МАТЕМАТИКА

УДК 519.4

О МНОГООБРАЗИЯХ УПОРЯДОЧЕННЫХ ПОЛУГРУПП С ОПЕРАЦИЯМИ ЦИЛИНДРОФИКАЦИИ

Д.А. Бредихин

Саратовский государственный университет,
кафедра геометрии
E-mail: bredikhin@mail.ru

В работе находится конечный базис тождеств многообразий упорядоченных алгебр, порожденных упорядоченными полугруппами бинарных отношений с операциями цилиндрофикации.

Ключевые слова: многообразия, алгебры отношений, полугруппы, операции цилиндрофикации.

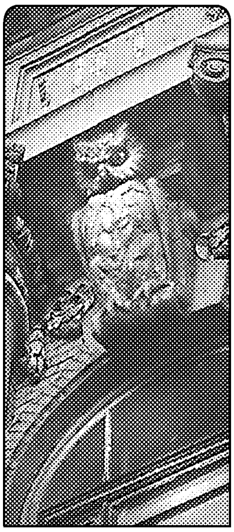
On Varieties of Partially Ordered Semigroups with Operations of Cylindrification

D.A. Bredikhin

Saratov State University,
Chair of Geometry
E-mail: bredikhin@mail.ru

The finite basis of identities of the varieties of the ordered algebras generated by partially ordered semigroups of binary relations with cylindrifications operations is found in this paper.

Key words: varieties, algebras of relations, semigroups, operations of cylindrification.



НАУЧНЫЙ ОТДЕЛ

В творческом наследии В.В. Вагнера большое место занимают исследования, посвященные теории бинарных отношений [1]. Множество бинарных отношений Φ, замкнутое относительно некоторой совокупности Ω операций над ними, образует алгебру (Φ, Ω), называемую алгеброй отношений. Всякая такая алгебра может быть рассмотрена как упорядоченная отношением теоретико-множественного включения $\subset$. Основы абстрактно-алгебраического подхода к изучению алгебр отношений были заложены в работах А. Тарского [2]. Одной из основных проблем в теории алгебр отношений традиционно является изучение их свойств, выраженных на языке тождеств [2–9].

Для заданного множества Ω операций над бинарными отношениями обозначим через $R\{\Omega\}$ ($R\{\Omega, \subset\}$) класс алгебр (упорядоченных алгебр) отношений с операциями из Ω. Пусть $Var\{\Omega\}$ ($Var\{\Omega, \subset\}$) — многообразие, порожденное классом $R\{\Omega\}$ ($R\{\Omega, \subset\}$).

Нами будут рассмотрены операции умножения отношений $\circ$, объединения $\cup$ и играющие важную роль в алгебраической логике [3] операции цилиндрофикации ∇_1 и ∇_2. Для всякого бинарного отношения $\rho \subset X \times X$ положим $\nabla_1(\rho) = pr_1\rho \times X$, $\nabla_2(\rho) = X \times pr_2\rho$, где $pr_1\rho = \{x : (\exists\, y)(x, y) \in \rho\}$ и $pr_2\rho = \{y : (\exists\, x)(x, y) \in \rho\}$ — первая и вторая проекции отношения ρ соответственно.

В работе [9] был найден конечный базис тождеств для многообразий $Var\{\circ, \nabla_1\}$ и $Var\{\circ, \nabla_2\}$. Соответствующие результаты формулируются в теоремах 1 и 2.

Теорема 1. *Алгебра* $(A, \cdot, ^*)$ *типа* $(2, 1)$ *принадлежит многообразию* $Var\{\circ, \nabla_1\}$ *тогда и только тогда, когда она удовлетворяет следующим тождествам:*

$$1)\ (xy)z = x(yz), \qquad 2)\ (x^*)^* = x^*, \qquad 3)\ (x^*)^2 = x^*, \qquad 4)\ (xy)^* = xy^*,$$
$$5)\ xy^*x^* = xy^*, \qquad 6)\ x^*y^*z^* = x^*z^*y^*, \qquad 7)\ x^*y^*zy = x^*zy.$$

