



УДК 534.1; 539.3

МОДЕЛИРОВАНИЕ ДВИЖЕНИЯ СОСТАВНОЙ УПРУГОЙ СИСТЕМЫ

М.В. Борисов, А.А. Авраменко

Самарский государственный аэрокосмический университет,
кафедра теоретической механики
E-mail: borisov.makson@rambler.ru, avramenko_a_a@mail.ru

Целью работы является получение математической модели движения составной упругой системы. Поиск собственных форм и частот предлагается проводить путем разложения колебаний по формам неподвижных элементов. Это позволяет преобразовать уравнения движения в частных производных в обыкновенные дифференциальные уравнения. Проведено моделирование движения космического аппарата, в состав которого входят упругие элементы большой протяженности (панели солнечных батарей).

Ключевые слова: составная упругая система, собственные частоты колебаний, собственные формы колебаний, дифференциальные уравнения движения, упругий космический аппарат, панели солнечных батарей, метод Релея – Ритца, метод Фурье, принцип Гамильтона – Остроградского.

ВВЕДЕНИЕ

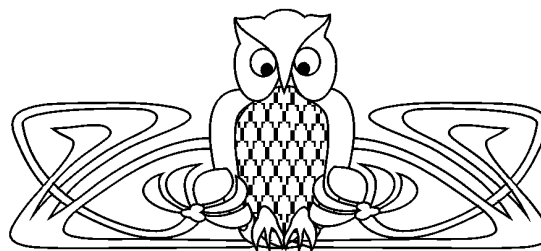
Тенденции увеличения размеров деформируемых конструкций, уменьшения их масс, жесткости и ряд других факторов требуют новых подходов моделирования сложных механических систем, развития методов их качественного анализа, численного интегрирования.

В изданных на данный момент публикациях основное внимание уделяется исследованию стационарных вращательных движений упругих систем или движения вокруг центра масс системы [1–5]. Так, в работе [1] рассматривается задача о геоцентрической стабилизации космического аппарата (КА) с управляемой солнечной батареей, движущегося по круговой орбите. Расчетная модель аппарата представлена в виде абсолютно жесткого тела (контейнера) с упруго связанными с ним посредством сферических шарниров панелей солнечных батарей (ПСБ), которые моделируются недеформируемыми стержнями. Однако данный подход к моделированию может быть использован на ранних этапах исследования движения КА с ПСБ. Поскольку размер ПСБ велик, а их конструкция не позволяет рассматривать их как твердые тела, то дифференциальные уравнения движения ПСБ будут представлять собой уравнения в частных производных как для тел с распределенными параметрами. В данной работе предлагается метод получения более точной математической модели движения КА с ПСБ. При этом дифференциальные уравнения движения не содержат частных производных.

1. СОСТАВЛЕНИЕ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ДВИЖЕНИЯ СОСТАВНОЙ УПРУГОЙ СИСТЕМЫ

1.1. Определение собственных форм и частот составной упругой системы

Сложная упругая система представляет собой конструкцию, состоящую из стержневых элементов, пластин и иных элементов, которые в пределах достаточно малых деформаций могут рассматриваться как упругие. Результатом взаимодействия упругой конструкции с прочими подсистемами и с внешней средой являются ее колебания. Важным этапом исследования динамического поведения разрабатываемой системы является определение динамических характеристик ее упругой конструкции, к числу которых относятся собственные частоты и формы колебаний. Обычно упругая конструкция представляет собой сложную систему, составленную из относительно более простых подконструкций, механически соединенных между собой и взаимодействующих в процессе совместных колебаний. Для моделирования движения подобной системы предлагается рассматривать систему по частям с последующим синтезом результатов, полученных для каждой части конструкции.



Modeling of Motion of the Complex Elastic System

M.V. Borisov, A.A. Avramenko

Samara State Aerospace University,
Chair of Theoretical Mechanics
E-mail: borisov.makson@rambler.ru, avramenko_a_a@mail.ru

The purpose of article is a receipt of mathematical model of motion of the complex elastic system. The normal modes and frequencies are searched by decomposition of vibrations on the modes of stationary elements of the system. It allows to transform partial differential equations of motion in ordinary differential equations. The motion of a space craft which consists of elastic large size elements (solar panels) is modeled.

Key words: complex elastic system, normal modes and frequency, differential equation of motion, elastic spacecraft, solar panels, Reyleigh – Ritz method, Fourier method, principle of Hamilton – Ostrogradskii.



Для решения поставленной задачи предлагается использовать комбинацию методов Релея – Ритца и Фурье [6]. Согласно методу Релея – Ритца, предполагается известным, что в числе движений, реализуемых в системе, при надлежащем образом подобранных начальных условиях существуют главные колебания.

Векторы перемещений отдельных элементов системы представляются в виде

$$f(x, t) = F(x) \sin(\omega t + \varepsilon). \quad (1.1)$$

Здесь x — координата характерного размера элемента, $F(x)$ — главная форма колебания, ω — собственная частота.

Для определения собственных форм и частот колебаний системы и дальнейшего получения дифференциальных уравнений предлагается использовать принцип Гамильтона – Остроградского [7]:

$$S = \int_{t_1}^{t_2} (T - \Pi - U) dt. \quad (1.2)$$

Здесь T — кинетическая энергия системы, Π — потенциальная энергия внешних сил, U — потенциальная энергия упругой деформации элемента.

