УДК 517.968.23

О РЕШЕНИИ НЕВЫРОЖДЕННОЙ ЧЕТЫРЕХЭЛЕМЕНТНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ТИПА КАРЛЕМАНА ДЛЯ БИАНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ В КРУГЕ

Н.Н. Богданова, К.М. Расулов*

Смоленский государственный университет,
кафедра алгебры и геометрии,
*кафедра математического анализа
E-mail: icspgu@sci.smolensk.ru

Статья посвящена исследованию четырехэлементной краевой задачи типа Карлемана для кусочно-бианалитических функций с линией скачков $L = \{t : |t| = 1\}$. Получен конструктивный метод решения рассматриваемой задачи в так называемом невырожденном случае. Установлено, что решение исследуемой задачи сводится к решению двух обобщенных и двух обычных скалярных задач Римана для кусочно-аналитических функций с линией скачков L.

Ключевые слова: четырехэлементная краевая задача типа Карлемана, кусочно-бианалитические функции, линия скачков, скалярная задача Римана для кусочно-аналитических функций.

About the Solution of Nondegenerate Four-Element Boundary Value Problem of Karleman Type for Bianalytical Functions in Circle

N.N. Bogdanova, K.M. Rasulov*

Smolensk State Universyty
Chair of Algebra and Geometry,
*Chair of Mathematical Analysis
E-mail: icspgu@sci.smolensk.ru

The article is devoted to the investigation of four-element boundary value problem of Karleman type for sectionally bianalytical functions with discontinuity line $L = \{t : |t| = 1\}$. A constructive method for solution of the problem concerned in a so called nondegenerate case was found. It is established that solution of the investigated problem consists of solution of two generalized and two usual scalar boundary value problems of Riemann for sectionally analytical functions with discontinuity line L.

Key words: four-element boundary value problem of Karleman, sectionally bianalytical functions, discontinuity line, scalar boundary value problem of Riemann for sectionally analytical functions.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Пусть T^+ — конечная односвязная область на расширенной плоскости комплексного переменного $z = x + iy$, ограниченная простым гладким замкнутым контуром L, а $T^- = \overline{C} \setminus (T^+ \cup L)$. Для определенности будем предполагать, что начало координат принадлежит области T^+. Далее будем пользоваться в основном терминами и обозначениями, принятыми в монографиях [1, 2]. Рассмотрим следующую краевую задачу.

Требуется найти все кусочно-бианалитические функции $F(z) = \{F^+(z), F^-(z)\}$ класса $A_2(T^\pm) \cap H^{(2)}(L)$, исчезающие на бесконечности и удовлетворяющие на контуре L следующим условиям:

$$A_{11}(t)\overline{\frac{\partial F^+(t)}{\partial x}} + A_{12}(t)\frac{\partial F^+[\alpha(t)]}{\partial x} = G_{11}(t)\overline{\frac{\partial F^-(t)}{\partial x}} + G_{12}(t)\frac{\partial F^-[\alpha(t)]}{\partial x} + g_1(t), \tag{1}$$

$$A_{21}(t)\overline{\frac{\partial F^+(t)}{\partial y}} - A_{22}(t)\frac{\partial F^+[\alpha(t)]}{\partial y} = G_{21}(t)\overline{\frac{\partial F^-(t)}{\partial y}} - G_{22}(t)\frac{\partial F^-[\alpha(t)]}{\partial y} - ig_2(t), \tag{2}$$

где $A_{kj}(t)$, $G_{kj}(t)$, $g_j(t)$ $(k = 1, 2;\ j = 1, 2)$ — заданные на L комплекснозначные функции класса $H(L)$ (Гельдера), i — мнимая единица, $\alpha(t)$ — прямой или обратный сдвиг контура L, удовлетворяющий условию Карлемана

$$\alpha\,[\alpha(t)] = t, \tag{3}$$

причем $\alpha'(t) \in H(L)$.

В формуле (2) множитель (-1) перед $A_{22}(t)$ и $G_{22}(t)$, а также множитель $(-i)$ перед $g_2(t)$ введёны для удобства в дальнейших обозначениях.

Сформулированную задачу будем называть *первой основной четырехэлементной краевой задачей типа Карлемана в классах бианалитических функций*, или, короче, — *задачей K_{41}*, а соответствующую однородную задачу $(g_1(t) \equiv g_2(t) \equiv 0)$ — *задачей K^0_{41}*.

Сразу отметим, что в частном случае, когда $A_{12}(t) \equiv A_{22}(t) \equiv G_{12}(t) \equiv G_{22}(t) \equiv 0$, $A_{11}(t) \equiv A_{21}(t) \equiv 1$, используя оператор сопряжения, задача K_{41} элементарно сводится к основной (двухэлементной) краевой задаче типа Римана для бианалитических функций, сформулированной Ф.Д. Гаховым в его известной монографии [1, с. 319].

