Следующий алгоритм позволяет построить функцию $q(x)$ по спектральным данным $\left\{\lambda_n^2, \alpha_n\right\}_{n\geq 1}$.

Алгоритм. *1. По заданным числам* $\left\{\lambda_n^2, \alpha_n\right\}_{n\geq 1}$ *строится функция* $F(x,t)$ *по формуле* (10).

2. Находится функция $\widetilde{A}(x,t)$ *из уравнения* (9).

3. Вычисляется $q(x)$ *по формуле* (8).

Библиографический список

1. *Akhmedova E.N.* The definition of one class of Sturm – Liouville operators with discontinuous coefficients by Weyl function // Proc. of IMM of NAS of Azerbaijan. 2005. V. XXII (XXX). P. 3–8.
2. *Гасымов М.Г.* Прямые и обратные задачи спектрального анализа для одного класса уравнений с разрывными коэффициентами // Неклассические методы в геофизике: Материалы Междунар. конф. Новосибирск, 1977. С. 37–44.
3. *Гусейнов И.М., Пашаев Р.Т.* Об одной обратной задаче для дифференциального уравнения второго порядка // УМН. 2002. Т. 57, № 3. С. 147–148.
4. *Юрко В.А.* Введение в теорию обратных спектральных задач. М., 2007. 384 с.
5. *Левитан Б.М., Гасымов М.Г.* Определение дифференциального оператора по двум спектрам // УМН. 1964. Т. 19, вып. 2. С. 3–63.
6. *Марченко В.А.* Операторы Штурма – Лиувилля и их приложения. Киев, 1977. 331 с.
7. *Akhmedova E.N.* On representation of solution of Sturm – Liouville equation with discontinuous coefficients // Proc. of IMM of NAS of Azerbaijan. 2002. V. XVI (XXIV). P. 5–9.
8. *Akhmedova E.N., Huseynov H.M.* On eigenvalues and eigenfunctions of one class of Sturm – Liouville operators with discontinuous coefficients // Transactions of NAS of Azerbaijan. 2003. V. XXIII, № 4. P. 7–18.

УДК 517.51

К ВОПРОСУ О СХОДИМОСТИ В ТОЧКЕ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКОГО ИНТЕРПОЛЯЦИОННОГО ПРОЦЕССА ЛАГРАНЖА

Л.В. Борисова, А.В. Шаталина

Саратовский государственный университет,
кафедра теории функций и приближений
E-mail: ShatalinaAV@info.sgu.ru

Получен аналог признака Р. Салема для тригонометрического интерполяционного процесса Лагранжа по матрице равноотстоящих узлов.

Ключевые слова: интерполирование, интерполяционный процесс, равноотстоящие узлы, сходимость в точке.

The Problem of Convergence in Point Trigonometric Interpolation Process of Lagrange

L.V. Borisova, A.V. Shatalina

Saratov State University,
Chair of Theory of Functions and Approximations
E-mail: ShatalinaAV@info.sgu.ru

An analogue of the characteristic of R. Salem is obtained for a trigonometric Lagrange interpolation process on the matrix of equally spaced nodes.

Key words: interpolation process, equidistant nodes, convergence at point.

Один из основных вопросов теории интерполирования состоит в выяснении для данной матрицы M узлов интерполирования условий на функцию $f \in C$, обеспечивающих равномерную или поточечную сходимость интерполяционного процесса Лагранжа $\{Z_n(M,f,x)\}$. Признаком сходимости интерполяционных процессов Лагранжа, построенных для конкретных матриц, посвящено большое количество работ. Укажем работы С.Н. Бернштейна [1], Д.Л. Бермана [2], Г.Н. Неваи [3], А.А. Привалова [4].

В данной работе получен аналог признака Р. Салема [5] для тригонометрического интерполяционного процесса Лагранжа по матрице равноотстоящих узлов в точке $x \in [-\pi;\pi]$.

Пусть $M^T = \{t_{k,n}\}$, $t_{k,n} = \frac{2k\pi}{2n+1}$, $-n \leq k \leq n$, $n = 0, \pm1, \pm2, \pm3, \ldots$ – матрица равноотстоящих узлов интерполирования на $[-\pi;\pi]$. Для любых $n \in N$ и $f \in C_{2\pi}$ тригонометрический интерполяционный многочлен $T_n(x,\, f)$ в точке $x \in [-\pi;\,\pi]$ запишем в виде

$$T_n(x,\, f) = \sum_{k=-n}^{n} f_{k,n} \frac{\sin(m_n(t_{k,n} - x))}{2m_n \sin\frac{t_{k,n}-x}{2}}, \tag{1}$$

где $m_n = n + 1/2$ и $f_{k,n} = f(t_{k,n})$.

