrac{\partial H(t,q^*,p^*)}{\partial q^*}. \end{cases} \tag{4}$$

Подставим (4) в систему (2):

$$\begin{cases} \dot{q} = \dfrac{\partial H(t,q,p)}{\partial p} + \dot{q}^* - \dfrac{\partial H(t,q^*,p^*)}{\partial p_i}, \\ \dot{p} = -\dfrac{\partial H(t,q,p)}{\partial q} + \dot{p}^* + \dfrac{\partial H(t,q^*,p^*)}{\partial q^*}. \end{cases} \tag{5}$$

Полученные уравнения (5) имеют решение, соответствующее выбранному программному движению $q^*(t), p^*(t)$. Программные движения могут быть неустойчивыми, т. е. нереализуемыми на практике. Исследуем его на устойчивость и стабилизируем в случае необходимости до асимптотической устойчивости.

Сведем решение задачи о стабилизации программных движений к задаче стабилизации нулевого решения неавтономной гамильтоновой системы. Это позволит применить к задаче о стабилизации программных движений методы и результаты, разработанные для исследования устойчивости и стабилизации нулевого положения равновесия неавтономных систем [7, 8].

Введем отклонения по правилу

$$\begin{cases} x = q - q^*(t), \\ y = p - p^*(t). \end{cases}$$

В силу линейности замены и линейности оператора дифференцирования структура уравнений Гамильтона при переходе к уравнениям в отклонениях не изменится.

Выпишем уравнения движения механической системы в отклонениях в виде системы уравнений Гамильтона. Уравнения (5) примут вид

$$\begin{cases} \dot{x} = \dfrac{\partial H(t, x+q^*(t), y+p^*(t))}{\partial y} - \dfrac{\partial H(t, q^*(t), p^*(t))}{\partial y}, \\ \dot{y} = -\dfrac{\partial H(t, x+q^*(t), y+p^*(t))}{\partial x} + \dfrac{\partial H(t, q^*(t), p^*(t))}{\partial x}. \end{cases} \tag{6}$$

В дальнейшем будем рассматривать классические натуральные системы, для которых гамильтониан имеет вид [9]

$$H(t, p, q) = \frac{1}{2} p^T A p + U(t, q), \tag{7}$$

где A — матрица коэффициентов квадратичной формы кинетической энергии. С учетом гамильтониана (7) уравнения возмущенного движения в отклонениях (6) запишутся в виде

$$\begin{cases} \dot{x} = (A - A^*)p^* + Ay, \\ \dot{y} = -\dfrac{1}{2} y^T \dfrac{\partial A}{\partial q} y - p^{*T} \dfrac{\partial A}{\partial q} y + \dfrac{1}{2} p^{*T} \left[\dfrac{\partial A^*}{\partial q^*} - \dfrac{\partial A}{\partial q}\right] p^* + \dfrac{\partial U^*}{\partial q^*} - \dfrac{\partial U}{\partial q}. \end{cases} \tag{8}$$

Обозначим

$$p^{*T} \frac{\partial A}{\partial q} = B(t, q), \qquad \frac{1}{2} p^{*T} \left[\frac{\partial A^*}{\partial q^*} - \frac{\partial A}{\partial q}\right] p^* + \frac{\partial U^*}{\partial q^*} - \frac{\partial U}{\partial q} = C_0(t, q).$$

Тогда систему (8) представим в виде

$$\begin{cases} \dot{x} = (A - A^*)p^* + Ay, \\ \dot{y} = -\dfrac{1}{2} y^T \dfrac{\partial A}{\partial q} y - By + C_0. \end{cases} \tag{9}$$

3. ПОСТРОЕНИЕ СТАБИЛИЗИРУЮЩЕГО УПРАВЛЕНИЯ

Пусть C — положительно определенная, неисчезающая, ограниченная матрица:

$$c_0 E \le C \le c_1 E \qquad (0 < c_0 < c_1 - \mathrm{const}),$$

где E — единичная матрица.