Если же, например, на контуре L выполняются условия $A_{11}(t) \equiv A_{21}(t) \equiv G_{12}(t) \equiv G_{22}(t) \equiv 0$, $A_{12}(t) \equiv A_{22}(t) \equiv 1$, то задача K_{41} представляет собой основную (двухэлементную) краевую задачу типа Газемана для бианалитических функций. Двухэлементные задачи типа задачи Римана и типа задачи Газемана для бианалитических функций в случае произвольных конечносвязных областей с гладкими границами подробно исследованы в работах К.М. Расулова (см., например, монографию [2] и имеющуюся там библиографию). В работах [3, 4] задача K_{41} изучалась при условии $A_{11}(t) \equiv A_{21}(t) \equiv 0$, $A_{12}(t) \equiv A_{22}(t) \equiv 1$ и $\alpha(t) \equiv t$.

Следует отметить также, что в частном случае, когда $\alpha(t) \equiv t$, задача K_{41} была исследована в работах Ю.А. Медведева [5, 6].

Здесь задача K_{41} исследуется в указанной выше постановке в случае, когда контур L — есть единичная окружность: $L = \{\, t : |\, t\,| = 1\}$, а $T^+ = \{\, z : |\, z\,| < 1\}$. Кроме того, в дальнейшем без ограничения общности будем считать, что выполняется следующее начальное условие:

$$F^+(0) = 0. \tag{4}$$

2. О СВЕДЕНИИ ЗАДАЧИ K_{41} К ДВУМ ТРЕХЭЛЕМЕНТНЫМ ВЕКТОРНО-МАТРИЧНЫМ ЗАДАЧАМ РИМАНА ДЛЯ АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

Первым важным шагом при исследовании задачи K_{41} является доказательство следующего утверждения.

Теорема 2.1. *Если на контуре $L = \{\, t : |\, t\,| = 1\}$ выполняются условия*

$$\delta_k(t) = \overline{A_{k1}(t)}G_{k1}[\alpha(t)] - A_{k2}[\alpha(t)]\overline{G_{k2}(t)} \neq 0, \qquad t \in L, \quad k = 1,\ 2, \tag{5}$$

то решение задачи K_{41} сводится к решению следующих двух векторно-матричных задач типа Римана относительно кусочно-аналитических вектор-функций:

$$\psi_k^+(t) = W_{k1}(t)\psi_k^-(t) + W_{k2}(t)\psi_k^-[\alpha(t)] + Q_k(t), \qquad t \in L, \quad k = 1, 2, \tag{6}$$

где

$$\psi_k^{\pm}(z) = \begin{pmatrix} \psi_{k1}^{\pm}(z) \\ \psi_{k2}^{\pm}(z) \end{pmatrix}, \qquad \psi_{k1}^{\pm}(z) = \Phi_k^{\pm}(z), \qquad \psi_{k2}^{\pm}(z) = \frac{1}{z}\overline{\Phi_k^{\mp}}\left(\frac{1}{z}\right), \quad z \in T^{\pm}, \tag{7}$$

$$\Phi_k^{\pm}(z) = z\frac{d\varphi_0^{\pm}(z)}{dz} + \frac{d\varphi_1^{\pm}(z)}{dz} + (-1)^{k-1}z\varphi_1^{\pm}(z), \qquad z \in T^{\pm}, \tag{8}$$

$$W_{k1}(t) = \begin{pmatrix} \frac{\Delta_{k1}(t)}{\delta_k(t)} & 0 \\ 0 & \frac{V_{k2}[\alpha(t)]}{\delta_k[\alpha(t)]} \end{pmatrix}, \quad W_{k2}(t) = \begin{pmatrix} 0 & \frac{t[\alpha(t)]^2\Delta_{k2}(t)}{\delta_k(t)} \\ \frac{V_{k1}[\alpha(t)]}{t^2[\alpha(t)]\delta_k[\alpha(t)]} & 0 \end{pmatrix}, \quad Q_k(t) = \begin{pmatrix} \frac{t\cdot Q_{k1}(t)}{\delta_k(t)} \\ \frac{Q_{k2}[\alpha(t)]}{t^2\delta_k[\alpha(t)]} \end{pmatrix},$$

$$\begin{aligned} \Delta_{k1}(t) &= G_{k1}[\alpha(t)]\overline{G_{k1}(t)} - \overline{G_{k2}(t)}G_{k2}[\alpha(t)], & \Delta_{k2}(t) &= A_{k1}[\alpha(t)]\overline{G_{k2}(t)} - \overline{A_{k2}(t)}G_{k1}[\alpha(t)], \\ V_{k1}(t) &= A_{k2}[\alpha(t)]\overline{G_{k1}(t)} - \overline{A_{k1}(t)}G_{k2}[\alpha(t)], & V_{k2}(t) &= A_{k1}[\alpha(t)]\overline{A_{k1}(t)} - \overline{A_{k2}(t)}A_{k2}[\alpha(t)], \\ Q_{k1}(t) &= G_{k1}[\alpha(t)]\overline{g_k(t)} - \overline{G_{k2}(t)}g_k[\alpha(t)], & Q_{k2}(t) &= A_{k2}[\alpha(t)]\overline{g_k(t)} - \overline{A_{k1}(t)}g_k[\alpha(t)]. \end{aligned} \tag{9}$$