Положим для $x \in [-\pi;\pi]$ $h = \frac{\pi}{m_n}$, $p_n = \left[\frac{x+\pi}{h}\right]$, $q_n = \left[\frac{2\pi}{h}\right] - p_n$. Перенумеруем узлы интерполирования $t_{k,\,n}$, $-n \le k \le n$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$ следующим образом:

$$t_{0,\,n} = t_{-n,n} + \left(\left[\frac{x+\pi}{h}\right] - 1\right) h, \tag{2}$$

$$t_{k,\,n} = t_{0,\,n} + kh, \qquad k = -p_n,\, -p_n + 1, \dots, 0,\, 1, \dots q_n. \tag{3}$$

Обозначив через

$$\varepsilon = \frac{|x - t_{0,\,n}|}{h}, \tag{4}$$

равенства (3) запишем следующим образом:

$$t_{k,\,n} = t_{0,\,n} + (k - \varepsilon)h, \qquad k = -p_n,\, -p_n + 1, \dots, 0,\, 1, \dots, q_n. \tag{5}$$

Из соотношений (2) и (4) следует, что $\varepsilon = \frac{x}{h} - \left[\frac{x}{h}\right] = \left\{\frac{x}{h}\right\}$, т. е. $0 \le \varepsilon < 1$.

Справедлива

Теорема. *Если функция $f \in C_{2\pi}$, то существует такое положительное число ε, $0 \le \varepsilon < 1$, что последовательность $\{T_n(x,\,f)\}$, $n = 1,\,2,\,3,\dots$, сходится в точке $x \in [-\pi;\,\pi]$ к значению $f(x)$ если*

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=-[p_n/2]}^{[q_n/2]} \frac{1}{(2k+1-\varepsilon)} (f(x + (2k+1-\varepsilon)h) - f(x + (2k-\varepsilon)h)) = 0, \tag{6}$$

где $h = 2\pi/(2n+1)$, $p_n = \left[\frac{x+\pi}{h}\right]$, $q_n = \left[\frac{2\pi}{h}\right] - p_n$.

Доказательство. Сделаем предварительные замечания. Для $x \in [-\pi;\,\pi]$ и $m_n = n + 1/2$ в силу (5) имеем:

$$m_n(t_{k,\,n} - x) = \pi(k - \varepsilon), \tag{7}$$

$$\sin(m_n(t_{k,\,n} - x)) = -\sin(m_n(t_{k+1,\,n} - x)), \qquad k = -p_n, -p_n + 1, \dots, 0, 1, \dots, q_n. \tag{8}$$

Далее положим

$$\frac{1}{2\sin\frac{u}{2}} = \frac{1}{u} + g(u), \qquad g(u) = \frac{1}{2\sin\frac{u}{2}} - \frac{1}{u}. \tag{9}$$

Тогда $g(u)$ — непрерывная на $[-\pi;\,\pi]$ функция. Сомнение вызывает точка $u = 0$, но, применяя правило Лопиталя, находим, что $\lim\limits_{u\to 0} g(u) = 0$. Потребуем [6, с. 108], чтобы $g(u + 2\pi) = g(u)$. Тогда функция $g(u)$ ограничена на $(-\infty;\,\infty)$.

В силу соотношений (1), (7)–(9) для тригонометрического интерполяционного многочлена $T_n(x,\,f)$ получим

$$T_n(x,\,f) = \sum_{k=-p_n}^{q_n} f_{k,\,n} \frac{\sin(m_n(t_{k,\,n} - x))}{2m_n \sin\frac{t_{k,\,n} - x}{2}} =$$

$$= \sum_{k=-\left[\frac{p_n}{2}\right]}^{\left[\frac{q_n}{2}\right]} \left\{ f_{2k,\,n} \frac{\sin(m_n(t_{2k,\,n} - x))}{2m_n \sin\frac{t_{2k,\,n} - x}{2}} + f_{2k+1,\,n} \frac{\sin(m_n(t_{2k+1,\,n} - x))}{2m_n \sin\frac{t_{2k+1,\,n} - x}{2}} \right\} =$$

$$= \sum_{k=-\left[\frac{p_n}{2}\right]}^{\left[\frac{q_n}{2}\right]} (f_{2k+1,\,n} - f_{2k,\,n}) \frac{\sin(m_n(t_{2k+1,\,n} - x))}{2m_n \sin\frac{t_{2k+1,\,n} - x}{2}} +$$