Рассмотрим положительно определенную по отклонениям x и y, допускающую бесконечно малый высший предел, функцию Ляпунова [10]:

$$V(x, y, t) = \frac{1}{2} y^T A y + x^T C x. \tag{10}$$

Полная производная функции Ляпунова (10) по времени будет иметь вид

$$\dot{V} = \left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)^T \dot{y} + \left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^T \dot{x} + \frac{\partial V}{\partial t}, \tag{11}$$

или

$$\dot{V} = -y^T \left[AB - \frac{1}{2}\frac{\partial A}{\partial t}\right] y + \frac{1}{2} x^T \frac{\partial C}{\partial t} x + y^T A C_0 + x^T C A y - \frac{1}{2} y^T A \left[y \frac{\partial A}{\partial q} y\right] +$$
$$+ \left(\frac{1}{2} y \frac{\partial A}{\partial x} y\right)^T A y + \left(\frac{1}{2} y \frac{\partial A}{\partial x} y\right)^T [(A - A^*)p^*] + (Cx)^T [(A - A^*)p^*].$$

Поставим и решим задачу о стабилизации программного движения $q^*(t)$, $p^*(t)$.

Определение. Управляющие воздействия $u^s = u^s(x, y, t)$ и $v^s = v^s(x, y, t)$ называются *стабилизирующими*, если они обеспечивают асимптотическую устойчивость невозмущенного движения $x = y = 0$ системы (9).

Постановка задачи о стабилизации: *определить стабилизирующие управления* $u^s = u^s(x, y, t)$ *и* $v^s = v^s(x, y, t)$, *при добавлении которых в систему* (9) *ее решение* $x = y = 0$ *становится асимптотически устойчивым.*

Выберем стабилизирующее управление в виде

$$u^s = -(A - A^*)p^*, \qquad v^s = -C_0 - Cx - A^{-1}Dy, \tag{12}$$

где $D = D(t)$ — симметричная, положительно определенная матрица размерности $n \times n$. Добавив силы (12) в систему (9), имеем уравнения управляемых движений:

$$\begin{cases} \dot{x} = Ay, \\ \dot{y} = -\dfrac{1}{2}y^T\dfrac{\partial A}{\partial q}y - By - Cx - A^{-1}Dy. \end{cases} \tag{13}$$

Тогда полная производная (11) от функции Ляпунова в силу системы (13) имеет вид

$$\dot{V} = -y^T\left[AB - \frac{1}{2}\frac{\partial A}{\partial t}\right]y + \frac{1}{2}x^T\frac{\partial C}{\partial t}x + y^TAC_0 + x^TCAy - \frac{1}{2}y^TA\left[y\frac{\partial A}{\partial q}y\right] +$$

$$+\left(\frac{1}{2}y\frac{\partial A}{\partial x}y\right)^TAy + y^TAu = -y^T\left[AB - \frac{1}{2}\frac{\partial A}{\partial t}\right]y + \frac{1}{2}x^T\frac{\partial C}{\partial t}x + y^TAC_0 +$$

$$+x^TCAy - \frac{1}{2}y^TA\left[y\frac{\partial A}{\partial q}y\right] + \left(\frac{1}{2}y\frac{\partial A}{\partial x}y\right)^TAy - y^TAC_0 - y^TACy - y^TDy =$$

$$= -y^T\left[AB - \frac{1}{2}\frac{\partial A}{\partial t}\right]y + \frac{1}{2}x^T\frac{\partial C}{\partial t}x - \frac{1}{2}y^TA\left[y\frac{\partial A}{\partial q}y\right] + \left(\frac{1}{2}y\frac{\partial A}{\partial x}y\right)^TAy - y^TDy.$$

Перепишем:

$$\dot{V} = -y^T\left[AB - \frac{1}{2}\frac{\partial A}{\partial t} + D\right]y + \frac{1}{2}x^T\frac{\partial C}{\partial t}x + N,$$

где обозначено

$$N = -\frac{1}{2}y^TA\left[y\frac{\partial A}{\partial q}y\right] + \left(\frac{1}{2}y\frac{\partial A}{\partial x}y\right)^TAy$$

— слагаемые старше второго порядка малости, ими можно пренебречь.

