



МЕХАНИКА

УДК 622.233.6

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОДОЛЬНОГО УДАРА НЕОДНОРОДНОЙ СТЕРЖНЕВОЙ СИСТЕМЫ ПРИ УВЕЛИЧЕНИИ ПРОДОЛЬНОЙ ЖЕСТКОСТИ

А.А. Битюрин, В.К. Манжосов*

Ульяновский государственный технический университет,
кафедра теоретической и прикладной механики
E-mail: denjgy0706@yandex.ru, *tpm@ulstu.ru

Осуществляется математическое моделирование продольного упругого центрального удара неоднородной стержневой системы о жесткую преграду при неудерживающих связях. Математическое моделирование осуществляется путем точного аналитического решения волнового дифференциального уравнения методом Даламбера с заданием необходимых начальных и граничных условий. Стержневая система состоит из ступенчатого неоднородного стержня и однородного стержня постоянного поперечного сечения. Связи с жесткой преградой и между стержнями неудерживающие. Однородные участки стержневой системы имеют различную длину и площадь поперечного сечения.

Ключевые слова: деформация, моделирование, продольный удар, стержень.

Mathematical Modeling of Longitudinal Blau of the System of Homogeneous Rods about Rigid Barrir at Increase Long Solids

А.А. Bityurin, V.K. Manzhosov*

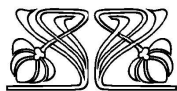
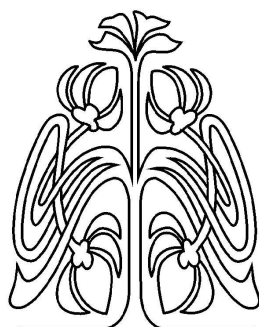
Ulyanovsk State Technical University,
Chair of Theoretical and Applied Mechanics
E-mail: denjgy0706@yandex.ru, *tpm@ulstu.ru

Mathematical modeling of longitudinal elastic central blow of non-homogeneous rod system about a rigid barrier is carried out, at not-holding connections. Mathematical modeling is carried out by the exact analytical decision of the wave differential equation by method of Dalamber with the setting of necessary initial and boundary conditions. The rod system consists of a step non-homogeneous rod and a homogeneous rod of constant cross section. Connections with a rigid barrier and between rods are not-holding. Homogeneous sites of rod system have various length and the area of cross section.

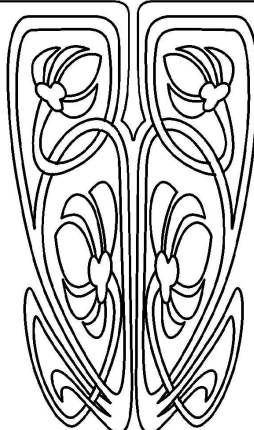
Key words: deformation, modeling, longitudinal blow, rod.

ВВЕДЕНИЕ

Выполнение многих технологических операций в машиностроении, металлургии, горном деле, строительстве, производстве строительных материалов и прочих многочисленных отраслях связано с ударной обработкой и разрушением различных материалов. Машины как средства, основанные на применении удара, используются для выполнения работ, связанных с возбуждением в обрабатываемом материале значительных по величине усилий, приводящих к разрушению материала или его деформированию (например, машины для штамповки деталей,ковки, разрушения горных пород, бетонных покрытий, погружения свай и т. д.). Эффективность применения таких машин во многом обусловлена тем, что разрушение материала, или его деформирование, во многих технологических процессах определяется уровнем возникающих напряжений, а не продолжительностью их воздействия.



НАУЧНЫЙ
ОТДЕЛ





В основе технологических операций с использованием машин ударного действия лежит нанесение продольного удара неоднородного многоступенчатого упругого стержня или системы стержней.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Задача о продольном ударе стержня с учетом его распределенной массы и описания движения поперечных сечений волновыми уравнениями была сформулирована в XIX веке в работах Навье, Буссинеска, Сен-Венана, Сирса.

Во второй половине XX века применение ударных технологий в машиностроении, горнодобывающей промышленности, строительстве, приборостроении привело к значительному количеству теоретических и экспериментальных исследований в области продольного удара.

В известных работах модель учета неудерживающих связей в задачах продольного удара стержней сводится к тому, что процесс удара считался завершенным, если в ударном сечении возникала деформация растяжения и происходил разрыв связи. Возможность повторного соударения стержней исследователями не рассматривалась. Такая модель продольного удара, с одной стороны, отсекала информацию о последующем нагружении стержня при повторных соударениях, а с другой стороны, представляла некорректную информацию о восстановлении скорости стержня при продольном ударе.

В данной работе представлена математическая модель продольного удара стержней при разрывах связей и возникновении повторных соударений [1–6].

Рассмотрена модель продольного удара системы ступенчатого и однородного стержней о жесткую преграду (рис. 1). Длина начального участка ступенчатого стержня равна l_1 , конечного участка l_2 , масса обоих участков m_1 . Длина однородного стержня $l_3 = l - (l_1 + l_2)$, масса m_2 . Предударная скорость стержневой системы V_0 . Общая длина обоих стержней равна l . Все участки состоят из одного материала. Используется волновая модель продольного удара.