Теорема 2. *Алгебра $(A, \cdot, {}^*)$ типа $(2, 1)$ принадлежит многообразию $Var\{\circ, \nabla_2\}$ тогда и только тогда, когда она удовлетворяет тождествам* 1)–3) *и тождествам*

$$4')\ (xy)^* = x^*y\ (4'), \qquad 5')\ x^*y^*x = y^*x, \qquad 6')\ x^*y^*z^* = y^*x^*z^*, \qquad 7')xyx^*z^* = xyz^*.$$

Под упорядоченной алгеброй мы понимаем алгебру с заданным на ней отношением порядка $\leq$, согласованным с операциями этой алгебры. Основными результатами работы являются следующие теоремы, в которых находятся базисы тождеств многообразий $Var\{\circ, \nabla_1, \subset\}$ и $Var\{\circ, \nabla_2, \subset\}$.

Теорема 3. *Упорядоченная алгебра $(A, \cdot, {}^*, \leq)$ типа $(2, 1)$ принадлежит многообразию $Var\{\circ, \nabla_1, \subset\}$ тогда и только тогда, когда она удовлетворяет тождествам* 1)–7) *и тождествам*

$$8)\ x \leq x^*, \qquad 9)\ x \leq x^*x, \qquad 10)\ x^*y \leq x^*.$$

Теорема 4. *Упорядоченная алгебра $(A, \cdot, {}^*, \leq)$ типа $(2, 1)$ принадлежит многообразию $Var\{\circ, \nabla_2, \subset\}$ тогда и только тогда, когда она удовлетворяет тождествам* 1)–3), 4′)–7′), 8) *и тождествам*

$$9')\ x \leq xx^*, \qquad 10')\ xy^* \leq y^*.$$

Следствие 1. *Алгебра $(A, \cdot, +, {}^*)$ типа $(2, 2, 1)$ принадлежит многообразию $Var\{\circ, \cup, \nabla\}$ тогда и только тогда, когда $(A, +)$ — полурешетка, выполняются тождества* 1)–7) *и тождества*

$$11)\ x + x^* = x^*, \qquad 12)\ x + x^*x = x^*x, \qquad 13)\ x^*y + x^* = x^*,$$
$$14)\ (x + y)z = xz + yz, \qquad 15)\ x(y + z) = xy + xz, \qquad 16)\ (x + y)^* = x^* + y^*.$$

Следствие 2. *Алгебра $(A, \cdot, +, {}^*)$ типа $(2, 2, 1)$ принадлежит многообразию $Var\{\circ, \cup, \nabla_2\}$ тогда и только тогда, когда $(A, +)$ — полурешетка, выполняются тождества* 1)–3), 4′)–7′), 11), 14)–16) *и тождества*

$$12')\ x + xx^* = xx^*, \qquad 13')\ xy^* + y^* = y^*.$$

Докажем теорему 3 (теорема 4 доказывается аналогично).

Доказательство. Разобьем доказательство на ряд последовательных шагов.

Шаг 1. Доказательство теоремы основывается на результатах работ [5, 7]. Приведем ряд определений и обозначений, используемых в дальнейшем изложении.

Пусть $Rel(U)$ — множество всех бинарных отношений на U. Всякая формула $\varphi(z_0, z_1, r_1, \ldots, r_m)$ логики предикатов первого порядка с равенством, содержащая m бинарных предикатных символов $r_1, \ldots, r_m$ и две свободные индивидуальные переменные z_0, z_1, определяет m-арную операцию F_φ на $Rel(U)$:

$$F_\varphi(R_1, \ldots, R_m) = \{(x, y) \in U \times U : \varphi(x, y, R_1, \ldots, R_m)\},$$

где $\varphi(x, y, R_1, \ldots, R_m)$ означает, что формула φ выполняется, если z_0, z_1 интерпретируются как x, y и $r_1, \ldots, r_m$ интерпретируются как отношения $R_1, \ldots, R_m$ из $Rel(U)$.