Представления для векторов перемещений (1.1) подставляются в выражение (1.2). Берется интеграл по времени на промежутке, равному периоду. В результате получаем

$$S = \omega^2 \pi T - \pi \Pi - \pi U. \quad (1.3)$$

Далее воспользуемся методом Фурье. Главные формы колебаний отдельных элементов системы представляются в виде

$$F(x) = \sum_n d_n X_n(x), \quad (1.4)$$

$$F(x, y) = \sum_{m,n} d_{m,n} X_m(x) Y_n(y). \quad (1.5)$$

Разложение (1.4) — для стержня, (1.5) — для пластины.

Функции $X_m(x), Y_n(y)$ — базисные функции, т.е. известные функции, подбираемые в соответствии с краевыми условиями задачи. $d_n, d_{m,n}$ — параметры, значения которых после подстановки (1.4) и (1.5) в выражение функционала (1.3) определяются из условий минимума функционала S .

В качестве базисных функций предлагается использовать собственные формы колебаний однородного стержня при тех же условиях закрепления, что и для исследуемой системы [8]. В приближенном решении число собственных форм может быть взято конечным и часто весьма небольшим. Это сводит задачу к рассмотрению системы с конечным числом степеней свободы и исключает из рассмотрения весьма трудно учитываемые колебания высоких частот. При моделировании движения рассматриваемой системы ограничимся двумя формами в разложениях (1.4) и (1.5).

Функции X представляют собой собственные формы колебаний стержня, жестко защемленного с одного конца:

$$X_n(x) = \left(\cosh \frac{k_n l x}{l} - \cos \frac{k_n l x}{l} \right) + C_n \left(\sinh \frac{k_n l x}{l} - \sin \frac{k_n l x}{l} \right), \quad (1.6)$$

где $C_n = -\frac{\cosh(k_n l) + \cos(k_n l)}{\sinh(k_n l) + \sin(k_n l)}$. Величины $k_n l$ определяются из соотношения $\cos(k_n l) \cosh(k_n l) = -1$.

Функции Y представляют собой собственные формы колебаний стержня со свободными концами

$$Y_n(y) = \left(\cosh \frac{k_n l y}{l} + \cos \frac{k_n l y}{l} \right) + C_n \left(\sinh \frac{k_n l y}{l} + \sin \frac{k_n l y}{l} \right), \quad (1.7)$$

где $C_n = -\frac{\cosh(k_n l) - \cos(k_n l)}{\sinh(k_n l) - \sin(k_n l)}$. Величины $k_n l$ определяются из соотношения $\cos(k_n l) \cosh(k_n l) = 1$.

Формы колебаний пластины представлены как произведение форм колебаний жестко защемленного стержня (1.6) и свободного стержня (1.7). Это соответствует способу закрепления пластины в рассматриваемой системе.



Выражения (1.4) и (1.5) подставляются в функционал (1.2). При этом необходимо учесть, что собственные формы колебаний (1.6) и (1.7) являются ортогональными.

Неизвестные коэффициенты в разложениях (1.4) и (1.5) находятся из условия минимума функционала (1.3): $\frac{\partial S}{\partial d_k} = 0$, $k = \overline{1, n}$.

В результате получаем линейную систему уравнений относительно неизвестных коэффициентов d_k . Требование обращения в нуль ее определителя приводит к частотному уравнению относительно ω_k^2 . Каждому из значений ω_k^2 соответствует система значений коэффициентов d_k , определенная с точностью до произвольного множителя.

Система полученных коэффициентов позволяет оценить вклад каждой учитываемой формы собственных колебаний. С помощью полученных частот и коэффициентов разложения восстанавливаются искомые формы колебаний.

1.2. Вывод дифференциальных уравнений движения системы

Для получения системы дифференциальных уравнений движения представим упругие перемещения в виде разложения

$$f(x, t) = d(t)F(x). \quad (1.8)$$

В данных разложениях функции $F(x)$ — формы колебаний, полученные из (1.4) и (1.5).

Из принципа Гамильтона – Остроградского:

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} (\delta T - \delta \Pi - \delta U) dt = 0. \quad (1.9)$$

Распишем каждые вариации, принимая коэффициенты, зависящие от времени в (1.8), за обобщенные координаты: $q(t) = d(t)$. $T = \sum_i T_i$ — сумма кинетических энергий отдельных элементов системы.

$$\delta T = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \delta \dot{q}_i + \frac{\partial T}{\partial q_i} \delta q_i. \quad (1.10)$$

Найдем интеграл по времени от (1.10):

$$\begin{aligned} \int_{t_0}^{t_1} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \delta \dot{q}_i + \frac{\partial T}{\partial q_i} \delta q_i \right) dt &= \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \delta q_i \Big|_{t_0}^{t_1} - \int_{t_0}^{t_1} (\delta q_i) d \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) + \int_{t_0}^{t_1} \frac{\partial T}{\partial q_i} \delta q_i dt = \\ &= - \int_{t_0}^{t_1} \left(\frac{\partial^2 T}{\partial \dot{q}_i^2} \ddot{q}_i + \frac{\partial^2 T}{\partial \dot{q}_i \partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial^2 T}{\partial \dot{q}_i \partial t} + \frac{\partial T}{\partial q_i} \right) \delta q_i dt. \end{aligned} \quad (1.11)$$

Для потенциальной энергии:

$$\delta \Pi = \frac{\partial \Pi}{\partial q_i} \delta q_i. \quad (1.12)$$

Здесь также, как и для кинетической энергии под Π понимается сумма потенциальных энергий отдельных элементов системы, т.е. $\Pi = \sum_i \Pi_i$.