В итоге имеем

$$\dot{V} \cong -y^T\left[AB - \frac{1}{2}\frac{\partial A}{\partial t} + D\right]y + \frac{1}{2}x^T\frac{\partial C}{\partial t}x. \tag{14}$$

В качестве основных результатов о стабилизации программных движений гамильтоновых систем приведем следующие утверждения.

Утверждение 1. *Пусть матрицы A и C не зависят от t, т. е. выполнены условия*

$$\frac{\partial A}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial C}{\partial t} = 0.$$

Тогда управление (12) *стабилизирует программное движение $q^* = q^*(t)$, $p^* = p^*(t)$ при условии, что $D + AB$ — положительно определенная.*

Утверждение 2. *Пусть выполнены условия*

$$\frac{\partial A}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial C}{\partial t} \leq 0.$$

Тогда управление (12) *стабилизирует программное движение $q^* = q^*(t)$, $p^* = p^*(t)$ при условии, что $D + AB$ — положительно определенная.*

Утверждение 3. *Пусть выполнены условия*

$$\frac{\partial A}{\partial t} \neq 0, \quad \frac{\partial C}{\partial t} = 0.$$

Тогда управление (12) *стабилизирует программное движение $q^* = q^*(t)$, $p^* = p^*(t)$ при условии, что*

$$D \geq \frac{1}{2}\frac{\partial A}{\partial t} - AB.$$

Утверждение 4. *Пусть выполнены условия*

$$\frac{\partial A}{\partial t} \neq 0, \quad \frac{\partial C}{\partial t} \leq 0, \tag{15}$$

Тогда управление (13) *стабилизирует программное движение* $q^* = q^*(t)$, $p^* = p^*(t)$ *при условии* (15).

Представленные утверждения отличаются тем, что в утверждениях 2 и 4 производная функции Ляпунова есть отрицательно определенная по всем переменным, и наличие асимптотической устойчивости нулевого решения справедливо на основании теоремы Ляпунова об асимптотической устойчивости [5]. В утверждениях 1 и 3 производная (14) при управлении (12) является отрицательно определенной функцией только по переменным y , т. е. знакопостоянной. На основе теоремы 3 из [7] имеем асимптотическую устойчивость нулевого решения системы (9), т. е. программного решения $q^*(t), p^*(t)$ исходной управляемой системы (1).

4. СТАБИЛИЗАЦИЯ ПРОГРАММНЫХ ДВИЖЕНИЙ ОДНОРОДНОГО СТЕРЖНЯ ПЕРЕМЕННОЙ ДЛИНЫ

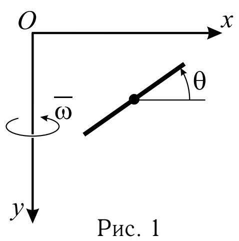


Рис. 1

Рассмотрим однородный тяжелый стержень переменной длины массой $m = 1$, движущийся без трения в плоскости Oxy, которая вращается с постоянной угловой скоростью ω вокруг неподвижной вертикальной оси Oy, лежащей в этой плоскости (рис. 1). Пусть ξ, η — координаты центра масс стержня, θ — угол отклонения стержня от вертикали. Длина стержня изменяется по закону $k = k(t) = a + b\cos t$. Система имеет три степени свободы.

Поставим задачу о реализации управляющими силами, прикладываемыми к системе, произвольно заданных движений механической системы и стабилизации этих движений.