Операция над бинарными отношениями называется *примитивно-позитивной* [10] (в другой терминологии — *диофантовой* [7]), если она может быть определена формулой, содержащей в своей записи лишь кванторы существования и операцию конъюнкции. Примитивно-позитивные операции могут быть описаны с помощью графов [10].

Обозначим через N множество всех натуральных чисел. Помеченным графом назовем пару $G = (V,\ E)$, где $V = V(G)$ — конечное множество, называемое множеством вершин, и $E = E(G) \subset \subset V \times N \times V$ — тернарное отношение. Тройку $(u, k, v) \in E$ будем называть ребром графа, идущим из вершины u в вершину v, помеченным меткой k, и графически изображать следующим образом: $u\cdot \xrightarrow{k} \cdot v$.

Под двухполюсником мы понимаем помеченный граф с парой выделенных вершин, т. е. систему вида $G = (V, E, in, out)$, где (V, E) — помеченный граф; $in = in(G)$ и $out = out(G)$ — две выделенные вершины (необязательно различные), называемые входом и выходом двухполюсника соответственно.

Понятие изоморфизма помеченных графов и двухполюсников определяется естественным образом. В дальнейшем все графы будут рассматриваться с точностью до изоморфизма.

Пусть $F = F_\varphi$ — примитивно-позитивная операция, задаваемая формулой φ. С этой операцией может быть ассоциирован граф $G = G(F) = G(\varphi)$, определяемый следующим образом: $V(G)$ — множество всех индексов индивидуальных переменных, входящих в формулу φ, $in(G) = 0$, $out(G) = 1$, $(i,k,j) \in E(G)$ тогда и только тогда, когда атомарная формула $r_k(z_i, z_j)$ входит в φ; если формула $z_i = z_j$ входит в φ, то вершины i и j отождествляются.

Заметим, что графы, соответствующие операции умножения отношений $\circ$ и операциям цилиндрофикации ∇_1, ∇_2, задаются следующим образом:

$$in\cdot \xrightarrow{1} \cdot \xrightarrow{2} \cdot out, \qquad in\cdot \xrightarrow{1} \cdot \quad \cdot\, out, \qquad in\,\cdot \quad \cdot \xrightarrow{1} \cdot out.$$

Пусть $G = (V, E, in, out)$ и $G_k = (V_k, E_k, in_k, out_k)$ $(k = 1, \dots, m)$ — двухполюсники с попарно непересекающимися множествами вершин. Назовем композицией этих двухполюсников новый двухполюсник $G(G_1, \dots, G_m)$, определяемый следующим образом [10]: возьмем двухполюсник G и заменим каждое его ребро $(u, k, v) \in E$ на двухполюсник G_k, отождествляя при этом вершину in_k с вершиной u и вершину out_k с вершиной v.

Рассмотрим множество примитивно-позитивных операций над отношениями $\Omega = \{F_{\varphi_1}, \dots, F_{\varphi_n}\}$, и пусть $A = (A, f_1, \dots, f_n)$ — универсальная алгебра соответствующего типа. Положим $G_1 = G(\varphi_1),\ \dots,\ G_n = G(\varphi_n)$.

Для всякого терма p алгебры A определим следующим индуктивным образом двухполюсник $G(p) = (V_p, E_p, in(p), out(p))$:

1) если $p = x_k$, то $G(p)$ представляет собой двухполюсник вида $in\cdot \xrightarrow{k} \cdot out$;

2) если $p = f_k(p_1, \dots, p_m)$, то $G(p)$ есть композиция $G_k(G(p_1), \dots, G(p_m))$.

Пусть $G_1 = (V_1, E_1, in_1, out_1)$ и $G_2 = (V_2, E_2, in_2, out_2)$ — двухполюсники. Отображение $f : V_2 \to V_1$ называется гомоморфизмом из G_2 в G_1, если $f(in_2) = in_1$, $f(out_2) = out_1$ и $(f(u), k, f(v)) \in E_1$ для всякой тройки $(u, k, v) \in E_2$. Мы будем писать $G_1 \prec G_2$, если существует гомоморфизм из G_2 в G_1.