Для энергии упругой деформации:

$$\delta U = \frac{\partial U}{\partial q_i} \delta q_i. \quad (1.13)$$

Аналогично под U понимается сумма энергий отдельных элементов системы, т.е. $U = \sum_i U_i$.

Поскольку вариации независимы, то для того чтобы выражение (1.9) обращалось в нуль, необходимо, чтобы выражения перед вариациями обращались в нуль. В результате подстановки (1.11)–(1.13) в (1.9) получаем систему дифференциальных уравнений:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial \dot{q}_i^2} \ddot{q}_i + \frac{\partial^2 T}{\partial \dot{q}_i \partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial^2 T}{\partial \dot{q}_i \partial t} + \frac{\partial T}{\partial q_i} + \frac{\partial \Pi}{\partial q_i} + \frac{\partial U}{\partial q_i} = 0. \quad (1.14)$$

Уравнение (1.14) представляет собой замкнутую систему дифференциальных уравнений, содержащих только обыкновенные производные по времени. Уравнений столько, сколько неизвестных коэффициентов в разложении (1.8). Для каждой собственной частоты будет своя система (1.14).



2. МОДЕЛИРОВАНИЕ ДВИЖЕНИЯ КА ПРИ РАСКРЫТИИ ПСБ

Применим описанный в разд. 1 метод моделирования движения составной упругой системы для исследования движения космического аппарата (КА), в состав которого входят панели солнечных батарей (ПСБ).

Решение задачи исследования движения КА при раскрытии ПСБ будем проводить в два этапа. На первом этапе — *раскрытие ПСБ* — рассмотрим движения ПСБ как системы твердых пластин (створок), соединенных шарнирами. На втором этапе — *фиксация ПСБ* — рассмотрим движение КА при колебаниях ПСБ, возникающих под воздействием импульсных нагрузок, появляющихся в момент фиксации частей ПСБ.

2.1. Раскрытие ПСБ

Построение математической модели процесса раскрытия ПСБ является первым и важным шагом. Модель должна быть в разумной степени адекватна физическому процессу и не быть слишком громоздкой. При решении поставленной задачи использовались следующие допущения:

- 1) фиксация створок происходит мгновенно и одновременно,
- 2) корпус КА совершает инерциальное движение,
- 3) створки ПСБ — абсолютно твердые тела.

Рассмотрим ПСБ, состоящую из трех створок (рис. 2.1).

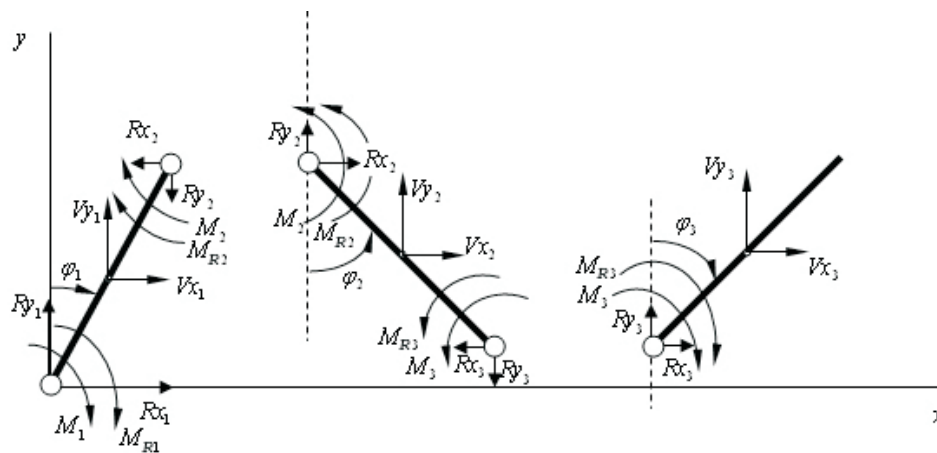


Рис. 2.1. Расчетная схема раскрытия ПСБ

На рис. 2.1 приняты следующие обозначения: $Rx_1, Rx_2, Rx_3, Ry_1, Ry_2, Ry_3$ — реакции в шарнирах в процессе раскрытия, M_1, M_2, M_3 — внешний момент в створках, M_{R1}, M_{R2}, M_{R3} — удерживающий момент в шарнирах при фиксации створок.