Гамильтониан системы примет вид

$$H(\xi, \eta, \theta) = \frac{1}{2}(\dot{\xi}^2 + \dot{\eta}^2 + k^2(t)\dot{\theta}^2 + \omega^2 k^2(t)\cos^2\theta + \omega^2\xi^2) - g\eta.$$

Выберем программное движение так, чтобы центр масс стержня двигался по окружности радиуса $R = 1$ с центром в точке $O(2, 2)$, и при этом стержень вращался в плоскости Oxy вокруг центра масс с постоянной угловой скоростью $\omega_0 = \mathrm{const}$. Программное движение имеет вид

$$\begin{cases} \xi^* = \cos t + 2, \\ \eta^* = \sin t + 2, \\ \theta^* = \omega_0 t. \end{cases}$$

Уравнения в отклонениях (9) запишутся в виде

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = y_1, \\ \dot{x}_2 = y_2, \\ \dot{x}_3 = y_3/k^2, \\ \dot{y}_1 = \omega^2 x_1, \\ \dot{y}_2 = 0, \\ \dot{y}_3 = -\omega^2 k^2 \sin x_3 \cos(x_3 + 2\omega_0 t). \end{cases}$$

Выбрав управление в виде (12) согласно утверждению 3

$$\begin{cases} u_1 = -\omega^2 x_1 - c_{11}x_1 - d_{11}y_1, \\ u_2 = -c_{22}x_2 - d_{22}y_2, \\ u_3 = \omega^2 k^2 \sin x_3 \cos(x_3 + 2q_3^*) - c_{33}x_3 - k^2 d_{33}y_3, \end{cases}$$

получим уравнения движения стабилизированной системы:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = y_1, \\ \dot{x}_2 = y_2, \\ \dot{x}_3 = y_3/k^2, \\ \dot{y}_1 = -c_{11}x_1 - d_{11}y_1, \\ \dot{y}_2 = -c_{22}x_2 - d_{22}y_2, \\ \dot{y}_3 = -c_{33}x_3 - k^2 d_{33}y_3. \end{cases}$$

5. СТАБИЛИЗАЦИЯ ПРОГРАММНЫХ ДВИЖЕНИЙ МАТЕМАТИЧЕСКОГО МАЯТНИКА ПЕРЕМЕННОЙ ДЛИНЫ

Рассмотрим маятник переменной длины на вращающемся основании. Пусть плоскость Oxy с подвижной системой координат Oxy вращается с постоянной угловой скоростью ω вокруг оси Oy. В точке B на подвижной оси Ox прикреплен математический маятник массой m переменной длины $l = l(t)$, совершающий относительные движения в плоскости Oxy (рис. 2).

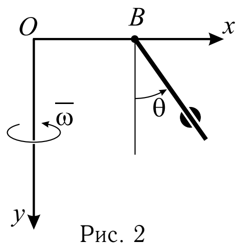


Рис. 2

Поставим задачу о реализации внешними управляющими силами, прикладываемыми к системе, произвольно заданных движений маятника и о стабилизации этих движений.

Гамильтониан системы примет вид

$$H(l,\theta) = ml^2 + ml^2\dot{\theta}^2 - \frac{m}{2}[\dot{l}^2 + \dot{\theta}^2 l^2 + \omega^2(\xi_0^2 + 2\xi_0 l\sin\theta + l^2\sin^2\theta)] - mgl\cos\theta.$$