$$+ \sum_{k=-\left[\frac{p_n}{2}\right]}^{\left[\frac{q_n}{2}\right]} f_{2k,\,n} \frac{\sin(m_n(t_{2k,\,n} - x)) \left(\sin\frac{t_{2k+1,\,n} - x}{2} - \sin\frac{t_{2k,\,n} - x}{2}\right)}{2m_n \sin\frac{t_{2k,\,n} - x}{2} \sin\frac{t_{2k+1,\,n} - x}{2}} =$$

$$= \sum_{k=-\left[\frac{p_n}{2}\right]}^{\left[\frac{q_n}{2}\right]} (f_{2k+1,\,n} - f_{2k,\,n}) \frac{\sin(m_n(t_{2k+1,\,n} - x))}{m_n(t_{2k+1,\,n} - x)} +$$

$$+\sum_{k=-\left[\frac{p_n}{2}\right]}^{\left[\frac{q_n}{2}\right]}(f_{2k+1,\,n}-f_{2k,\,n})g(t_{2k+1,\,n}-x)\,\frac{\sin(m_n(t_{2k+1,\,n}-x))}{m_n}+$$

$$+\sum_{k=-\left[\frac{p_n}{2}\right]}^{\left[\frac{q_n}{2}\right]}f_{2k,\,n}\left(\frac{1}{t_{2k,\,n}-x}+g(t_{2k,\,n}-x)-\frac{1}{t_{2k+1,\,n}-x}-g(t_{2k+1,\,n}-x)\right)\frac{\sin(m_n(t_{2k,\,n}-x))}{m_n}\,.$$

Таким образом, представим многочлен $T_n(x,\,f)$ в виде суммы трех слагаемых

$$T_n(x,\,f)=S_n^{(1)}(f)+S_n^{(2)}(f)+S_n^{(3)}(f),$$

т. е.

$$T_n(x,\,f)=\sum_{k=-\left[\frac{p_n}{2}\right]}^{\left[\frac{q_n}{2}\right]}(f_{2k+1,\,n}-f_{2k,\,n})\,\frac{\sin(m_n(t_{2k+1,\,n}-x))}{m_n(t_{2k+1,\,n}-x)}+$$

$$+\sum_{k=-\left[\frac{p_n}{2}\right]}^{\left[\frac{q_n}{2}\right]}f_{2k,\,n}\,\frac{\sin(m_n(t_{2k,\,n}-x))(t_{2k+1,\,n}-t_{2k,\,n})}{m_n(t_{2k+1,\,n}-x)(t_{2k+1,\,n}-x)}+$$

$$+\sum_{k=-\left[\frac{p_n}{2}\right]}^{\left[\frac{q_n}{2}\right]}(g(t_{2k+1,\,n}-x)f_{2k+1,\,n}-g(t_{2k,\,n}-x)f_{2k,\,n})\frac{\sin(m_n(t_{2k+1,\,n}-x))}{m_n}\,. \tag{10}$$

Рассмотрим сумму $S_n^{(3)}f$. Положим $F(y)=g(y-x)f(y)$ при $x,\,y\in[-\pi;\,\pi]$. Так как $F(y)\in C_{2\pi}$, то получаем

$$\left|S_n^{(3)}(f)\right|=\left|\sum_{k=-\left[\frac{p_n}{2}\right]}^{\left[\frac{q_n}{2}\right]}(g(t_{2k+1,\,n}-x)f_{2k+1,\,n}-g(t_{2k,\,n}-x)f_{2k,\,n})\frac{\sin(m_n(t_{2k+1,\,n}-x))}{m_n}\right|\le$$

$$\le\frac{1}{m_n}\sum_{k=-\left[\frac{p_n}{2}\right]}^{\left[\frac{q_n}{2}\right]}|F(t_{2k,\,n}+h)-F(t_{2k,\,n})|\le\frac{1}{m_n}\omega(F,\,h)\left(\left[\frac{q_n}{2}-\frac{p_n}{2}\right]\right)\le$$

$$\le\omega(F,\,h)\frac{1}{m_n}\left(\left[\frac{1}{2}\cdot 2m_n-\frac{p_n}{2}\right]+\left[\frac{p_n}{2}\right]\right)\le\omega(F,\,h))\,.$$

Здесь $\omega(F,\,h)=\max\limits_{t_{2k,\,n}\in[0;\,2\pi]}|F(t_{2k,\,n}+h)-F(t_{2k,\,n})|$ — модуль непрерывности функции F на $[-\pi;\,\pi]$.