Для составления дифференциальных уравнений, моделирующих раскрытие ПСБ, воспользуемся уравнением Даламбера – Лагранжа [9].

$$\begin{cases} m_1 \ddot{x}_1 = Rx_1 - Rx_2, \\ m_1 \ddot{y}_2 = Ry_1 - Ry_2, \\ m_2 \ddot{x}_2 = Rx_2 - Rx_3, \\ m_2 \ddot{y}_2 = Ry_2 - Ry_3, \\ m_3 \ddot{x}_3 = Rx_3, \\ m_3 \ddot{y}_3 = Ry_3, \\ J_1 \ddot{\varphi}_1 = (Rx_1 + Rx_2) \frac{l_1}{2} \cos(\varphi_1) - (Ry_1 + Ry_2) \frac{l_1}{2} \sin(\varphi_1) - (M_1 + M_2) - (M_{R1} \delta_1 + M_{R2} \delta_2), \\ J_2 \ddot{\varphi}_2 = -(Rx_2 + Rx_3) \frac{l_2}{2} \cos(\varphi_2) - (Ry_2 + Ry_3) \frac{l_2}{2} \sin(\varphi_2) + (M_2 + M_3) + (M_{R2} \delta_2 + M_{R3} \delta_3), \\ J_3 \ddot{\varphi}_3 = Rx_3 \frac{l_3}{2} \cos(\varphi_3) - Ry_3 \frac{l_3}{2} \sin(\varphi_3) - M_3 - M_{R3} \delta_3. \end{cases} \quad (2.1)$$



Здесь $\delta_i = \delta_i(\varphi_i)$ — функция переключения, отражающая факт фиксации створок ПСБ. $\delta_i = 0$ в процессе раскрытия створки. $\delta_i = 1$ при фиксации створки ($\varphi_i = \pi/2$).

Систему (2.1) необходимо дополнить уравнениями связи, отражающими тот факт, что общие точки смежных панелей имеют одинаковые координаты, скорости, ускорения:

$$\begin{cases} \ddot{x}_1 - \frac{l_1}{2}\ddot{\varphi}_1 \cos(\varphi_1) + \frac{l_1}{2}\dot{\varphi}_1^2 \sin(\varphi_1) = 0, \\ \ddot{y}_1 + \frac{l_1}{2}\ddot{\varphi}_1 \sin(\varphi_1) + \frac{l_1}{2}\dot{\varphi}_1^2 \cos(\varphi_1) = 0, \\ \ddot{x}_1 + \frac{l_1}{2}\ddot{\varphi}_1 \cos(\varphi_1) - \frac{l_1}{2}\dot{\varphi}_1^2 \sin(\varphi_1) = \ddot{x}_2 - \frac{l_2}{2}\ddot{\varphi}_2 \cos(\varphi_2) + \frac{l_2}{2}\dot{\varphi}_2^2 \sin(\varphi_2), \\ \ddot{y}_1 - \frac{l_1}{2}\ddot{\varphi}_1 \sin(\varphi_1) - \frac{l_1}{2}\dot{\varphi}_1^2 \cos(\varphi_1) = \ddot{y}_2 + \frac{l_2}{2}\ddot{\varphi}_2 \sin(\varphi_2) + \frac{l_2}{2}\dot{\varphi}_2^2 \cos(\varphi_2), \\ \ddot{x}_2 + \frac{l_2}{2}\ddot{\varphi}_2 \cos(\varphi_2) - \frac{l_2}{2}\dot{\varphi}_2^2 \sin(\varphi_2) = \ddot{x}_3 - \frac{l_3}{2}\ddot{\varphi}_3 \cos(\varphi_3) + \frac{l_3}{2}\dot{\varphi}_3^2 \sin(\varphi_3), \\ \ddot{y}_2 - \frac{l_2}{2}\ddot{\varphi}_2 \sin(\varphi_2) - \frac{l_2}{2}\dot{\varphi}_2^2 \cos(\varphi_2) = \ddot{y}_3 + \frac{l_3}{2}\ddot{\varphi}_3 \sin(\varphi_3) + \frac{l_3}{2}\dot{\varphi}_3^2 \cos(\varphi_3). \end{cases} \quad (2.2)$$

Таким образом получена система 15 дифференциальных уравнений, линейных относительно неизвестных вторых производных и реакций связей. Данная система может быть проинтегрирована любым численным методом. Фиксация смежных створок между собой учитывается дополнительными связями

$$\begin{cases} \ddot{\varphi}_1 \delta_1 = 0, \\ (\ddot{\varphi}_1 - \ddot{\varphi}_2) \delta_2 = 0, \\ (\ddot{\varphi}_2 - \ddot{\varphi}_3) \delta_3 = 0. \end{cases} \quad (2.3)$$

Решая систему уравнений (2.1)–(2.3) находим скорости ПСБ в момент фиксации. Значения конечных скоростей необходимы для определения ударных импульсов в момент фиксации створок.

2.2. Фиксация створок ПСБ

Процесс фиксации смежных створок характеризуется потерей их относительной скорости движения, возникновением ударных реакций во всех шарнирных соединениях и скачкообразным изменением

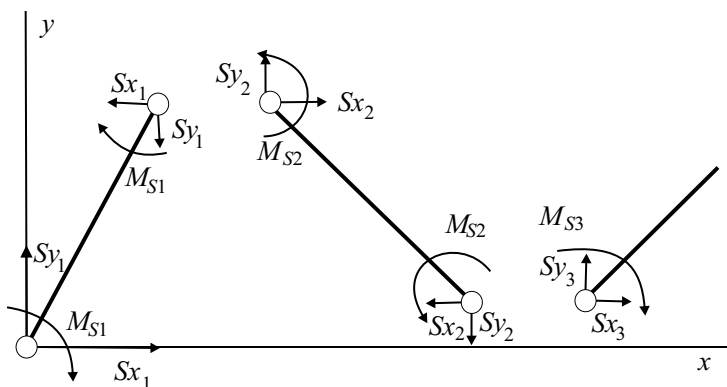


Рис. 2.2. Расчетная схема фиксации створок ПСБ

угловых и линейных скоростей всех створок. Расчетная схема фиксации створок ПСБ показана на рис. 2.2.