Выбрав программное движение в виде

$$\begin{cases} l^* = l_0 + a\sin t, \\ \theta^* = \omega_0 t, \end{cases}$$

получаем следующие уравнения в отклонениях:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = y_1/m, \\ \dot{x}_2 = \dfrac{y_2 + m\omega_0(l_0 + a\sin t)^2}{m(x_1 + l_0 + a\sin t)^2} - \omega_0, \\ \dot{y}_1 = \dfrac{(y_2 + m\omega_0(l_0 + a\sin t)^2)^2}{m(x_2 + l_0 + a\sin t)^3} + \dfrac{\omega^2}{m}((x_1 + l_0 + a\sin t)\sin^2(x_2 + \omega_0 t) + \\ \quad + \xi_0\sin(x_2 + \omega_0 t)) + mg\cos(x_2 + \omega_0 t) - m\omega_0^2(l_0 + a\sin t) - \\ \quad - \dfrac{\omega^2}{m}(\xi_0\sin\omega_0 t + (l_0 + a\sin t)\sin^2\omega_0 t) - mg\cos\omega_0 t, \\ \dot{y}_2 = \dfrac{\omega^2\xi_0(x_1 + l_0 + a\sin t)}{m}\cos(x_2 + \omega_0 t) + \dfrac{\omega^2}{2m}(x_1 + l_0 + a\sin t)^2\sin 2(x_2 + \omega_0 t) - \\ \quad - mg(x_1 + l_0 + a\sin t)\sin(x_2 + \omega_0 t) - \dfrac{\omega^2}{2m}(2\xi_0(l_0 + a\sin t)\cos\omega_0 t + \\ \quad + (l_0 + a\sin t)^2\sin 2\omega_0 t) + mg(l_0 + a\sin t)\sin\omega_0 t. \end{cases}$$

На основе утверждения 1 управления

$$\begin{cases} u_1 = 0, \\ u_2 = \dfrac{p_2^*}{mq_1^2} - \dfrac{p_2^*}{mq_1^{*2}}, \\ v_1 = \dfrac{-p_2^{*2}}{mq_1^{*3}} + \dfrac{p_2^{*2}}{m(q_1^* + x_1)^3} + \dfrac{\omega^2}{m}(\xi_0\sin q_2^* + q_1^*\sin^2 q_2^*) - mg\cos q_2^* - \dfrac{\omega^2}{m}(\xi_0\sin(q_2^* + x_2) + \\ \quad + (q_1^* + x_1)\sin^2(q_2^* + x_2)) - mg\cos(q_2^* + x_2) - c_{11}x_1 - md_{11}y_1, \\ v_2 = \dfrac{\omega^2}{2m}(2\xi_0 q_1^*\cos q_2^* + q_1^{*2}\sin 2q_2^*) + mgq_1^*\sin q_2^* - \dfrac{\omega^2}{2m}(2\xi_0(q_1^* + x_1)\cos(q_2^* + x_2) + \\ \quad + (q_1^* + x_1)^2\sin 2(q_2^* + x_2)) + mg(q_1^* + x_1)\sin(q_2^* + x_2) - c_{22}x_2 - mq_1^2 d_{22}y_2. \end{cases}$$

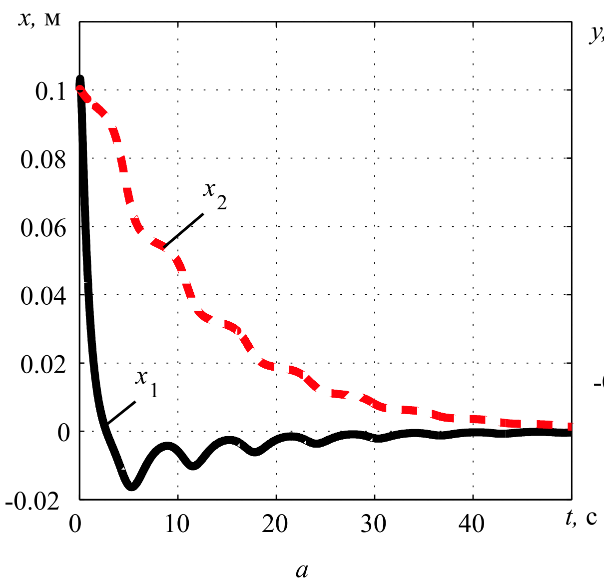
стабилизируют выбранное программное движение. При этом управляемая система имеет вид

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = y_1/m \\ \dot{x}_2 = \dfrac{y_2}{m(x_1 + l_0 + a\sin t)^2} \\ \dot{y}_1 = \dfrac{y_2 + 2y_2 m\omega_0 (l_0 + a\sin t)^2}{m(x_2 + l_0 + a\sin t)^3} - c_{11}x_1 - md_{11}y_1, \\ \dot{y}_2 = -c_{22}x_2 - m(x_1 + l_0 + a\sin t)^2 d_{22}y_2. \end{cases}$$