Так как $\lim\limits_{h\to 0}\omega(F,\,h)=0$ и $0\le|S_n^{(3)}(f)|\le\omega(F,\,h)$, то $\lim\limits_{n\to\infty}S_n^{(3)}(f)=0$.

Из равенств $t_{2k+1,\,n}=x+(2k+1-\varepsilon)h$, $m_n(t_{2k+1,\,n}-x)=\pi(2k+1-\varepsilon)$ имеем $\sin(m_n(t_{2k+1,\,n}-x))==\sin\pi\varepsilon$, $0\le\varepsilon<1$. Тогда

$$S_n^{(1)}(f)\stackrel{df}{=}\sum_{k=-\left[\frac{p_n}{2}\right]}^{\left[\frac{q_n}{2}\right]}(f_{2k+1,\,n}-f_{2k,\,n})\,\frac{\sin(m_n(t_{2k+1,\,n}-x))}{m_n(t_{2k+1,\,n}-x)}=$$

$$=\frac{1}{\pi}\sin\pi\varepsilon\sum_{k=-\left[\frac{p_n}{2}\right]}^{\left[\frac{q_n}{2}\right]}\frac{f(x+(2k+1-\varepsilon)h)-f(x+(2k-\varepsilon)h)}{2k+1-\varepsilon}.$$

Тогда, если справедливо (6), то $\lim\limits_{n\to\infty}S_n^{(1)}(f)=0$.

Осталось рассмотреть сумму $S_n^{(2)}$. Очевидно, имеем

$$S_n^{(2)}(f) = \sum_{k=-\left[\frac{p_n}{2}\right]}^{\left[\frac{q_n}{2}\right]} f_{2k,\,n} \frac{\sin(m_n(t_{2k,\,n}-x))(t_{2k+1,\,n}-t_{2k,\,n})}{m_n(t_{2k+1,\,n}-x)(t_{2k+1,\,n}-x)} =$$

$$= -\sum_{k=-\left[\frac{p_n}{2}\right]}^{\left[\frac{q_n}{2}\right]} f(x+(2k-\varepsilon)h)\frac{\sin\pi\varepsilon}{\pi(2k-\varepsilon)(2k+1-\varepsilon)}\,. \tag{11}$$

для любого ε, $0 \le \varepsilon < 1$.

Заметим, что для $\varepsilon = 0$ (т.е. при $x = t_{0,\,n}$) справедливо равенство $S_n^{(1)} = S_n^{(2)} = 0$. Докажем, что

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=-\left[\frac{p_n}{2}\right]}^{\left[\frac{p_n}{2}\right]}\left(\frac{1}{2k+1-\varepsilon}-\frac{1}{2k-\varepsilon}\right)\right) = -\frac{\pi}{\sin\pi\varepsilon}. \tag{12}$$

Положим [7, с. 21]

$$\psi(z) = -\gamma + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k} - \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k+z}, \tag{13}$$

где γ — постоянная Эйлера.
Тогда справедливы равенства

$$\psi(1-z) = -\gamma + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k} - \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k+1-z}, \tag{14}$$

$$\psi\left(\frac{z}{2}\right) = -\gamma + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k} - \sum_{k=0}^{\infty}\frac{2}{2k+z}, \tag{15}$$

$$\psi\left(1-\frac{z}{2}\right) = -\gamma + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k} - \sum_{k=0}^{\infty}\frac{2}{2k+2-z}. \tag{16}$$

Отсюда имеем [2, с.20], что

$$\pi\operatorname{ctg}\pi z = \psi(1-z)-\psi(z) = \sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{k+z}-\frac{1}{k+1-z}\right), \tag{17}$$

$$\pi\operatorname{ctg}\frac{\pi z}{2} = \psi\left(1-\frac{z}{2}\right)-\psi\left(\frac{z}{2}\right) = \sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{2}{2k+z}-\frac{2}{2k+2-z}\right)\,. \tag{18}$$