Процесс наложения мгновенных связей можно описать в соответствии с теорией удара следующими соотношениями, характеризующими изменение количества движения и момент количества движения системы [9].

$$\begin{cases} m_1(\dot{x}_{1k} - \dot{x}_{10}) = Sx_1 - Sx_2, \\ m_1(\dot{y}_{1k} - \dot{y}_{10}) = Sy_1 - Sy_2, \\ m_2(\dot{x}_{2k} - \dot{x}_{20}) = Sx_2 - Sx_3, \\ m_2(\dot{y}_{2k} - \dot{y}_{20}) = Sy_2 - Sy_3, \\ m_3(\dot{x}_{3k} - \dot{x}_{30}) = Sx_3, \\ m_3(\dot{y}_{3k} - \dot{y}_{30}) = Sy_3, \\ J_1(\dot{\varphi}_{1k} - \dot{\varphi}_{10}) = (Sx_1 + Sx_2)\frac{l_1}{2} \cos(\varphi_1) - (Sy_1 + Sy_2)\frac{l_1}{2} \sin(\varphi_1) - M_{S1}\delta_1 - M_{S2}\delta_2, \\ J_2(\dot{\varphi}_{2k} - \dot{\varphi}_{20}) = -(Sx_2 + Sx_3)\frac{l_2}{2} \cos(\varphi_2) - (Sy_2 + Sy_3)\frac{l_2}{2} \sin(\varphi_2) - M_{S2}\delta_2 - M_{S3}\delta_3, \\ J_3(\dot{\varphi}_{3k} - \dot{\varphi}_{30}) = Sx_3\frac{l_3}{2} \cos(\varphi_3) - Sy_3\frac{l_3}{2} \sin(\varphi_3) - M_{S3}\delta_3. \end{cases} \quad (2.4)$$



Здесь $\dot{x}_{i0}, \dot{y}_{i0}, \dot{\varphi}_{i0}, \dot{x}_{k0}, \dot{y}_{k0}, \dot{\varphi}_{k0}$ — скорости створок до и после фиксации, Sx_i, Sy_i — импульсные реакции в i -м шарнире при фиксации, M_{S_i} — ударные импульсные моменты, возникающие в зафиксированном либо фиксирующемся i -м шарнире при фиксации одной из створок. Дополнительно воспользуемся уравнениями связи, аналогичными (2.2), но только для скоростей общих точек:

$$\begin{cases} \dot{x}_{1k} - \frac{l_1}{2} \dot{\varphi}_{1k} \cos(\varphi_1) = 0, \\ \dot{y}_{1k} + \frac{l_1}{2} \dot{\varphi}_{1k} \sin(\varphi_1) = 0, \\ \dot{x}_{1k} + \frac{l_1}{2} \dot{\varphi}_{1k} \cos(\varphi_1) = \dot{x}_{2k} - \frac{l_2}{2} \dot{\varphi}_{2k} \cos(\varphi_2), \\ \dot{y}_{1k} - \frac{l_1}{2} \dot{\varphi}_{1k} \sin(\varphi_1) = \dot{y}_{2k} + \frac{l_2}{2} \dot{\varphi}_{2k} \sin(\varphi_2), \\ \dot{x}_{2k} + \frac{l_2}{2} \dot{\varphi}_{2k} \cos(\varphi_2) = \dot{x}_{3k} - \frac{l_3}{2} \dot{\varphi}_{3k} \cos(\varphi_3), \\ \dot{y}_{2k} - \frac{l_2}{2} \dot{\varphi}_{2k} \sin(\varphi_2) = \dot{y}_{3k} + \frac{l_3}{2} \dot{\varphi}_{3k} \sin(\varphi_3). \end{cases} \quad (2.5)$$

Уравнения связи, показывающие, что угловые скорости зафиксированных между собой створок равны (отсутствует вращение i -й створки относительно $i + 1$ -й), имеют вид

$$\begin{cases} \dot{\varphi}_1 \delta_1 = 0, \\ (\dot{\varphi}_1 - \dot{\varphi}_2) \delta_2 = 0, \\ (\dot{\varphi}_2 - \dot{\varphi}_3) \delta_3 = 0. \end{cases} \quad (2.6)$$

При решении системы уравнений (2.1)–(2.3) с начальными условиями: $x_{10} = 0$ м, $\dot{x}_{10} = 0.1$ м/с, $x_{20} = 0$ м, $\dot{x}_{20} = 0.1$ м/с, $x_{30} = 0$ м, $\dot{x}_{30} = 0.1$ м/с, $y_{10} = l_1/2$ м, $\dot{y}_{10} = 0.1$ м/с, $y_{20} = l_2/2$ м, $\dot{y}_{20} = 0.1$ м/с, $y_{30} = l_3/2$ м, $\dot{y}_{30} = 0.1$ м/с, $\varphi_{10} = 0$ рад, $\dot{\varphi}_{10} = 0.1$ рад/с, $\varphi_{20} = 0$ рад, $\dot{\varphi}_{20} = 0.1$ рад/с, $\varphi_{30} = 0$ рад, $\dot{\varphi}_{30} = 0.1$ рад/с.