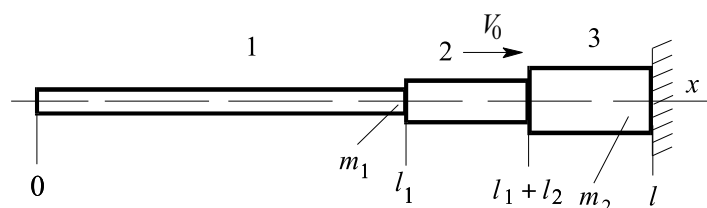


Рис. 1. Схема удара неоднородной стержневой системы о жесткую преграду при неудерживающих связях

Движение поперечных сечений

соударяемых стержней описывается волновыми дифференциальными уравнениями

$$\frac{\partial^2 u_1(x, t)}{\partial x^2} - \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 u_1(x, t)}{\partial t^2} = 0, \quad 0 \leq x \leq l_1, \quad (1)$$

$$\frac{\partial^2 u_2(x, t)}{\partial x^2} - \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 u_2(x, t)}{\partial t^2} = 0, \quad l_1 \leq x \leq l_1 + l_2, \quad (2)$$

$$\frac{\partial^2 u_3(x, t)}{\partial x^2} - \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 u_3(x, t)}{\partial t^2} = 0, \quad l_1 + l_2 \leq x \leq l, \quad (3)$$

где $u_1(x, t)$, $u_2(x, t)$, $u_3(x, t)$ — продольное перемещение поперечного сечения соответственно однородного стержня 1, начального 2 и конечного 3 участков неоднородного стержня, x — координата сечения, t — время, a — скорость распространения продольной волны деформации.

Начальные условия определяют состояние участков стержневой системы перед их соударением, при $t = t_0 = 0$

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_1(x, t_0)}{\partial t} = V_0, \quad \frac{\partial u_1(x, t_0)}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial u_2(x, t_0)}{\partial t} = V_0, \\ \frac{\partial u_2(x, t_0)}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial u_3(x, t_0)}{\partial t} = V_0, \quad \frac{\partial u_3(x, t_0)}{\partial x} = 0. \end{aligned}$$

Краевые условия определяют отсутствие силы в сечении $x = 0$ и равенство нулю скорости сечения $x = l$ при взаимодействии однородного стержня (участок 3) с жесткой преградой:

$$\frac{\partial u_1(0, t)}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial u_3(l, t)}{\partial t} = 0, \quad \text{если} \quad \frac{\partial u_3(l, t)}{\partial x} < 0,$$



а также определяют равенство сил и скоростей в контактных сечениях $x = l_1 + l_2$ участка 2 ступенчатого стержня и однородного стержня при непосредственном их взаимодействии

$$EA_2 \frac{\partial u_2(l_1 + l_2, t)}{\partial x} = EA_3 \frac{\partial u_3(l_1 + l_2, t)}{\partial x}, \quad \text{если} \quad \frac{\partial u_2(l_1 + l_2, t)}{\partial x} < 0,$$

$$\frac{\partial u_2(l_1 + l_2, t)}{\partial t} = \frac{\partial u_3(l_1 + l_2, t)}{\partial t}, \quad \text{если} \quad \frac{\partial u_2(l_1 + l_2, t)}{\partial x} < 0,$$

либо отсутствие сил в ударных сечениях стержней, если их взаимодействие отсутствует:

$$\frac{\partial u_2(l_1 + l_2, t)}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial u_3(l_1 + l_2, t)}{\partial x} = 0, \quad \text{если} \quad u_2(l_1 + l_2, t) - u_3(l_1 + l_2, t) \leq 0,$$

где E — модуль упругости первого рода, A_2 — площадь поперечного сечения участка 2 ступенчатого стержня, A_3 — площадь поперечного сечения однородного стержня (участок 3).

В переходном сечении $x = l_1$ начального и конечного участков ступенчатого стержня краевые условия также определяют равенство сил и скоростей

$$EA_1 \frac{\partial u_1(l_1, t)}{\partial x} = EA_2 \frac{\partial u_2(l_1, t)}{\partial x}, \quad \frac{\partial u_1(l_1, t)}{\partial t} = \frac{\partial u_2(l_1, t)}{\partial t},$$

где A_1 — площадь поперечного сечения начального участка 1 ступенчатого стержня.