Доказательство. Как известно (см., например, [1, 2, 7]), всякую исчезающую на бесконечности кусочно-бианалитическую функцию $F(z)$ с линией скачков L можно представить в виде

$$F(z) = \begin{cases} F^+(z) = \varphi_0^+(z) + \overline{z}\varphi_1^+(z), & z \in T^+, \\ F^-(z) = \varphi_0^-(z) + \overline{z}\varphi_1^-(z), & z \in T^-, \end{cases} \tag{10}$$

где $\varphi_k^+(z)$, $\varphi_k^-(z)$ — аналитические функции соответственно в T^+ и T^-, для которых выполняются условия: $\prod\{\varphi_k^-, \infty\} \geq 1 + k$, $k = 0,\ 1$; здесь $\prod\{\varphi_k^-, \infty\}$ — обозначение порядка функции $\varphi_k^-(z)$ в точке $z = \infty$.

С учетом представления искомой кусочно-бианалитической функции в виде (10) и в силу известных соотношений

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial \overline{z}}, \qquad \frac{\partial}{\partial y} = i\left(\frac{\partial}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial \overline{z}}\right)$$

краевые условия (1) и (2) перепишем в следующем виде:

$$A_{11}(t)\overline{\left(\frac{d\varphi_0^+(t)}{dt} + \overline{t}\frac{d\varphi_1^+(t)}{dt} + \varphi_1^+(t)\right)} + A_{12}(t)\left(\frac{d\varphi_0^+[\alpha(t)]}{dt} + \overline{\alpha(t)}\frac{d\varphi_1^+[\alpha(t)]}{dt} + \varphi_1^+[\alpha(t)]\right) =$$

$$= G_{11}(t)\overline{\left(\frac{d\varphi_0^-(t)}{dt} + \overline{t}\frac{d\varphi_1^-(t)}{dt} + \varphi_1^-(t)\right)} + G_{12}(t)\left(\frac{d\varphi_0^+[\alpha(t)]}{dt} + \overline{\alpha(t)}\frac{d\varphi_1^+[\alpha(t)]}{dt} + \varphi_1^+[\alpha(t)]\right) + g_1(t), \quad (11)$$

$$A_{21}(t)\overline{\left(\frac{d\varphi_0^+(t)}{dt} + \overline{t}\frac{d\varphi_1^+(t)}{dt} - \varphi_1^+(t)\right)} + A_{22}(t)\left(\frac{d\varphi_0^+[\alpha(t)]}{dt} + \overline{\alpha(t)}\frac{d\varphi_1^+[\alpha(t)]}{dt} - \varphi_1^+[\alpha(t)]\right) =$$

$$= G_{21}(t)\overline{\left(\frac{d\varphi_0^-(t)}{dt} + \overline{t}\frac{d\varphi_1^-(t)}{dt} - \varphi_1^-(t)\right)} + G_{22}(t)\left(\frac{d\varphi_0^+[\alpha(t)]}{dt} + \overline{\alpha(t)}\frac{d\varphi_1^+[\alpha(t)]}{dt} - \varphi_1^+[\alpha(t)]\right) + g_2(t). \quad (12)$$

Поскольку во всех точках окружности $L = \{t : |t| = 1\}$ выполняется равенство $t \cdot \overline{t} = 1$, то, используя функции $\Phi_k^+(z)$ и $\Phi_k^-(z)$, задаваемые формулами (8), краевые условия (11) и (12), в свою очередь, можно записать так:

$$tA_{k1}(t)\overline{\Phi_k^+(t)} + [\alpha(t)]^{-1}A_{k2}(t)\Phi_k^+[\alpha(t)] = tG_{k1}(t)\overline{\Phi_k^-(t)} + [\alpha(t)]^{-1}G_{k2}(t)\Phi_k^-[\alpha(t)] + g_k(t), \quad k = 1, 2. \quad (13)$$

Из равенств (13), переходя к комплексно-сопряженным значениям функций, получим

$$t^{-1}\overline{A_{k1}(t)}\Phi_k^+(t) + [\alpha(t)]^2\overline{A_{k2}(t)} \cdot \overline{\alpha(t)\Phi_k^+[\alpha(t)]} =$$

$$= t^{-1}\overline{G_{k1}(t)}\Phi_k^-(t) + [\alpha(t)]^2\overline{G_{k2}(t)} \cdot \overline{\alpha(t)\Phi_k^-[\alpha(t)]} + \overline{g_k(t)}, \qquad k = 1, 2. \quad (14)$$

Подставив всюду в соотношения (13) вместо t выражение $\alpha(t)$ (с учетом условия Карлемана (3)), будем иметь:

$$\alpha^2(t)A_{k1}[\alpha(t)]\overline{\alpha(t)\Phi_k^+[\alpha(t)]} + t^{-1}A_{k2}[\alpha(t)]\Phi_k^+(t) =$$

$$= \alpha^2(t)G_{k1}[\alpha(t)]\overline{\alpha(t)\Phi_k^-[\alpha(t)]} + t^{-1}G_{k2}[\alpha(t)]\Phi_k^-(t) + g_k[\alpha(t)], \qquad k = 1, 2. \quad (15)$$

Далее, с помощью формул (7) введем в рассмотрение аналитические функции $\psi_{k1}^+(z)$, $\psi_{k2}^+(z)$ и $\psi_{k1}^-(z)$, $\psi_{k2}^-(z)$ ($k = 1,\ 2$) соответственно в T^+ и T^-.