Получаются следующие значения скоростей в момент фиксации створок ПСБ: $\dot{x}_{10} = 0$ м/с, $\dot{x}_{20} = 0$ м/с, $\dot{x}_{30} = 0$ м/с, $\dot{y}_{10} = -0.2426$ м/с, $\dot{y}_{20} = -0.2426$ м/с, $\dot{y}_{30} = -0.2426$ м/с, $\dot{\varphi}_{10} = 0.097$ рад/с, $\dot{\varphi}_{20} = 0.097$ рад/с, $\dot{\varphi}_{30} = 0.097$ рад/с.

Решая систему уравнений (2.4)–(2.6) с учетом полученных значений скоростей, находим ударные реакции, возникающие в процессе фиксации створок ПСБ: $Sx_1 = 0$ Нс, $Sy_1 = 131.06$ Нс, $Sx_2 = 0$ Нс, $Sy_2 = 65.53$ Нс, $Sx_3 = 0$ Нс, $Sy_3 = 80.69$ Нс.

Поскольку КА, имеющий в своей конструкции ПСБ, можно отнести к сложной упругой системе, то для исследования его движения после раскрытия ПСБ используем подход, предложенный в разд. 1.

Рассмотрим конструкцию КА после раскрытия ПСБ, представленную на рис. 2.3. В качестве упругих элементов выступают стержень и пластина (ПСБ). Характеристики исследуемой системы представлены в табл. 2.1.

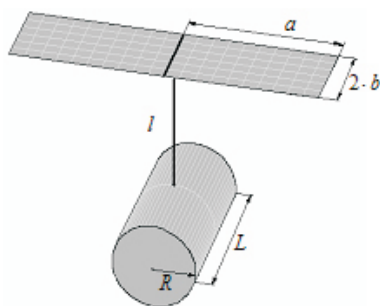


Таблица 2.1

Цилиндр		Вертикальный стержень		Пластина	
D, м	26	D, м	2	h, м	0,2
delta, м	0,02	delta, м	0,02	a, м	15
L, м	15	l, м	13	b, м	3,75

Рис. 2.3. Составная упругая система

При моделировании движения рассматриваемой системы будем считать, что пластина является однородной с постоянной толщиной. Изгибные деформации пластины предполагаются подчиняющимися закону Гука. Упругая ось стержня в недеформируемом состоянии прямолинейна и совпадает с линией центров тяжести поперечных сечений стержня. Отклонения отдельных точек оси стержня происходят перпендикулярно к прямолинейному, недеформированному ее направлению.

Рассматривается поведение системы на коротком промежутке времени Δt . Поэтому возмущающее воздействие аэродинамического сопротивления, сил гравитации и светового давления не учитывается. Перемещения всей системы и ее отдельных элементов принимаются малыми.



Изменения длин упругодеформируемых элементов не учитывается. Вследствие того, что перемещения элементарной массы упругодеформируемого элемента вдоль его продольной оси значительно меньше, чем перемещения в направлениях, перпендикулярных этой оси, такими перемещениями для получения оценочных характеристик можно пренебречь.

Для исследуемой системы (табл. 2.1) определены первые две собственные частоты и соответствующие им коэффициенты в разложении собственных форм (табл. 2.2, 2.3).

Таблица 2.2

Распределение коэффициентов в разложении форм колебания для первой собственной частоты $\omega_1 = 0.69$ Гц

Упругое перемещение вертикального стержня		Упругое перемещение пластин	
d_1	0,0093	g_{11}	-0,024
d_2	-0,0008	g_{12}	0,00014
f_1	0,7084	g_{21}	0,00016
f_2	-0,053	g_{22}	-0,000013
c	-0,0193		

Таблица 2.3

Распределение коэффициентов в разложении форм колебания для второй собственной частоты $\omega_2 = 1.27$ Гц

Упругое перемещение вертикального стержня		Упругое перемещение пластин	
d_1	-19,0683	g_{11}	51,2146
d_2	1,6419	g_{12}	2,3539
f_1	0,7293	g_{21}	0,7028
f_2	-0,03194	g_{22}	0,0715
c	-0,0067		

В табл. 2.2 и 2.3 коэффициенты d, f, c — описывают изгибные колебания вертикального стержня в двух плоскостях и крутильные колебания соответственно, g — описывает изгибные колебания пластины. Найденные коэффициенты (см. табл. 2.2, 2.3) используются для восстановления форм колебания панели солнечной батареи. Потенциальная энергия системы будет иметь вид

$$\Pi = Sf(x, y, t) \tag{2.7}$$

где S — вектор импульса, появляющегося при фиксации створок ПСБ, $f(x, y, t)$ — вектор упругих перемещений ПСБ. С учетом (1.8), (2.7) принимает вид

$$\begin{aligned} \Pi = & Sy_1 g_1(t) \sum_{m,n} g_{m,n} X_m \left(\frac{l_1}{2} \right) Y_n(y) + Sy_2 g_1(t) \sum_{m,n} g_{m,n} X_m \left(\frac{l_2}{2} \right) Y_n(y) + \\ & + Sy_3 g_1(t) \sum_{m,n} g_{m,n} X_m \left(\frac{l_3}{2} \right) Y_n(y) \end{aligned}$$

Здесь $g_1(t)$ — функция от времени в разложении (1.8), описывающая колебания пластины, $g_{m,n}$ — коэффициенты в разложении собственных форм колебания пластины (табл. 2.2 для первой собственной частоты, табл. 2.3 для второй собственной частоты).