Но так как $\dfrac{1}{\sin z} = \operatorname{ctg}\dfrac{z}{2} - \operatorname{ctg} z$, то в силу соотношений (17) и (18) получим

$$\frac{\pi}{\sin\pi z} = \sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{2}{2k+z}-\frac{2}{2k+2-z}-\frac{1}{k+z}+\frac{1}{k+1-z}\right) =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{2}{2k+z}-\frac{2}{2k+2-z}-\frac{1}{2k+z}-\frac{1}{2k+1+z}+\frac{1}{2k+1-z}+\frac{1}{2k+2-z}\right) =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2k+z}-\frac{1}{2k+2-z}-\frac{1}{2k+1+z}+\frac{1}{2k+1-z}\right),$$

а так как $\dfrac{1}{(2k-\varepsilon)(2k+1-\varepsilon)} = -\Big(\dfrac{1}{2k+1-\varepsilon}-\dfrac{1}{2k-\varepsilon}\Big)$, то

$$-\sum_{k=-\infty}^{\infty}\left(\frac{1}{2k+1-\varepsilon}-\frac{1}{2k-\varepsilon}\right) = -\left(\sum_{k=-\infty}^{0}+\sum_{k=1}^{\infty}\right)\left(\frac{1}{2k+1-\varepsilon}-\frac{1}{2k-\varepsilon}\right) \overset{df}{\equiv} (\varphi(\varepsilon)-\theta(\varepsilon)). \tag{19}$$

Из равенств (13) и (15) следует, что

$$\varphi(\varepsilon)=\sum_{k=0}^{\infty}\left(-\frac{1}{2k-1+\varepsilon}+\frac{1}{2k+\varepsilon}\right)=\frac{1}{1-\varepsilon}+\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{2}{2k+\varepsilon}-\frac{1}{k+\varepsilon}\right)=\psi(\varepsilon)-\psi\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)+\frac{1}{1-\varepsilon}.$$

Аналогично из соотношений (14) и (16) получаем

$$\theta(\varepsilon)=\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2k+1-\varepsilon}-\frac{1}{2k-\varepsilon}\right)=\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{k+1-\varepsilon}-\frac{2}{2k+2-\varepsilon}\right)-\frac{1}{1-\varepsilon}=$$

$$=\psi\left(1-\frac{\varepsilon}{2}\right)-\psi(1-\varepsilon)-\frac{1}{1-\varepsilon}.$$

Тогда в силу (17), (18) имеем

$$\varphi(\varepsilon)+\theta(\varepsilon)=\psi\left(1-\frac{\varepsilon}{2}\right)-\psi\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)-(\psi(1-\varepsilon)-\psi(\varepsilon))=\pi\operatorname{ctg}\frac{\pi\varepsilon}{2}-\pi\operatorname{ctg}\pi\varepsilon\,.$$

Отсюда и из (19) получаем равенство

$$-\sum_{k=-\infty}^{\infty}\left(\frac{1}{2k+1-\varepsilon}-\frac{1}{2k-\varepsilon}\right)=-\frac{\pi}{\sin\pi\varepsilon},$$

которое означает, что доказано соотношение (12).

Вернемся теперь к сумме $S_n^{(2)}(f)$ и докажем, что

$$\lim_{n\to\infty}S_n^{(2)}(f)=f(x) \tag{20}$$

Зафиксируем натуральное число N, $-\left[\frac{p_n}{2}\right]<N<\left[\frac{q_n}{2}\right]$.

Тогда равенство (11) можно записать в виде

$$S_n^{(2)}(f)=-\frac{1}{\pi}\sin\pi\varepsilon\left(\sum_{k=-\left[\frac{p_n}{2}\right]}^{-N-1}+\sum_{k=-N}^{N}+\sum_{k=N+1}^{\left[\frac{q_n}{2}\right]}\right)\frac{f(x+(2k-\varepsilon)h)}{(2k-\varepsilon)(2k+1-\varepsilon)}\overset{df}{=}P_1(f)+P_2(f)+P_3(f)$$

Из непрерывности функции f и равенства (12) следует, что

$$\lim_{n\to\infty}P_2(f)=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=-N}^{N}\frac{-\sin\pi\varepsilon}{\pi(2k-\varepsilon)(2k+1-\varepsilon)}f(x+(2k-\varepsilon)h)=f(x)\,. \tag{21}$$

Далее, в силу ограниченности функции $f(x)$ имеем

$$|P_3(f)|\le\frac{C}{\pi}\sum_{k=N+1}^{\left[\frac{q_n}{2}\right]}\frac{1}{(2k-\varepsilon)^2}\le\frac{C}{\pi}\sum_{k=N+1}^{\left[\frac{q_n}{2}\right]}\frac{1}{(2k-1)^2}\,. \tag{22}$$

Но ряд $\sum\limits_{k=N+1}^{\left[\frac{q_n}{2}\right]}\frac{1}{(2k-1)^2}$ сходится, т.е. начиная с некоторого номера N для сколь угодно малого числа $\delta_1>0$ справедливо неравенство $|P_3(f)|<\delta_1$. Аналогично для суммы $P_1(f)$ справедливо неравенство

$$|P_1(f)|<\delta_1. \tag{23}$$

Тогда из соотношений (21)–(23) следует равенство (20), а из (10) имеем, что $\lim\limits_{n\to\infty}T_n(x,\,f)=f(x)$. Теорема доказана.