Разрыв контакта в сечениях $x = l_1 + l_2$ и $x = l$ происходит при условии отрицательной разности скоростей в сечениях $x = l_1 + l_2$ второго и третьего участков, а также отрицательной скорости сечения $x = l$:

$$\frac{\partial u_2(l_1 + l_2, t)}{\partial t} - \frac{\partial u_3(l_1 + l_2, t)}{\partial t} < 0, \quad \frac{\partial u_3(l, t)}{\partial t} < 0.$$

Повторный удар с жесткой преградой может возникнуть после разрыва контакта в этих сечениях при условии положительной разности скоростей в сечениях $x = l_1 + l_2$ второго и третьего участков и положительной скорости сечения $x = l$:

$$\frac{\partial u_2(l_1 + l_2, t)}{\partial t} - \frac{\partial u_3(l_1 + l_2, t)}{\partial t} > 0, \quad \frac{\partial u_3(l, t)}{\partial t} > 0.$$

3. МЕТОД РЕШЕНИЯ

Решение дифференциальных уравнений (1)–(3) реализуется точным аналитическим методом Даламбера в виде суммы двух разрывных функций [1]:

$$u_1(x, t) = f_1(at - x) + \varphi_1(at + x), \quad 0 \leq x \leq l_1,$$

$$u_2(x, t) = f_2(at - x) + \varphi_2(at + x), \quad l_1 \leq x \leq l_1 + l_2,$$

$$u_3(x, t) = f_3(at - x) + \varphi_3(at + x), \quad l_1 + l_2 \leq x \leq l,$$

$$\frac{\partial u_1(x, t)}{\partial x} = -f'_1(at - x) + \varphi'_1(at + x), \quad \frac{\partial u_1(x, t)}{\partial t} = a[f'_1(at - x) + \varphi'_1(at + x)],$$

$$\frac{\partial u_2(x, t)}{\partial x} = -f'_2(at - x) + \varphi'_2(at + x), \quad \frac{\partial u_2(x, t)}{\partial t} = a[f'_2(at - x) + \varphi'_2(at + x)],$$

$$\frac{\partial u_3(x, t)}{\partial x} = -f'_3(at - x) + \varphi'_3(at + x), \quad \frac{\partial u_3(x, t)}{\partial t} = a[f'_3(at - x) + \varphi'_3(at + x)],$$

где $f_1(at - x)$, $f_2(at - x)$, $f_3(at - x)$ — функции, описывающие прямые волны, распространяющиеся соответственно по участкам 1, 2 и 3 в направлении оси x ; $\varphi_1(at + x)$, $\varphi_2(at + x)$, $\varphi_3(at + x)$ — функции, описывающие обратные волны, распространяющиеся по участкам 1, 2 и 3 в противоположном направлении; $f'_1(at - x)$, $f'_2(at - x)$, $f'_3(at - x)$, $\varphi'_1(at + x)$, $\varphi'_2(at + x)$, $\varphi'_3(at + x)$ — производные функций.

Перейдем к относительным величинам, характеризующим прямые и обратные волны $\tilde{f}'(at - x) = f'(at - x)/\frac{V_0}{a}$; $\tilde{\varphi}'(at + x) = \varphi'(at + x)/\frac{V_0}{a}$, деформацию в сечении и его скорость $\tilde{\varepsilon}(x, t) = -\tilde{f}'(at - x) + \tilde{\varphi}'(at + x)$, $\tilde{v}(x, t) = \frac{v(x, t)}{V_0} = \tilde{f}'(at - x) + \tilde{\varphi}'(at + x)$.



Рассмотрим некоторое произвольное сечение j на i -м интервале времени (рис. 2). Это сечение является границей сопряжения j -го и $(j+1)$ -го участков. На сечение j слева падает прямая волна $f_j(at - x_{j-1})$, сформированная на $(i-1)$ -ом интервале времени в $(j-1)$ -м сечении, а справа — обратная волна $\varphi_{j+1}(at + x_{j+1})$, сформированная на $(i-1)$ -м интервале времени в $(j+1)$ -м сечении. Поскольку ударные волны в однородных участках имеют прямоугольный вид, волна $f_j(at - x_{j-1})$ иллюстрирована в виде левого верхнего прямоугольника переменного тона, а волна $\varphi_{j+1}(at + x_{j+1})$ в виде правого верхнего прямоугольника.

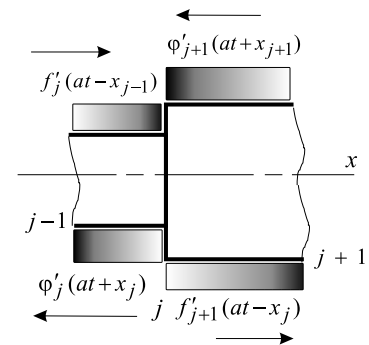


Рис. 2. Граница сопряжения однородных участков

Стрелками и направлением затемненного раstra указано направление распространения соответствующей волны деформации. Интервал времени $\Delta t = \frac{\Delta l}{a}$ равен времени распространения волны деформации на участке длиной Δl , x_{j-1} и x_{j+1} — координаты $(j-1)$ -го и $(j+1)$ -го сечений. При преобразовании j падающих волн в сечении формируется прямая волна $f_{j+1}(at - x_j)$, распространяющаяся от сечения j к сечению $j+1$, и обратная волна $\varphi_j(at + x_j)$, распространяющаяся от сечения j к сечению $j-1$. Причем производные функций определяются как [1]

$$f'_{j+1}(at - x_j) = q_f(j)f'_j(at - x_j) + r_\varphi(j)\varphi'_{j+1}(at + x_j), \quad \varphi'_j(at + x_j) = q_\varphi(j)\varphi'_{j+1}(at + x_j) + r_f(j)f'_j(at - x_j),$$