Используя (1.14), характеристики КА (см. табл. 2.1), а также коэффициенты в разложении собственных форм (см. табл. 2.2, табл. 2.3), получается система дифференциальных уравнений движения КА, которая может быть легко проинтегрирована любым численным методом.

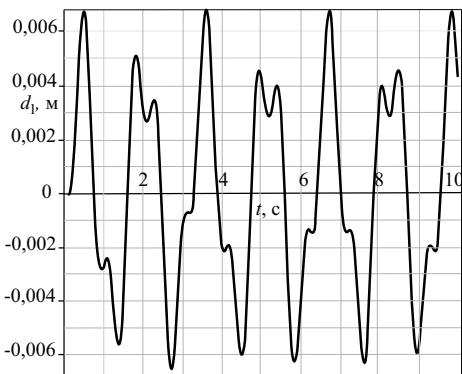


Рис. 2.4. Колебания вертикального стержневого участка системы

Графический результат численного интегрирования полученной системы дифференциальных уравнений движения КА при заданной начальной скорости $\dot{g}_1(0) = -0.2426$ м/с (скорость створок ПСБ после фиксации) представлен в рис. 2.4–2.6.

Как видно из рис. 2.4 и 2.5, колебания упругих элементов системы (вертикальный стержень и пластины) являются свободными и незатухающими, так как при моделировании движения системы не учитывались диссипативные силы.

Несмотря на то что перемещения системы довольно малы, данные возмущения могут оказывать значительное влияние на всю конструкцию в целом, ее прочность. В случае КА, данные возмущения оказывают влияние на систему и аппаратуру, встроенную в КА. Анализируя

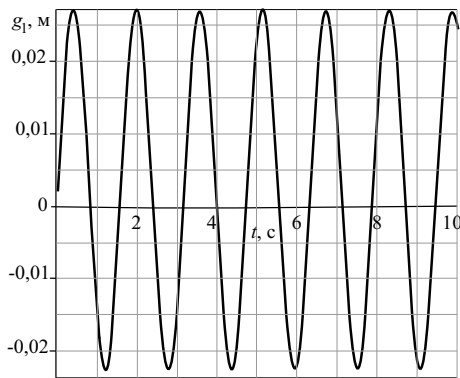


Рис. 2.5. Колебания пластины ПСБ

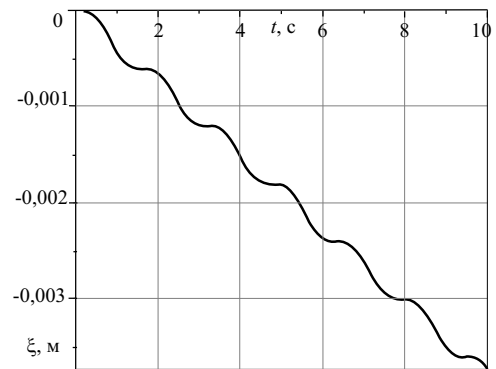
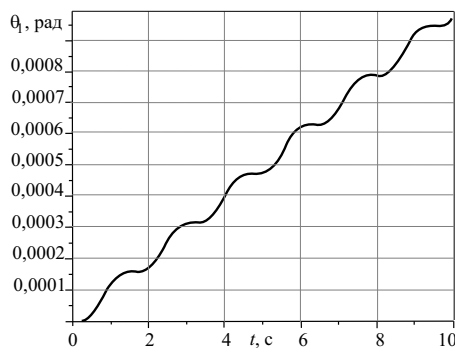
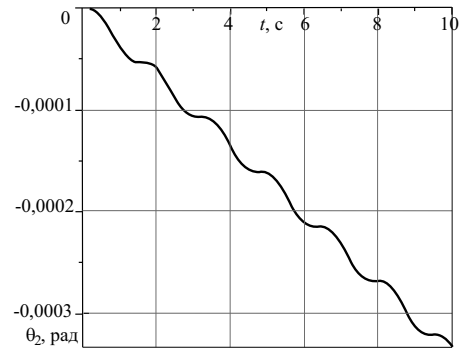


Рис. 2.6. Смещение системы вдоль оси цилиндра

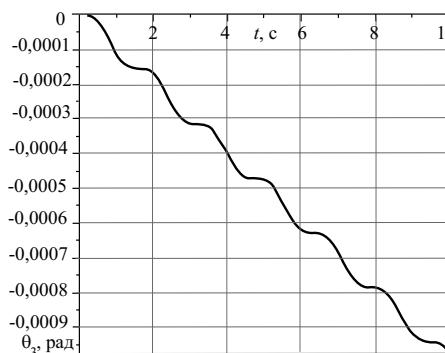
результаты (см. рис. 2.6, рис. 2.7), полученные для поступательного и вращательного движения цилиндрического основания системы (корпус КА), можно выработать решения по уменьшению (исключению) данного движения.



а



б



в

Рис. 2.7. Поворот системы относительно инерциальных осей цилиндра

ВЫВОД

Таким образом, при моделировании движения составной упругой конструкции с малыми деформациями возможно разложение движения системы на ортогональные формы отдельных ее элементов, соответствующие собственным частотам малых колебаний.