Обозначим через $Eq\{\Omega, \subset\}$ эквациональную теорию класса $R\{\Omega, \subset\}$. Теперь мы готовы сформулировать основной результат из [5]:

Тождество $p \le q$ *принадлежит эквациональной теории* $Eq\{\Omega, \subset\}$ *тогда и только тогда, когда* $G(p) \prec G(q)$.

Шаг 2. Обозначим через Σ эквациональную теорию алгебр, удовлетворяющих тождествам 1)–10), и пусть Ξ — множество всех термов алгебры $(A, \cdot, ^*)$ типа $(2,1)$. Для всякого терма p_1 и p_2 из Ξ будем писать $p_1 \prec p_2$ $(p_1 \cong p_2)$, если тождество $p_1 \le p_2$ $(p_1 = p_2)$ принадлежит Σ. В том случае, когда эквивалентность термов устанавливается с помощью тождества с номером k), будем использовать запись $p_1 \overset{k}{\prec} p_2$ $(p_1 \overset{k}{\cong} p_2)$.

Пусть Λ — множество слов над алфавитом $\{x_1, \dots, x_n, \dots\}$, $\odot$ — пустое слово, $\tilde{\Lambda} = \Lambda \cup \{\odot\}$.

Лемма 1. *Для любого терма* $p \in \Xi$ *существуют такие* $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \tilde{\Lambda}$ $(n \ge 0)$, *что* $p \cong (\alpha_1)^* \dots (\alpha_n)^* \alpha_0$.

Доказательство леммы 1 содержится в работе [9].

Лемма 2. *Следующие тождества принадлежат* Σ

$$17)\ (\alpha\beta)^* \le \alpha^*, \qquad 18)\ \alpha^*(\beta\gamma)^* \le \alpha^*\gamma^*.$$

Доказательство. Действительно, $(\alpha\beta)^* \overset{4}{\prec} \alpha\beta^* \overset{8}{\prec} \alpha^*\beta^* \overset{10}{\prec} \alpha^*$ и $\alpha^*(\beta\gamma)^* \overset{4}{\prec} \alpha^*\beta\gamma^* \overset{10}{\prec} \alpha^*\gamma^*$. Лемма доказана.

Шаг 3. Согласно определению графы $G(p) = (V_p, E_p, in(p), out(p))$ для $p \in \Xi$ могут быть построены следующим образом.

Если $p = \alpha = \odot$, то положим по определению $V_p = V_\alpha = \{v_0\}$, $E_p = E_\alpha = \emptyset$, и $in(p) = in(\alpha) = out(p) = out(\alpha) = v_0$.

Пусть $p = \alpha = x_{i_1}x_{i_2}\dots x_{i_n} \in \Lambda$. Тогда $V_p = V_\alpha = \{v_0,\dots,v_n\}$, $E_p = E_\alpha = \{(v_{k-1}, i_k, v_k) : k \in [1,n]\}$, и $in(p) = in(\alpha) = v_0$, $out(p) = out(\alpha) = v_n$:

$$in(\alpha) = v_0 \cdot \xrightarrow{i_1} \cdot \xrightarrow{i_2} \cdot \dots \cdot \xrightarrow{i_n} \cdot v_n = out(\alpha).$$

Пусть $p = (\alpha)^*$. Тогда $V_p = V_{\alpha^*} = V_\alpha \cup \{v_{n+1}\}$, $E_p = E_{\alpha^*} = E_\alpha$, и $in(p) = in(\alpha^*) = in(\alpha) = v_0$, $out(p) = out(\alpha^*) = v_{n+1}$:

$$in(\alpha^*) = v_0 \cdot \xrightarrow{i_1} \cdot \xrightarrow{i_2} \cdot \dots \cdot \xrightarrow{i_n} \cdot \ \cdot v_{n+1} = out(\alpha^*).$$