где $q_f(j) = \frac{2}{(r_j+1)/r_j}$ — коэффициент прохождения прямой волны $f'_j(at - x_j)$, падающей на границу $x = x_j$ со стороны j -го участка; $r_j = \frac{A_j}{A_{j+1}}$ — отношение площадей поперечных сечений сопряженных j -го и $(j+1)$ -го участков; $r_\varphi(j) = \frac{1-r_j}{1+r_j}$ — коэффициент отражения обратной волны $\varphi'_{j+1}(at + x_j)$, падающей на границу $x = x_j$ со стороны $(j+1)$ -го участка; $q_\varphi(j) = \frac{2}{r_j+1}$ — коэффициент прохождения обратной волны $\varphi'_{j+1}(at + x_j)$, падающей на границу $x = x_j$ со стороны $(j-1)$ -го участка; $r_f(j) = \frac{r_j-1}{r_j+1}$ — коэффициент отражения прямой волны $f'_j(at - x_j)$, падающей на границу $x = x_j$ со стороны $(j-1)$ -го участка.

Деформация в сечении x_j , принадлежащим j -му участку, определится как:

$$\varepsilon_j(x_j, t) = -f'_j(at + x_j) + q_\varphi(j)\varphi'_{j+1}(at + x_j) + r_f(j)f'_j(at - x_j) = -(1 - r_f(j))f'_j(at + x_j) + q_\varphi(j)\varphi'_{j+1}(at + x_j).$$

Деформация в сечении x_j , принадлежащим $(j+1)$ -му участку, определится как:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{j+1}(x_j, t) &= -q_f(j)f'_j(at + x_j) - r_\varphi(j)\varphi'_{j+1}(at + x_j) + \varphi'_j(at - x_j) = \\ &= -q_f(j)f'_j(at + x_j) + (1 - r_\varphi(j))\varphi'_{j+1}(at + x_j). \end{aligned}$$

Равенство $\varepsilon_j(x_j, t) = \varepsilon_{j+1}(x_j, t)$ может быть только в том случае, когда $r_f(j) = 0$, $r_\varphi(j) = 0$, $q_f(j) = 1$, $q_\varphi(j) = 1$, а это возможно только тогда, когда $r_j = \frac{A_j}{A_{j+1}} = 1$, т.е. при сопряжении однородных участков.

Скорости сопряженных сечений участков всегда равны между собой $v_j(x_j, t) = v_{j+1}(x_j, t)$. Разница скоростей сопряженных сечений привела бы к разрыву стержня в этих сечениях.

Осуществляется математическое моделирование продольного удара при длинах участков стержневой системы l_1, l_2, l_3 , указанных в табл. 1.

Таблица 1

Длина участка 1 ступенчатого стержня	Длина участка 2 ступенчатого стержня	Длина участка 3 (однородный стержень)
l_1	l_2	l_3
0, 2l	0, 2l	0, 6l
0, 2l	0, 4l	0, 4l
0, 2l	0, 6l	0, 2l
0, 4l	0, 2l	0, 4l
0, 4l	0, 4l	0, 2l
0, 6l	0, 2l	0, 2l



Отношение площадей поперечных сечений каждого предыдущего участка к последующему: $\tilde{A} = \frac{A_1}{A_2} = \frac{A_2}{A_3} = 0,5$ и $0,33$. Такие значения \tilde{A} выражают увеличение продольной жесткости поперечных сечений в направлении жесткой преграды.

При проведении процедуры математического моделирования особое внимание уделялось возникновению повторных ударов в сечениях с неудерживающими связями, поскольку новое ударное взаимодействие приводит к возникновению новых волновых состояний. Эти состояния могут вызвать резкое изменение продольной деформации на ряде участков, которая может многократно превзойти величину продольной деформации, смоделированной без учета возникновения повторных ударов.

4. ПРИМЕР

Рассмотрим удар ступенчатого и однородного стержней о жесткую преграду при $l_1 = 0,6l$, $l_2 = l_3 = 0,2l$, $\tilde{A} = 0,5$. С применением метода характеристик построено поле состояний (рис. 3).