Моделирование упругих элементов телами с распределенными параметрами позволяет получить более точную математическую модель, описывающую движение механической системы. Предлагаемый метод определения собственных форм и частот колебаний конструкции позволяет свести систему дифференциальных уравнений движения системы в частных производных к системе обыкновенных дифференциальных уравнений. Это не только упрощает процедуру численного интегрирования уравнений движения, но и позволяет проводить качественный анализ возможных движений путем использования аналитически заданных форм колебаний.

Разработанный метод моделирования движения может быть использован для исследования колебаний в составной упругой системе, а также для выработки рекомендаций по их снижению.



Библиографический список

1. Хорошилов В.С. Механические модели движения космического аппарата с солнечной батареей // Изв. АН СССР. МТТ. 1978. № 5. С. 18–24.
2. Докучаев Л.В., Климов О.П. Об устойчивости вращения твердого тела с гибкими элементами // Изв. АН СССР. МТТ. 1982. № 5. С. 10–15.
3. Набиуллин М.К. Стационарное движение и устойчивость упругих спутников. Новосибирск.: Наука, Сибир. отд-ние, 1990. 216 с.
4. Минович Л., Квинн Р.Д. Уравнение движения маневрирующего космического аппарата нежесткой конструкции // Аэрокосмическая техника. 1988. № 6. С. 82–96.
5. Ганиев Р.Ф., Ковальчук П.С. Динамика систем твердых и упругих тел. Резонансные явления при нелинейных колебаниях. М.: Машиностроение, 1980. 208 с.
6. Борисов М.В. Применение метода Рунге – Рунге для нахождения собственных частот и форм колебаний сложной упругой системы // Студенческая наука аэрокосмическому комплексу: Сб. тр. студ. и асп. фак. летательных аппаратов. Самара, 2001. Вып. 7. С. 10–16.
7. Ланцош К. Вариационные принципы механики. М.: Мир, 1965. 408 с.
8. Тимошенко С.П., Янг Д.Х., Уивер У. Колебания в инженерном деле. М.: Машиностроение, 1985. 472 с.
9. Круглов Г.Е. Аналитическое проектирование механических систем / Самар. гос. аэрокосм. ун-т им. акад. им. С.П. Королева. Самара, 2001. 132 с.

УДК 539.3

О НЕКОТОРЫХ ОСОБЕННОСТЯХ ПРИМЕНЕНИЯ МЕТОДА КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ К РЕШЕНИЮ КОНТАКТНОЙ ЗАДАЧИ НА БАЗЕ ПРОГРАММНОГО КОМПЛЕКСА ABAQUS

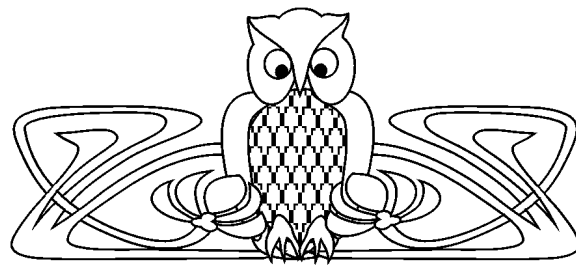
Н.В. Овчинникова, Ю.В. Чеботаревский*

Саратовский государственный технический университет,
кафедра теоретической механики
E-mail: alanita@inbox.ru, *uvich@sstu.ru

В данной работе проведен выбор рациональной расчетной схемы численного решения контактной задачи о взаимодействии упругопластического полупространства с абсолютно жестким индентором на базе программного комплекса ABAQUS. Определены предельные значения прикладываемой к рабочему инструменту статической нагрузки, не вызывающей появления в материале пластических деформаций и, следовательно, не оказывающей влияния на процесс его поверхностного упрочнения. Выявлена специфика формирования области пластических деформаций, характерная для статического нагружения.

Ключевые слова: контактное взаимодействие, напряженно-деформированное состояние, модель изотропно-кинематического упрочнения, пластическая деформация, поверхностное упрочнение, ABAQUS.

Во многих случаях математические модели механической обработки материала могут быть сведены к задаче о контактном взаимодействии рабочего инструмента и обрабатываемой поверхности [1]. В частности, такого рода представление физико-механического процесса используется в работе [2] при изучении механизмов поверхностного упрочнения пластическим деформированием с применением ультразвуковых воздействий. В ней на базе изотропно-кинематической модели материала исследуется напряженно-деформируемое состояние цилиндрического тела при взаимодействии с абсолютно твердым рабочим инструментом (индентором) в форме полусферы. Силовое воздействие рабочего органа на материал моделируется путем приложения к нему направленного вдоль общей оси симметрии



Some Aspects of Applying Finite Element Method to Contact Problems Using ABAQUS System

N.V. Ovchinnikova, U.V. Chebotarevsky*

Saratov State Technical University,
Chair of Theoretical Mechanics
E-mail: alanita@inbox.ru, *uvich@sstu.ru

In this paper the selection of preferred computational scheme for numerical research of a contact interaction between a rigid indenter and an elastic-plastic half-space using ABAQUS system is described. Furthermore, the critical values of the load applied to indenter which don't cause plastic deformation in the material and subsequently don't effect the process of a surface hardening are determined. Some peculiarities of the forming of near-surface plastic region by static loading are investigated.

Key words: contact interaction, deflected mode, isotropic-kinematic hardening model, plastic deformation, surface hardening, ABAQUS.