Пусть $p = (\alpha_1)^*(\alpha_2)^*\dots,(\alpha_n)^*\alpha_0$ и $n > 1$. Будем предполагать, что множества $V_{\alpha_1^*},\dots,V_{\alpha_n^*},V_{\alpha_0}$ попарно не пересекаются. Возьмем в качестве V_p объединение этих множеств, в котором отождествлены следующие вершины: $out(\alpha_1)$ и $in(\alpha_2)$, $out(\alpha_2)$ и $in(\alpha_3)$, ... , $out(\alpha_n)$ и $in(\alpha_0)$. Положим $E_p = E_{\alpha_1} \cup \dots \cup E_{\alpha_n} \cup E_{\alpha_0}$, и $in(p) = in(\alpha_1)$, $out(p) = out(\alpha_0)$.

Лемма 3. *Пусть $\alpha, \beta \in \tilde{\Lambda}$ и существует такое отображение f из V_β в V_α, что $(f(u), k, f(v)) \in E_\alpha$ для всякого $(u, k, v) \in E_\beta$. Тогда найдутся такие $\beta_1, \beta_2 \in \tilde{\Lambda}$, что $\alpha = \beta_1\beta\beta_2$. При этом $\beta_1 = \odot$, если $f(in(\beta)) = in(\alpha)$, и $\beta_2 = \odot$, если $f(in(\beta)) = in(\alpha)$.*

Доказательство. Пусть $\alpha = x_{i_1}x_{i_2}\dots x_{i_n}$, $\beta = x_{j_1}x_{j_2}\dots x_{j_m}$ и $V_\alpha = \{v_0,\dots,v_n\}$, $V_\beta = \{v'_0,\dots,v'_m\}$. Предположим, что $f(v'_0) = v_l$. Тогда $f(v'_k) = v_t$ и $x_{j_k} = x_{i_t}$, где $t = l + k$. Следовательно, достаточно положить $\beta_1 = x_{i_1}\dots x_{i_s}$ (или $\beta_1 = \odot$, если $l = 1$, т. е. $f(in(\beta)) = in(\alpha)$) и $\beta_2 = x_{i_w}\dots x_{i_n}$ (или $\beta_2 = \odot$, если $l + m = n$, т. е. $f(in(\beta)) = in(\alpha)$), где $s = l$ и $w = l + m + 1$. Лемма доказана.

Шаг 4. Легко проверить выполнимость тождеств 8)–10). Откуда следует, что $\Sigma \subset Eq\{\circ, \nabla_1\}$. Таким образом, для доказательства теоремы достаточно показать, что $Eq\{\circ, \nabla_1\} \subset \Sigma$.

Предположим, что тождество $p_1 \le p_2$ принадлежит $Eq\{\circ, \nabla_1, \subset\}$. Тогда согласно сформулированному выше результату из работы [5] имеем $G(p_1) \prec G(p_2)$, т. е. существует гомоморфизм f из $G(p_2)$ в $G(p_1)$. Согласно лемме 1 можно предположить, что $p_1 = (\alpha_1)^*\dots(\alpha_n)^*\alpha_0$ и $p_2 = (\beta_1)^*\dots(\beta_m)^*\beta_0$.

Рассмотрим следующие возможные случаи.

1. $m = n = 0$. Тогда согласно лемме 3 имеем $p_1 = \alpha_0 = \beta_0 = p_2$.

2. $n = 0$, $m > 0$ и $\beta_0 = \odot$. Тогда по лемме 3 имеем $\alpha_0 = \beta_1\lambda_1$ и $\alpha_0 = \mu_k\beta_k\lambda_k$ для $k = 2,\dots m$, откуда

$$p_1 = \alpha_0 \overset{8}{\prec} \alpha_1^* \overset{3}{\prec} \alpha_0^*\dots\alpha_0^* = (\beta_1\lambda_1)^*(\mu_2\beta_2\lambda_2)^*\dots(\mu_m\beta_m\lambda_m)^* \overset{17}{\prec}$$
$$\prec \beta_1^*(\mu_2\beta_k)^*\dots(\mu_m\beta_m)^* \overset{18}{\prec} \beta_1^*\beta_2^*\dots\beta_m^* = p_2.$$