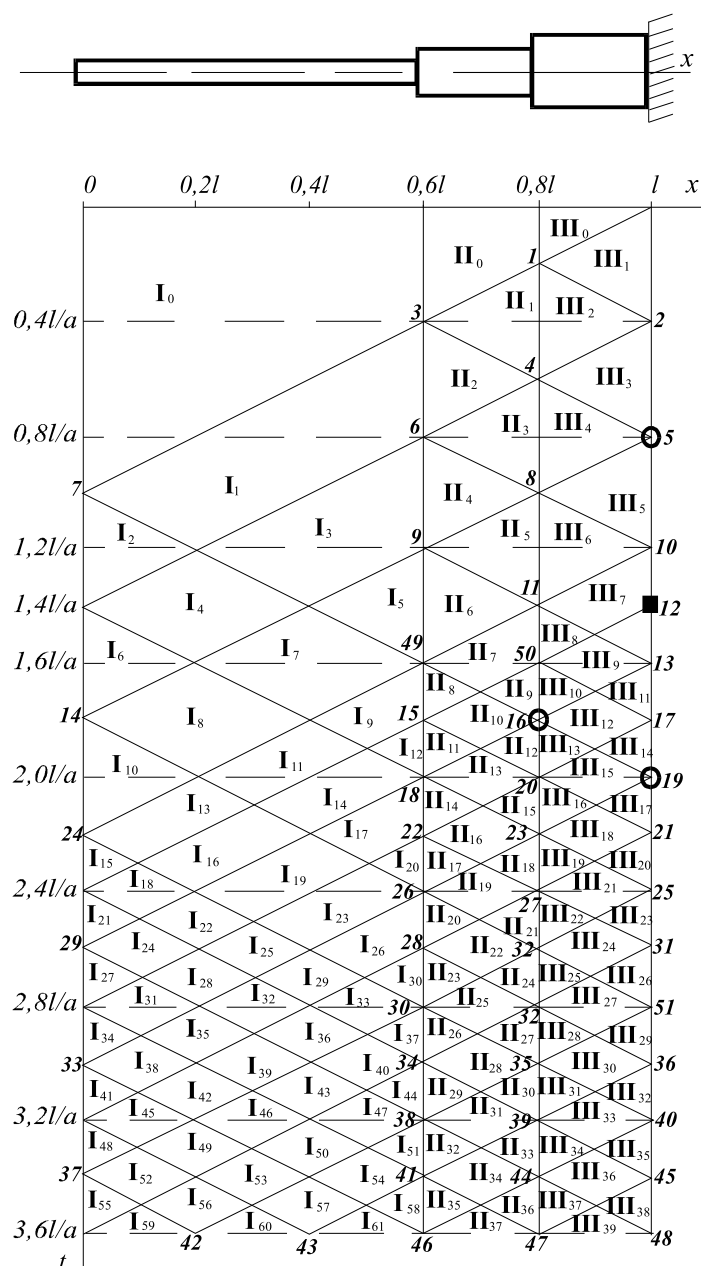


Рис. 3. Поле состояний при ударе о жесткую преграду ступенчатого и однородного стержней

Области состояний I_0-I_{61} , II_0-II_{37} , III_0-III_{39} с соответствующими значениями $\tilde{f}'(at - x)$, $\tilde{\varphi}'(at + x)$, $\tilde{\varepsilon}(x, t)$, $\tilde{v}(x, t)$ определяют параметры прямых и обратных волн деформаций, продольную деформацию и скорость поперечных сечений. При $t = 0$ ступенчатый и однородный стержни соударяются с жесткой преградой в сечении $x = l$.

В результате в данный момент времени, влево от этого сечения начинает распространяться новая обратная волна $\tilde{\varphi}'_3(at + l) = -0,5$ (рис. 3, линия 1-1). При $t = 0,2l/a$ эта волна подойдет к контактному сечению $x = l_1 + l_2 = 0,8l$. Слева на контактное сечение падает начальная прямая волна $\tilde{f}'_0 = 0,5$. Это приведет к формированию в сечении $x = l_1 + l_2$ новых прямой волны справа $\tilde{f}'_3(at - 0,8l) = 0,17$ (рис. 3, линия 1-2) и обратной волны слева $\tilde{\varphi}'_2(at + 0,8l) = -0,83$ (рис. 3, линия 1-3).

В области первого состояния второго участка II_1 поперечные сечения этого участка находятся под влиянием начальной прямой волны $\tilde{f}'_0 = 0,5$ и обратной волны $\tilde{\varphi}'_2(at + 0,8l) = -0,83$. Относительная продольная деформация поперечных сечений в данной области $\tilde{\varepsilon}_2(x, t) = -1,33$, относительная скорость $\tilde{v}_2(x, t) = -0,33$.

В области второго состояния третьего участка III_2 поперечные сечения охвачены прямой волной $\tilde{f}'_3(at - 0,8l) = 0,17$ и обратной волной $\tilde{\varphi}'_3(at + l) = -0,5$. Относительная продольная деформация $\tilde{\varepsilon}_3(x, t) = -0,67$, относительная скорость $\tilde{v}_3(x, t) = -0,33$.



При $t = 0,8l/a$ к сечению $x = l$ подойдет прямая волна $\tilde{f}'_3(at - 0,8l) = -0,04$ (рис. 3, линия 4–5), которая отразится от него без каких-либо искажений в виде обратной волны $\tilde{\varphi}'_3(at + l) = -0,04$ (рис. 3, линия 5–8). В области пятого состояния третьего участка поперечные сечения его охвачены данными прямой и обратной волнами. Относительная продольная деформация поперечных сечений в данной области $\tilde{\varepsilon}_3(x, t) = 0$, относительная скорость $\tilde{v}_3(x, t) = -0,08$.

Поскольку жесткая преграда неподвижна, то произойдет отрыв сечения $x = l$. На поле состояний (рис. 3) отрыв показан темным кружком.