Важно заметить, что в силу формул (7) предельные значения функций $\psi_{k1}^\pm(z)$, $\psi_{k2}^\pm(z)$ должны удовлетворять условиям «симметрии»:

$$\psi_{k1}^\pm(t) = \Phi_k^\pm(t), \qquad \psi_{k2}^\pm(t) = \overline{t\Phi_k^\mp(t)}, \qquad \psi_{k2}^\pm[\alpha(t)] = \overline{\alpha(t)\Phi_k^\mp[\alpha(t)]}, \qquad t \in L, \quad k = 1, 2. \quad (16)$$

С учетом формул (16), равенства (14) и (15) запишем в виде следующей системы (при каждом фиксированном значении k):

$$\begin{cases} t^{-1}\overline{A_{k1}(t)}\psi_{k1}^+(t) + [\alpha(t)]^2\overline{A_{k2}(t)}\psi_{k2}^-[\alpha(t)] = \\ = t^{-1}\overline{G_{k1}(t)}\psi_{k1}^-(t) + [\alpha(t)]^2\overline{G_{k2}(t)}\psi_{k2}^+[\alpha(t)] + \overline{g_k(t)}, \\ [\alpha(t)]^2A_{k1}[\alpha(t)]\psi_{k2}^-[\alpha(t)] + t^{-1}A_{k2}[\alpha(t)]\psi_{k1}^+(t) = \\ = [\alpha(t)]^2G_{k1}[\alpha(t)]\psi_{k2}^+[\alpha(t)] + t^{-1}G_{k2}[\alpha(t)]\psi_{k1}^-(t) + g_k[\alpha(t)], \end{cases} \qquad k = 1, 2. \quad (17)$$

Выразив из первого уравнения системы (17) функцию $\psi_{k1}^+(t)$, а из второго уравнения этой системы — функцию $\psi_{k2}^+[\alpha(t)]$, будем иметь:

$$\begin{cases} \psi_{k1}^+(t) = \dfrac{\Delta_{k1}(t)}{\delta_k(t)}\psi_{k1}^-(t) + \dfrac{t[\alpha(t)]^2\Delta_{k2}(t)}{\delta_k(t)}\psi_{k2}^-[\alpha(t)] + \dfrac{tQ_{k1}(t)}{\delta_k(t)}, \\ \psi_{k2}^+[\alpha(t)] = \dfrac{V_{k1}(t)}{t[\alpha(t)]^2\delta_k(t)}\psi_{k1}^-(t) + \dfrac{V_{k2}(t)}{\delta_k(t)}\psi_{k2}^-[\alpha(t)] + \dfrac{Q_{k2}(t)}{[\alpha(t)]^2\delta_k(t)}, \end{cases} \qquad k = 1, 2. \quad (18)$$

Наконец, заменив во втором уравнении системы (18) t на $\alpha(t)$, с учетом условия Карлемана (3) окончательно получим

$$\begin{cases} \psi_{k1}^{+}(t)=\dfrac{\Delta_{k1}(t)}{\delta_k(t)}\psi_{k1}^{-}(t)+\dfrac{t[\alpha(t)]^2\Delta_{k2}(t)}{\delta_k(t)}\psi_{k2}^{-}[\alpha(t)]+\dfrac{tQ_{k1}(t)}{\delta_k(t)}, \\ \psi_{k2}^{+}(t)=\dfrac{V_{k1}[\alpha(t)]}{t^2[\alpha(t)]\delta_k[\alpha(t)]}\psi_{k1}^{-}[\alpha(t)]+\dfrac{V_{k2}[\alpha(t)]}{\delta_k[\alpha(t)]}\psi_{k2}^{-}(t)+\dfrac{Q_{k2}[\alpha(t)]}{t^2\delta_k[\alpha(t)]}, \end{cases} \quad k=1,2. \tag{19}$$

Но система (19) есть «развернутая» форма записи краевого условия (6).

Таким образом, установлено, что при выполнении условий (5) решение исходной задачи K_{41} действительно можно свести к решению двух трехэлементных векторно-матричных задач Римана вида (6) относительно кусочно-аналитических вектор-функций.

Для завершения доказательства осталось показать, как после решения двух векторно-матричных задач Римана вида (6) можно восстановить искомые кусочно-бианалитические функции $F^+(z)$ и $F^-(z)$.