Проиллюстрируем полученные результаты графическим представлением численного интегрирования построенной управляемой системы. Интегрирование проведено при следующих значениях параметров системы: $m = 1$ кг, $\omega = 1$ рад/с, $l_0 = 2$ м, $a = 0.5$ м, $\omega_0 = 5$ рад/с, $c_{11} = 10$, $c_{22} = 10$, $d_{11} = 10$, $d_{22} = 10$ и следующих начальных отклонениях: $x_1(0) = 0.1$ м, $x_2(0) = 0.1$ рад, $y_1(0) = 0.1$ кг м/с, $y_2(0) = 0.1$ кг рад/с.

На рис. 3, *а* изображены отклонения x_1, x_2, а на рис. 3, *б* — отклонения y_1, y_2. Представленные графики демонстрируют асимптотическую сходимость отклонений, тем самым имеем стабилизированные произвольно выбранные программные движения маятника.

Результаты, полученные в работе, развивают и обобщают результаты из [8, 10].



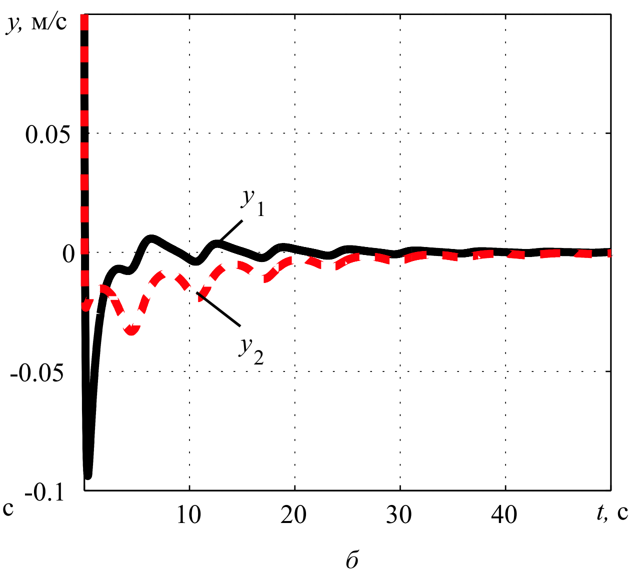


Рис. 3

Библиографический список

1. *Летов А. М.* Динамика полета и управление. М.: Наука, 1969. 359 с.
2. *Галиуллин А. С., Мухаметзянов И. А., Мухарлямов Р. Г., Фурасов В. Д.* Построение систем программного движения. М.: Наука, 1971. 352 с.
3. *Зубов В. И.* Проблема устойчивости процессов управления. Л.: Судостроение, 1980. 375 с.
4. *Афанасьев В. Н., Колмановский В. Б., Носов В. Р.* Математическая теория конструирования систем управления. М.: Высш. шк., 1989. 447 с.
5. *Малкин И. Г.* Теория устойчивости движения. М.: Наука, 1966. 530 с.
6. *Artstein Z.* Topological dynamics of an ordinary equations // J. Differ. Equat. 1977. Vol. 23. P. 216–223.
7. *Андреев А. С.* Об устойчивости и неустойчивости нулевого решения неавтономной системы // ПММ. 1984. Вып. 2. С. 40–45.
8. *Bezglasnyi S. P.* The stabilization of equilibrium state of nonlinear hamiltonian systems // Seminarberichte aus dem Fachberrich Mathematik. FernUnivetsität in Hagen. 2001. Bd. 71. P. 45–53.
9. *Маркеев А. П.* Теоретическая механика. М.: Физмалит, 1990. 414 с.
10. *Bezglasnyi S. P.* The stabilization of program motions of controlled nonlinear mechanical systems // Korean J. Comput. and Appl. Math. 2004. Vol. 14, № 1. P. 251–266.