При $t = 1,2l/a$ на сечение $x = l$ падает прямая волна $\tilde{f}'_3(at - 0,8l) = 0,16$ (линия 8–10), которая отражается от этого сечения как от свободного, без каких-либо изменений в виде обратной волны $\tilde{\varphi}'_3(at + l) = 0,16$ (рис. 3, линия 10–11).

В области девятого состояния третьего участка **III**₉ поперечные сечения его охвачены данными прямой и обратной волнами. Относительная продольная деформация $\tilde{\varepsilon}_3(x, t) = 0$, относительная скорость $\tilde{v}_3(x, t) = 0,32$. Следует отметить, что относительная скорость положительна. Следовательно, сечение $x = l$ будет двигаться вправо, в сторону жесткой преграды.

При $t = 1,4l/a$ сечение $x = l$ достигнет жесткой преграды и произойдет повторное соударение с ней однородного стержня. На поле состояний (рис. 3) повторный удар показан темным квадратом.

5. РЕЗУЛЬТАТЫ

На основе полученных данных математического моделирования строятся диаграммы прямых (рис. 4.) и обратных (рис. 5) волн. Направление затемнения указывает направление распространения соответствующей волны деформации.

Максимальная по модулю относительная продольная деформация во время удара из анализа полученных результатов $\tilde{\varepsilon}_{\max} = 1,77$ наблюдается на первом участке ступенчатого стержня.

Зависимость величины максимальной относительной продольной деформации $\tilde{\varepsilon}_{\max}$ в опасных сечениях в зависимости от длин участков l_1, l_2, l_3 и значения A стержневой системы легко проиллюстрировать на графиках $\tilde{\varepsilon}_{\max}(l)$, представленных на рис. 6 (a–e). Графики на рис. 6 a, в, д представлены для $\tilde{\varepsilon}_{\max}$ в зависимости от длины второго участка l_2 ступенчатого стержня при постоянной длине первого участка l_1 . На рис. 6 б, г, e представлены графики для $\tilde{\varepsilon}_{\max}$ в зависимости от длины первого участка l_1 при постоянной длине второго участка l_2 . Соответственно в обоих случаях будет изменяться длина однородного стержня l_3 , поскольку общая длина стержневой системы постоянна l .