Библиографический список

1. *Бернштейн С.Н.* Несколько замечаний об интерполировании. Собр. соч.: В 3 т. М., 1952. Т. 1. С. 253–263.
2. *Берман Д.Л.* Сходимость интерполяционного процесса Лагранжа, построенного для абсолютно непрерывных функций и функций с ограниченным изменением // Докл. АН СССР. 1953. Т. 112, № 1. С. 9–12.
3. *Неваи Г.П.* Замечания об интерполировании // Acta Math. Acad. Sci. Hung. 1974 V. 25, № 1–2. P. 123–144.
4. *Привалов А.А.* О равномерной сходимости интерполяционных процессов Лагранжа // Мат. заметки. 1986. Т. 39, № 2. С. 228–243
5. *Салем Р.* Acta Sci. et. Ind. Paris, 1940. № 1234. P. 862.
6. *Бари Н.К.* Тригонометрические ряды. М., 1961.
7. *Уитеккер Э.Т., Ватсон Д.Н.* Курс современного анализа: В 2 т. М., 1963. Т. 2.

УДК 512.532.2

О КОНГРУЭНЦИЯХ ДВУПОРОЖДЕННОГО МОНОИДА

Л.А. Кудрявцева

Московский государственный институт электронной техники,
кафедра высшей математики
E-mail: kety3@mail.ru

Рассматриваются конгруэнции свободной полугруппы над двухбуквенным алфавитом, порожденные парами слов длины 2. Показано, что число классов эквивалентности для слов длины n равно $n+1$. Найдено число слов в каждом классе.

Ключевые слова: конгруэнция, свободная полугруппа, моноид, класс эквивалентности.

About the Congruences of Two-Generated Monoid

L.A. Kudryavtseva

Moscow Institute of Electronic Technology,
Chair of Higher Mathematics
E-mail: kety3@mail.ru

The congruences of two-generated monoid which generated by pair of words of length 2 are considered over two-letter alphabet. It is shown that number of equivalence classes for words of length n is equal to $n+1$. The number of words in each class is found.

Key words: congruence, free semigroup, monoid, equivalence class.

ВВЕДЕНИЕ

Полугруппы часто задают множеством образующих M и определяющих соотношений Σ. Будем рассматривать множество образующих из двух элементов $M = \{a, b\}$.В качестве Σ будем рассматривать одно соотношение, представляющее собой равенство двухбуквенных слов. Полугруппы, заданные одним определяющим соотношением, изучались многими авторами, см., например, [1, 2]. Всего слов длины 2 в алфавите M существует 4. Из них можно составить $C_4^2 = 6$ соотношений. На множестве из 4-х двухбуквенных слов можно рассмотреть два преобразования. Первое состоит в том, что буква a меняется на b, а b — на a. Второе является инверсией слова, т.е. первая буква становится последней, вторая — предпоследней и т.д. Если одно соотношение можно перевести в другое с помощью указанных преобразований, то количество классов эквивалентности на множестве M^n, а также количество элементов в каждом классе останутся без изменения. Такие соотношения можно назвать равносильными. Так, равносильными будут соотношения $aa = ab$, $ba = bb$, $aa = ba$, $ab = bb$. Таким образом, принципиально разными будут только соотношения

$$aa = ab, \qquad ab = ba, \qquad aa = bb, \tag{1}$$

которые и будут рассмотрены в данной работе.

Если конгруэнция задается равенством k-буквенных слов, то конгруэнтными могут быть только слова одинаковой длины. Поэтому будем рассматривать соответствующее отношение эквивалентности на множестве M^n слов длины n.

Для каждого соотношения в каждом классе эквивалентности будет выбрано *каноническое* слово. Будет показано, что любое слово эквивалентно одному из канонических, и разные канонические слова между собой не эквивалентны. Заметим, что возможность сведения любого слова к одному из канонических означает алгоритмическую разрешимость проблемы равенства слов. В общем случае