Для этого сначала находим функции $\Phi_k^{\pm}(z)$:

$$\Phi_k^{\pm}(z)=\psi_{k1}^{\pm}(z), \qquad k=1,2,$$

где $\psi_k^{\pm}(z)=\begin{pmatrix}\psi_{k1}^{\pm}(z)\\ \psi_{k2}^{\pm}(z)\end{pmatrix}$ — решение задачи Римана (6) (при фиксированном значении параметра k).

Затем определяем аналитические компоненты $\varphi_k^{+}(z)$, $\varphi_k^{-}(z)$ ($k=0,\ 1$) искомых кусочно-бианалитических функций из следующих двух систем, которые должны выполняться в силу обозначений (8):

$$\begin{cases} z\dfrac{d\varphi_0^{+}(z)}{dz}+\dfrac{d\varphi_1^{+}(z)}{dz}+z\varphi_1^{+}(z)=\Phi_1^{+}(z), \quad z\in T^{+}, \\ z\dfrac{d\varphi_0^{+}(z)}{dz}+\dfrac{d\varphi_1^{+}(z)}{dz}-z\varphi_1^{+}(z)=\Phi_2^{+}(z), \quad z\in T^{+}, \end{cases} \tag{20}$$

$$\begin{cases} z\dfrac{d\varphi_0^{-}(z)}{dz}+\dfrac{d\varphi_1^{-}(z)}{dz}+z\varphi_1^{-}(z)=\Phi_1^{-}(z), \quad z\in T^{-}, \\ z\dfrac{d\varphi_0^{-}(z)}{dz}+\dfrac{d\varphi_1^{-}(z)}{dz}-z\varphi_1^{-}(z)=\Phi_2^{-}(z), \quad z\in T^{-}. \end{cases} \tag{21}$$

Из формул (20) и (21) видно, что функции $\Phi_1^{+}(z)$ и $\Phi_2^{+}(z)$ в точке $z=0$ должны удовлетворять следующему условию:

$$\Phi_1^{+}(0)=\Phi_2^{+}(0)=\frac{d\varphi_1^{+}(0)}{dz}. \tag{22}$$

Решив систему (20) относительно $\varphi_0^{+}(z)$ и $\varphi_1^{+}(z)$, а систему (21) — относительно $\varphi_0^{-}(z)$ и $\varphi_1^{-}(z)$, с учетом соотношений (22) и начального условия (4) будем иметь:

$$\begin{aligned} \varphi_1^{\pm}(z)&=\frac{1}{2z}\left(\Phi_1^{\pm}(z)-\Phi_2^{\pm}(z)\right), \\ \varphi_0^{+}(z)&=\int\limits_{\Gamma^{+}}\frac{1}{2\zeta}\left(\Phi_1^{+}(\zeta)+\Phi_2^{+}(\zeta)-2\frac{d\varphi_1^{+}(\zeta)}{d\zeta}\right)d\zeta, \\ \varphi_0^{-}(z)&=\int\limits_{\Gamma^{-}}\frac{1}{2\zeta}\left(\Phi_1^{-}(\zeta)+\Phi_2^{-}(\zeta)-2\frac{d\varphi_1^{-}(\zeta)}{d\zeta}\right)d\zeta, \end{aligned} \tag{23}$$

где Γ^{+} (Γ^{-}) — произвольная гладкая кривая, лежащая в T^{+} (T^{-}) и соединяющая точки 0 и z (∞ и z).

Таким образом, решение задачи K_{41} можно находить по формуле (5), где функции $\varphi_k^{\pm}(z)$, $k=0,\ 1$, определяются по формулам (23). Теорема полностью доказана.

Из приведенных при доказательстве теоремы 2.1 рассуждений следует, что в случае выполнения условий (5) проблема исследования задачи K_{41} в классах кусочно-бианалитических функций сводится к проблеме исследования двух векторно-матричных задач Римана вида (6).

Из краевых условий (6) видно, что если выполняются условия (5), то целесообразно изучать векторно-матричные задачи Римана вида (6) (а значит, и краевую задачу K_{41}) отдельно в следующих четырех случаях:

I. $\det W_{k1}(t) \neq 0$, $\det W_{k2}(t) \neq 0$, $t \in L$, $k = 1, 2$ (*невырожденный случай*).

II. $\det W_{k1}(t) \neq 0$, $\det W_{k2}(t) \equiv 0$, $t \in L$, $k = 1, 2$ (*1-й полувырожденный случай*).

III. $\det W_{k2}(t) \neq 0$, $\det W_{k1}(t) \equiv 0$, $t \in L$, $k = 1, 2$ (*2-й полувырожденный случай*).

IV. $\det W_{k1}(t) \equiv 0$, $\det W_{k2}(t) \equiv 0$, $t \in L$, $k = 1, 2$ (*вырожденный случай*).

В настоящей заметке ограничимся решением задачи K_{41} в случае **I.**

3. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ K_{41} В НЕВЫРОЖДЕННОМ СЛУЧАЕ

Пусть $\alpha(t)$ — прямой сдвиг контура L, $\delta_k(t) \neq 0$, $\det W_{k1}(t) \neq 0$ и $\det W_{k2}(t) \neq 0$, $t \in L$, $k = 1,\ 2$. Отсюда следует, что $\Delta_{kj}(t) \neq 0$ и $V_{kj}(t) \neq 0$, $t \in L$ ($k = 1,\ 2$; $j = 1,\ 2$).