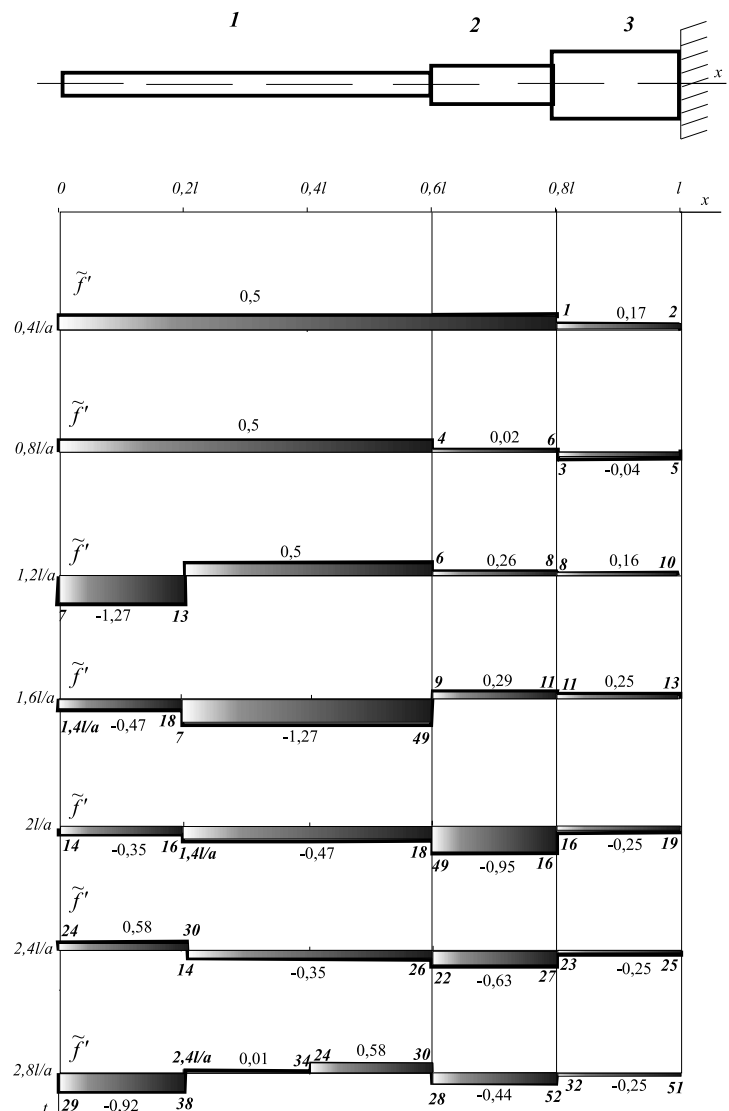


Рис. 4. Диаграмма функций прямых волн

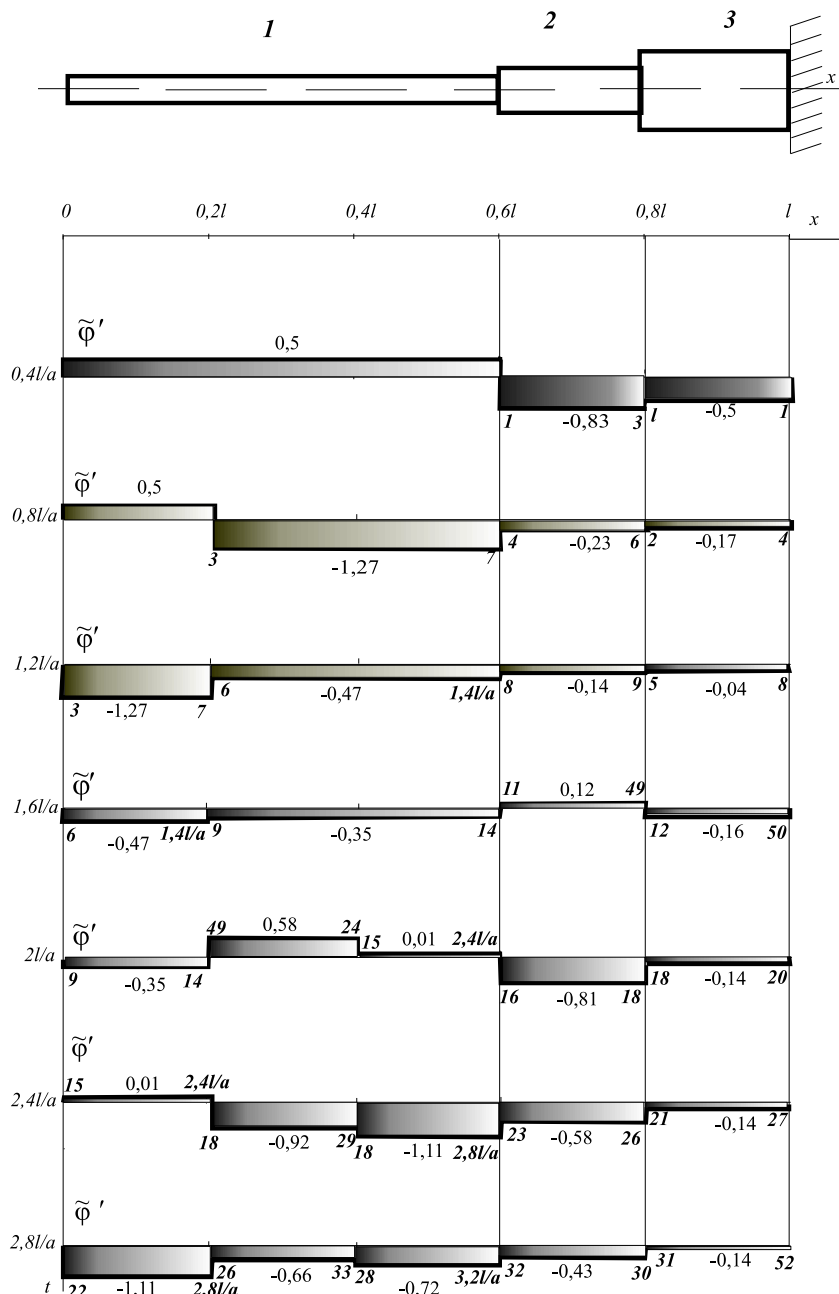


Рис. 5. Диаграмма функций обратных волн

ВЫВОДЫ

1. При ударе о жесткую преграду ступенчатого и однородного стержней, взаимодействующих между собой в контактном сечении в случае большей продольной жесткости поперечных сечений в направлении жесткой преграды, при соответствующих параметрах l_1, l_2, l_3 и \tilde{A} , наблюдаются повторные соударения в сечениях с неудерживающими связями.

2. Из анализа графиков (рис. 6, а-е) делаем вывод, что величина максимальной по модулю относительной продольной деформации $\tilde{\varepsilon}_{\max}$ на участках, имеющих наименьшую площадь поперечного сечения, зависит от параметра \tilde{A} и в меньшей степени зависит от длин участков l_1, l_2, l_3 . При уменьшении \tilde{A} , максимальная деформация увеличивается от 2 при $\tilde{A} = 0,5$ до 3,45 при $\tilde{A} = 0,33$.

3. При ударе о жесткую преграду ступенчатого и однородного стержней с длинами участков $l_1 = 0,6l, l_2 = l_3 = 0,2l$ и $\tilde{A} = 0,33$ после повторного удара в контактном сечении $x = l_1 + l_2$, наблюдается значительная деформация растяжения в опасных сечениях $\tilde{\varepsilon} = 3,09$. Это необходимо учитывать при проектировании ударных систем соответствующей конфигурации.