3. $n = 0$, $m > 0$ и $\beta_0 \ne \odot$. Тогда по лемме 3 имеем $\alpha_0 = \mu_0\beta_0$, $\alpha_0 = \beta_1\lambda_1$ и $\alpha_0 = \mu_k\beta_k\lambda_k$ для $k = 2,\dots m$, откуда

$$p_1 = \alpha_0 \overset{9}{\prec} \alpha_1^*\alpha_0 \overset{3}{\prec} \alpha_0^*\dots\alpha_0^*\alpha_0 = (\beta_1\lambda_1)^*(\mu_2\beta_2\lambda_2)^*\dots(\mu_m\beta_m\lambda_m)^*\mu_0\beta_0 \overset{17}{\prec}$$
$$\prec \beta_1^*(\mu_2\beta_k)^*\dots(\mu_m\beta_m)^*\mu_0\beta_0 \overset{18}{\prec} \beta_1^*\beta_2^*\dots\beta_m^*\mu_0\beta_0 \overset{10}{\prec} \beta_1^*\beta_2^*\dots\beta_m^*\beta_0 = p_2.$$

4. $n > 0$, $m > 0$ и $\beta_0 = \odot$. Тогда, учитывая, что компонента связанности графа $G(p_2)$ отображается в некоторую компоненту связанности графа $G(p_1)$, по лемме 3 получаем $\alpha_1 = \beta_1\lambda_1$ и $\alpha_{g(k)} = \mu_k\beta_k\lambda_k$ для $k = 2,\dots m$, где g — функция, отображающая множество $\{2,\dots,m\}$ во множество $\{0,\dots,n\}$. Следовательно,

$$p_1 = \alpha_1^*\dots\alpha_n^*\alpha_0 \overset{3}{\prec} \alpha_1^*\alpha_1^*\dots\alpha_n^*\alpha_0 \overset{6,10}{\prec} \alpha_1^*\alpha_{g(2)}^*\dots\alpha_{g(m)}^* =$$
$$= (\beta_1\lambda_1)^*(\mu_2\beta_2\lambda_2)^*\dots(\mu_m\beta_m\lambda_m)^* \overset{17}{\prec} \beta_1^*(\mu_2\beta_k)^*\dots(\mu_m\beta_m)^* \overset{18}{\prec} \beta_1^*\beta_2^*\dots\beta_m^* = p_2.$$

5. $n > 0$, $m > 0$ и $\beta_0 \ne \odot$. Так как $\beta_0 \ne \odot$, существует ребро в $G(p_2)$, входящее в вершину $out(p_2)$. Значит существует ребро в $G(p_1)$, входящее в вершину $f(out(p_2)) = out(p_1)$, откуда $\alpha_0 \ne \odot$. Далее, учитывая, что компонента связанности графа $G(p_2)$ отображается в некоторую компоненту связанности графа $G(p_1)$, по лемме 3 получаем $\alpha_1 = \beta_1\lambda_1$, $\alpha_0 = \mu_0\beta_0$ и $\alpha_{g(k)} = \mu_k\beta_k\lambda_k$ для $k = 2,\dots m$,

где g — функция, отображающая множество $\{2, \dots, m\}$ во множество $\{0, \dots, n\}$. Поэтому

$$p_1 = \alpha_1^* \dots \alpha_n^* \alpha_0 \overset{3}{\prec} \alpha_1^*\alpha_1^* \dots \alpha_n^*\alpha_0 \overset{7}{\prec} \alpha_1^*\alpha_0^*\alpha_1^* \dots \alpha_n^*\alpha_0 \overset{6,10}{\prec}$$

$$\prec \alpha_1^*\alpha_{g(2)}^* \dots \alpha_{g(m)}^*\alpha_0 = (\beta_1\lambda_1)^*(\mu_2\beta_2\lambda_2)^* \dots (\mu_m\beta_m\lambda_m)^*\mu_0\beta_0 \overset{17}{\prec}$$

$$\prec \beta_1^*(\mu_2\beta_k)^* \dots (\mu_m\beta_m)^*\mu_0\beta_0 \overset{18}{\prec} \beta_1^*\beta_2^* \dots \beta_m^*\mu_0\beta_0 \overset{10}{\prec} \beta_1^*\beta_2^* \dots \beta_m^*\beta_0 = p_2.$$

Таким образом, тождество $p_1 \le p_2$ принадлежит Σ, т. е. $Eq\{\circ, \nabla_1\} \subset \Sigma$. Теорема доказана.