Рассмотрим далее «развернутую» форму записи краевых условий (6), т.е. систему (19). Зафиксируем значение параметра k и перепишем первое равенство из системы (19) в следующем виде:

$$\psi^+_{k1}(t) = D_{k1}(t)\psi^-_{k1}(t) + q_{k1}(t), \qquad t \in L, \tag{24}$$

где

$$D_{k1}(t) = \frac{\Delta_{k1}(t)}{\delta_k(t)}, \qquad q_{k1}(t) = \frac{t[\alpha(t)]^2\Delta_{k2}(t)}{\delta_k(t)}\psi^-_{k2}[\alpha(t)] + \frac{tQ_{k1}(t)}{\delta_k(t)}. \tag{25}$$

Будем считать временно $q_{k1}(t)$ известной функцией. Тогда равенство (24) (при фиксированном значении параметра k) представляет собой краевое условие обычной скалярной задачи Римана относительно исчезающей на бесконечности кусочно-аналитической функции $\psi_{k1}(z) = \{\psi^+_{k1}(z),\ \psi^-_{k1}(z)\}$ с линией скачков L (см., например, [1, с. 109]).

Пусть $\chi_{k1} = \operatorname{Ind} D_{k1}(t)$ — индекс задачи Римана (24). Как известно (см., например, [1, с. 113]), если $\chi_{k1} \geq 0$, то скалярная задача Римана (24) безусловно разрешима и ее общее решение можно задавать формулой

$$\psi^\pm_{k1}(z) = \frac{X^\pm_{k1}(z)}{2\pi i}\int\limits_L \frac{q_{k1}(\tau)}{X^+_{k1}(\tau)}\frac{d\tau}{\tau - z} + X^\pm_{k1}(z)P_{\chi_{k1}-1}(z), \qquad z \in T^\pm, \tag{26}$$

где $X^\pm_{k1}(z)$ — канонические функции задачи Римана (24), а $P_{\chi_{k1}-1}(z)$ — произвольный многочлен степени не выше $\chi_{k1}-1$. Если же $\chi_{k1} < 0$, то при выполнении следующих $-\chi_{k1}$ условий разрешимости

$$\int\limits_L \frac{q_{k1}(\tau)}{X^+_{k1}(\tau)}\tau^{m-1}d\tau = 0, \qquad m = 1, 2, \ldots, -\chi_{k1}, \tag{27}$$

единственное решение задачи Римана (24) также задается формулой (26), где положено $P_{\chi_{k1}-1}(z) \equiv 0$.

Переходя к пределу при $z \to t \in L$ и с учетом формул Сохоцкого (см., например, [1, с. 38]), а также обозначений (25), из (26) будем иметь:

$$\psi^-_{k1}(t) = -\frac{1}{2}\frac{t[\alpha(t)]^2\Delta_{k2}(t)}{\Delta_{k1}(t)}\psi^-_{k2}[\alpha(t)] + \frac{X^-_{k1}(t)}{2\pi i}\int\limits_L \frac{\tau[\alpha(\tau)]^2\Delta_{k2}(\tau)}{\delta_k(\tau)X^+_{k1}(\tau)}\frac{\psi^-_{k2}[\alpha(\tau)]d\tau}{\tau - t} -$$

$$-\frac{1}{2}\frac{tQ_{k1}(t)}{\Delta_{k1}(t)} + \frac{X^-_{k1}(t)}{2\pi i}\int\limits_L \frac{\tau Q_{k1}(\tau)}{\delta_k(\tau)X^+_{k1}(\tau)}\frac{d\tau}{\tau - t} + X^-_{k1}(t)P_{\chi_{k1}-1}(t). \tag{28}$$

Поскольку $\psi^-_{k2}(t)$ — граничное значение аналитической в T^- и исчезающей на бесконечности функции $\psi^-_{k2}(z)$, то справедливо равенство (см., например, [1, с. 40]):

$$\frac{1}{2}\psi^-_{k2}(t) = -\frac{1}{2\pi i}\int\limits_L \frac{\psi^-_{k2}(\tau)d\tau}{\tau - t}, \qquad t \in L. \tag{29}$$

Из (29), в свою очередь, вытекает следующее равенство (см., например, [8, с. 117]):

$$\frac{1}{2}\psi_{k2}^{-}[\alpha(t)] = -\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{L}\frac{\psi_{k2}^{-}[\alpha(\tau)]\alpha'(\tau)d\tau}{\alpha(\tau)-\alpha(t)}, \qquad t\in L. \tag{30}$$