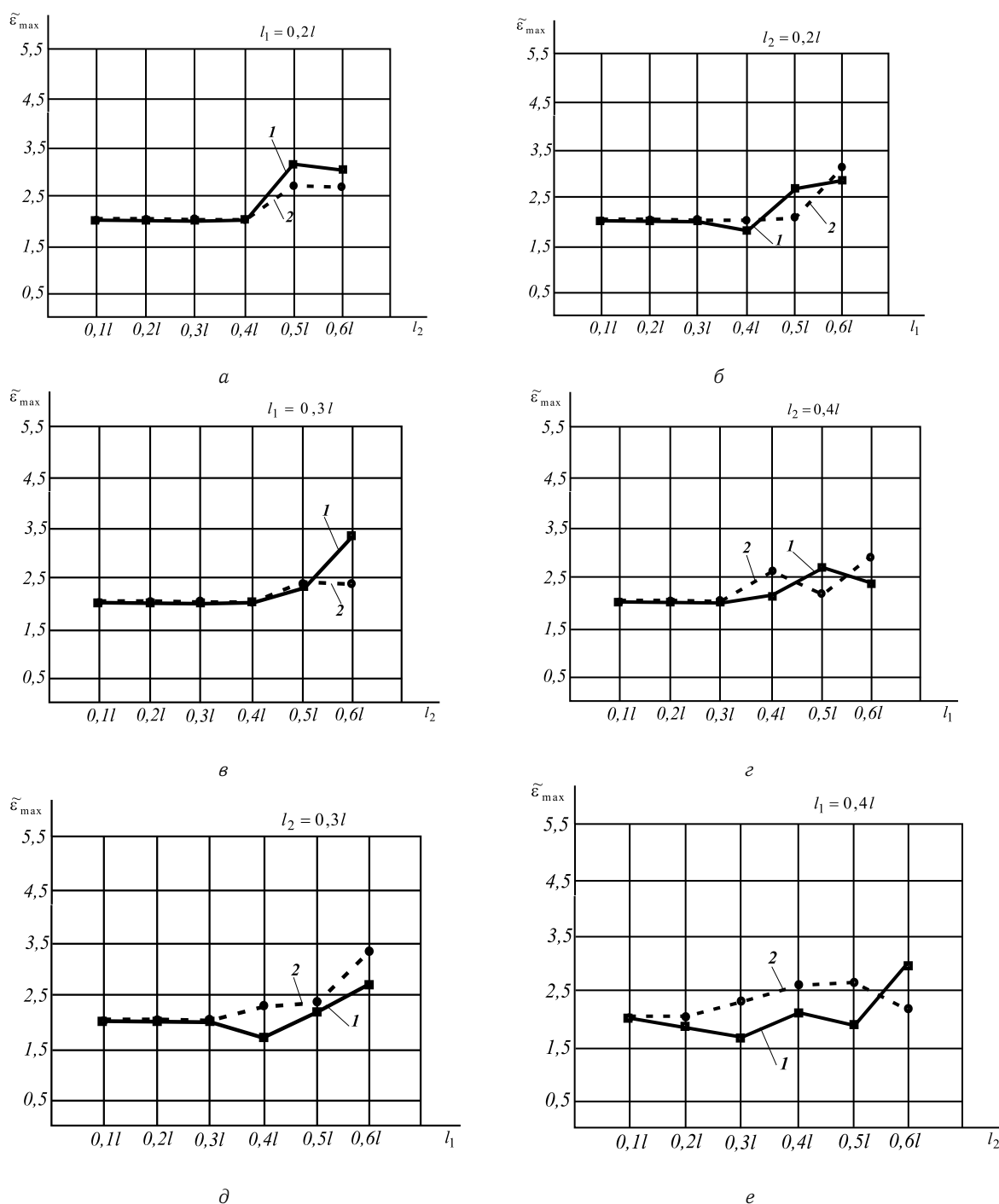


Рис. 6. График зависимости $\tilde{\varepsilon}_{\max}(l)$ при $\tilde{A} = 0,5$ (линия 1) и при $\tilde{A} = 0,33$ (линия 2).

Библиографический список

1. Алимов О.Д., Манжосов В.К., Еремьянц В.Э. Удар. Распространение волн деформаций в ударных системах. М.: Наука, 1985. 354 с.
2. Бидерман В.Л. Теория механических колебаний. М.: Высш. шк. 1972. 416 с.
3. Битюрин А.А., Манжосов В.К. Возникновение ненагруженного состояния в однородном стержне при соударении стержневой системы с жесткой преградой // Изв. вузов. Машиностроение. 2006. № 11. С. 27–32.
4. Битюрин А.А., Манжосов В.К. Изменение деформации на участках стержневой системы после повторного удара в контактном сечении // Вестн. УлГТУ. 2007. № 3. С. 23–28.
5. Битюрин А.А., Манжосов В.К. Волновые процессы при продольном ударе стержня о ступенчатый стержень, соприкасающийся с жесткой преградой // ПММ. 2009. Т. 73, вып. 2. С. 226–235.
6. Манжосов В.К. Модели продольного удара. Ульяновск: Изд-во УлГТУ, 2006. 159 с.