Следствия 1, 2 непосредственно вытекают из теорем 1, 2 и следствия 2 работы [5].

Библиографический список

1. *Вагнер В.В.* Теория отношений и алгебра частичных преобразований // Теория полугрупп и ее приложения. Саратов, 1965. Вып. 1. С. 3–197.

2. *Tarski A. On the calculus of relations* // J. Symbolic Logic. 1941. V. 6. P. 73-89.

3. *Henkin L., Monk J.D., Tarski A.* Cylindric Algebras. North-Holland, Amsterdam, 1971. 311 p.

4. *Schein B.M.* Relation algebras and function semigroups // Semigroup Forum. 1970. V. 1. P. 1–62.

5. *Бредихин Д.А.* Эквациональная теория алгебр отношений с позитивными операциями // Изв. вузов. Математика. 1993. № 3. С. 23–30.

6. *Andreka H., Bredikhin D.A.* The equational theory of union-free algebras of relations // Alg. Univers. 1994. V. 33. P. 12–25.

7. *Бредихин Д.А.* О квазитождествах алгебр отношений с диофантовыми операциями // Сибирск. мат. журн. 1997. Т. 38. С. 29–41.

8. *Бредихин Д.А.* Об алгебрах отношений с диофантовыми операциями // Докл. АН. 1998. Т. 360. С. 594–595.

9. *Bredikhin D.A.* On varieties of semi-groups of relations with operations of cylindrofication // Contributions to General Algebra. 2005. V. 16. P. 1–6.

10. *Böner F, Pöschel F.R.* Clones of operations on binary relations // Contributions to general algebras. 1991. V. 7. P. 50–70.

УДК 517.518

АБСОЛЮТНАЯ СХОДИМОСТЬ ПРОСТЫХ И ДВОЙНЫХ РЯДОВ ФУРЬЕ ПО МУЛЬТИПЛИКАТИВНЫМ СИСТЕМАМ

С.С. Волосивец

Саратовский государственный университет,
кафедра теории функций и приближений
E-mail: VolosivetsSS@mail.ru

Устанавливаются двумерные аналоги известных условий Зигмунда и Саса для абсолютной сходимости рядов Фурье – Виленкина. Также доказывается, что двумерное условие Саса является неулучшаемым в определенном смысле.

Ключевые слова: абсолютная сходимость, ряды Фурье – Виленкина, модуль непрерывности, функции ограниченной p-флуктуации.

Absolute Convergence of Single and Double Fourier Series on Multiplicative Systems

S.S. Volosivets

Saratov State University,
Chair of Theory of Functions and Approximations
E-mail: VolosivetsSS@mail.ru

Two-dimensional analogs of famous Zygmund and Szasz tests for absolute convergence of Fourier – Vilenkin series are established. Also it is proved that two-dimensional Szasz test is the best possible in the certain sense.

Key words: absolute convergence, Fourier – Vilenkin series, modulus of continuity, functions of bounded p-fluctuation.

ВВЕДЕНИЕ

Пусть $\mathbf{P}=\{p_j\}_{j=1}^{\infty}$ — последовательность натуральных чисел, такая что $2 \le p_j \le N$ при всех $j \in \mathbb{N}$ и $\mathbb{Z}_j = \{0, 1, \dots, p_j - 1\}$. По определению полагаем $m_0 = 1$, $m_n = p_1 \dots p_n$ при $n \in \mathbb{N}$. Тогда каждое число $x \in [0, 1)$ имеет разложение

$$x = \sum_{j=1}^{\infty} x_j m_j^{-1}, \qquad x_j \in \mathbb{Z}_j. \tag{1}$$