Далее, с учетом (30) из формулы (28) будем иметь:

$$\psi_{k1}^{-}(t) = -\frac{t[\alpha(t)]^2\Delta_{k2}(t)}{\Delta_{k1}(t)}\psi_{k2}^{-}[\alpha(t)] + \int\limits_{L} B_{k1}(t,\tau)\psi_{k2}^{-}[\alpha(\tau)]d\tau + M_{k1}(t), \tag{31}$$

где

$$B_{k1}(t,\tau) = \frac{X_{k1}^{-}(t)}{2\pi i}\left\{\frac{\tau[\alpha(\tau)]^2\Delta_{k2}(\tau)}{\delta_k(\tau)X_{k1}^{+}(\tau)}\frac{1}{\tau-t} - \frac{t[\alpha(t)]^2\Delta_{k2}(t)}{\delta_k(t)X_{k1}^{+}(t)}\frac{\alpha'(\tau)}{\alpha(\tau)-\alpha(t)}\right\}, \tag{32}$$

$$M_{k1}(t) = -\frac{1}{2}\frac{tQ_{k1}(t)}{\Delta_{k1}(t)} + \frac{X_{k1}^{-}(t)}{2\pi i}\int\limits_{L}\frac{\tau Q_{k1}(\tau)}{\delta_k(\tau)X_{k1}^{+}(\tau)}\frac{d\tau}{\tau-t} + X_{k1}^{-}(t)P_{\chi_{k1}-1}(t).$$

Нетрудно проверить, что при сделанных в условии задачи K_{41} предположениях относительно заданных на контуре L функций $A_{kj}(t)$, $G_{kj}(t)$, $g_j(t)$ ($k=1,2;\ j=1,2$) и $\alpha(t)$, будем иметь: $M_{k1}(t)\in H(L)$, а $B_{k1}(t,\tau)\in H_*(L\times L)$, т.е. $B_{k1}(t,\tau)$ — фредгольмовы ядра.

Подставив в формулу (31) вместо t функцию сдвига $\alpha(t)$, получим

$$\psi_{k1}^{-}[\alpha(t)] = -\frac{t^2[\alpha(t)]\Delta_{k2}[\alpha(t)]}{\Delta_{k1}[\alpha(t)]}\psi_{k2}^{-}(t) + \int\limits_{L} B_{k1}[\alpha(t),\ \alpha(\tau)]\psi_{k2}^{-}(\tau)\alpha'(\tau)d\tau + M_{k1}[\alpha(t)]. \tag{33}$$

Наконец, подставив в правую часть второго равенства системы (19) вместо функции $\psi_{k1}^{-}[\alpha(t)]$ ее значение, задаваемое формулой (33), будем иметь:

$$\psi_{k2}^{+}(t) = D_{k2}(t)\psi_{k2}^{-}(t) + \int\limits_{L} B_{k2}(t,\tau)\psi_{k2}^{-}(\tau)d\tau + q_{k2}(t), \qquad t\in L, \tag{34}$$

где

$$D_{k2}(t) = \frac{\beta_k(t)}{\Delta_{k1}[\alpha(t)]}, \qquad \beta_k(t) = A_{k1}(t)\overline{G_{k1}[\alpha(t)]} - \overline{A_{k2}[\alpha(t)]}G_{k2}(t),$$

$$B_{k2}(t,\tau) = \frac{V_{k1}[\alpha(t)]}{t^2[\alpha(t)]\delta_k[\alpha(t)]}B_{k1}[\alpha(t),\alpha(\tau)]\alpha'(\tau), \tag{35}$$

$$q_{k2}(t) = \frac{V_{k1}[\alpha(t)]}{t^2[\alpha(t)]\delta_k[\alpha(t)]}M_{k1}[\alpha(t)] + \frac{Q_{k2}[\alpha(t)]}{t^2\delta_k[\alpha(t)]}.$$

Итак, если выполняется условие

$$\beta_k(t) = A_{k1}(t)\overline{G_{k1}[\alpha(t)]} - \overline{A_{k2}[\alpha(t)]}G_{k2}(t)\neq 0, \qquad t\in L \tag{36}$$

(т.е. $D_{k2}(t)\neq 0$, $t\in L$), то равенство (34) (при каждом фиксированном значении параметра k) представляет собой краевое условие хорошо изученной *обобщенной скалярной задачи Римана нормального типа* относительно исчезающей на бесконечности кусочно-аналитической функции $\psi_{k2}(z) = \{\psi_{k2}^{+}(z),\ \psi_{k2}^{-}(z)\}$ (см., например, [1, с. 365] или [2, с. 40]).

Таким образом, установлена справедливость следующего утверждения.

Теорема 3.1. *Если на* $L=\{\,t:|t|=1\,\}$ *выполняются условия* (5), (36), $\alpha(t)$ — прямой сдвиг контура L *и* $\det W_{k1}(t)\neq 0$, $\det W_{k2}(t)\neq 0$, $t\in L$, $k=1,\ 2$, *то решение задачи* K_{41} *сводится к последовательному решению двух обобщенных скалярных задач Римана вида* (34) *и двух обычных скалярных задач Римана вида* (24) *в классах исчезающих на бесконечности кусочно-аналитических функций с линией скачков* L. *При этом задача* K_{41} *разрешима тогда и только тогда, когда одновременно разрешимы краевые задачи* (34), (24) *и выполнены условия* (22).

Замечание 3.1. Важно отметить, что, при выполнении условий теоремы 3.1, задача K_{41} будет *нетеровой*. Это следует из того, что в рассматриваемом случае скалярные задачи Римана вида (24) и (34) являются нетеровыми.

Библиографический список

1. *Гахов Ф.Д.* Краевые задачи. М.: Наука, 1977. 640 с.
2. *Расулов К.М.* Краевые задачи для полианалитических функций и некоторые их приложения. Смоленск: Изд-во СГПУ, 1998. 344 с.
3. *Анищенкова Н.Г.* Трехэлементные краевые задачи типа Римана для бианалитических функций: Дис. ... канд. физ.-мат. наук. Смоленск, 2002. 120 с.
4. *Анищенкова Н.Г., Зверович Э.И., Расулов К.М.* О решении обобщенной краевой задачи типа Римана для бианалитических функций в круге // Докл. НАН Беларуси. 2002. Т. 45, № 6. С. 22–25.
5. *Медведев Ю.А.* Четырехэлементные краевые задачи типа задачи Римана в классах бианалитических функций: Дис. ... канд. физ.-мат. наук. Смоленск, 2007. 115 с.
6. *Медведев Ю.А., Расулов К.М.* О решении первой четырехэлементной краевой задачи типа Римана для бианалитических функций в случае окружности // Исследования по краевым задачам комплексного анализа и дифференциальным уравнениям. Смоленск: Изд-во Смоленск. ун-та, 2005. Вып. 6. С. 83–93.
7. *Векуа Н.П.* Системы сингулярных интегральных уравнений. М.: Наука, 1970. 379 с.
8. *Литвинчук Г.С.* Краевые задачи и сингулярные интегральные уравнения со сдвигом. М.: Наука, 1977. 448 с.

УДК 517.5

О НЕСЕПАРАБЕЛЬНЫХ ВСПЛЕСК-ФУНКЦИЯХ ТИПА МЕЙЕРА В ПРОСТРАНСТВАХ БЕСОВА И ЛИЗОРКИНА – ТРИБЕЛЯ

С.А. Гарьковская

Воронежский государственный университет,
кафедра функционального анализа и операторных уравнений
E-mail: GarkovskayaSA@mail.ru

Статья посвящена доказательству возможности использования несепарабельных всплеск-функций типа Мейера в качестве разбиения единицы в определении шкал пространств Бесова и Лизоркина – Трибеля. Этот результат является первым шагом в доказательстве безусловной базисности вышеназванных всплеск-функций в рассматриваемых шкалах.

Ключевые слова: всплеск, несепарабельные всплески, пространства Бесова, пространства Лизоркина – Трибеля, разбиение единицы.

Nonseparable Wavelets of Meyer Type in Besov and Lizorkin – – Triebel Spaces

S.A. Garkovskaya

Voronezh State University,
Chair of Functional Analysis and Operator Equations
E-mail: GarkovskayaSA@mail.ru

It is proved that Fourier transforms of nonseparable wavelets of Meyer type can be used as decomposition of unity in definition of Besov and Lizorkin – Triebel spaces. The result is the first step in the proof of unconditional basisness of above mentioned wavelets in scales under consideration.

Key words: wavelet, nonseparable wavelets, Besov spaces, Lizorkin – Triebel spaces, decomposition of unity.

1. ОСНОВНЫЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ И ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Определение 1 [1, с. 93]. Совокупность замкнутых пространств $V_j \subset L_2(\mathbb{R}^n)$, $j \in \mathbb{Z}$, называется *кратномасштабным анализом* в $L_2(\mathbb{R}^n)$ с матричным коэффициентом расширения M, если выполнены следующие условия (аксиомы):

MR1. $V_j \subset V_{j+1}$ для всех $j \in \mathbb{Z}$;

MR2. $\bigcup\limits_{j\in\mathbb{Z}} V_j$ плотно в $L_2(\mathbb{Z})$;

MR3. $\bigcap\limits_{j\in\mathbb{Z}} V_j = \{0\}$;

MR4. $f \in V_0 \iff f\left(M^j \cdot\right) \in V_j$ для всех $j \in \mathbb{Z}$;

MR5. существует функция $\varphi \in V_0$, такая что последовательность $\{\varphi(\cdot + n)\}_{n\in\mathbb{Z}}$ образует базис Рисса в V_0.

Функция φ называется *масштабирующей*. Если масштабирующая функция некоторого кратномасштабного анализа не является тензорным произведением функций одной переменной, то такой кратномасштабный анализ называют *несепарабельным*.