Таким образом, в случае $\delta_0 \neq 0$ решение исходной задачи $\mathbf{GR}_{1,M}$ можно найти по формуле (3), где $\varphi_0^{\pm}(z)$ и $\varphi_1^{\pm}(z)$ определяются по формулам (28), (30), (35) и (36).

Резюмируя все сказанное выше, в случае $\delta_0 \neq 0$ можно сформулировать следующий основной результат.

Теорема 2. *Если $\delta_0 \neq 0$ и $|\tilde{G}_{k1}(t)| \equiv |\tilde{G}_{k2}(t)|$ на L ($k = 1,\ 2$), то решение задачи $\mathbf{GR}_{1,M}$ сводится к решению в классах аналитических функций двух скалярных задач Римана вида* (19) *и двух скалярных задач Римана вида* (20).

Если же $\delta_0 \neq 0$ и $|\tilde{G}_{k1}(t)| \neq |\tilde{G}_{k2}(t)|$ на L ($k = 1,\ 2$), то решение задачи $\mathbf{GR}_{1,M}$ сводится к решению в классах аналитических функций двух обобщенных скалярных задачи Римана вида (22) *и двух обычных скалярных задач Римана вида* (23).

Кроме того, задача $\mathbf{GR}_{1,M}$ разрешима тогда и только тогда, когда одновременно разрешимы указанные задачи Римана для аналитических функций и дифференциальное уравнение (27).

Библиографический список

1. *Расулов К.М.* Краевые задачи для полианалитических функций и некоторые их приложения. Смоленск: Изд-во СГПУ, 1998. 344 с.

2. *Расулов К.М., Сенчилов В.В.* О решении одной видоизмененной краевой задачи типа Рикье для метааналитических функций в круге // Дифференциальные уравнения. 2005. Т. 41, № 43. С. 415–418.

3. *Гахов Ф.Д.* Краевые задачи. М.: Наука, 1977. 640 с.

4. *Литвинчук Г.С.* Краевые задачи и сингулярные интегральные уравнения со сдвигом. М.: Наука, 1977. 448 с.

5. *Голубев В.В.* Лекции по аналитической теории дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1966. 436 с.

6. *Голузин Г.М.* Геометрическая теория функций комплексного переменного. М.: Наука, 1966. 628 с.

УДК 517.984

О РАВНОСХОДИМОСТИ РАЗЛОЖЕНИЙ ДЛЯ НЕКОТОРОГО КЛАССА ФУНКЦИОНАЛЬНО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ С ИНВОЛЮЦИЕЙ НА ГРАФЕ

М.Ш. Бурлуцкая, А.П. Хромов*

Воронежский государственный университет,
кафедра математического анализа
*Саратовский государственный университет,
кафедра дифференциальных уравнений и прикладной математики
E-mail: bums@kma.vsu.ru, KhromovAP@info.sgu.ru

Для функционально-дифференциального оператора первого порядка, заданного на графе-цикле, устанавливается равносходимость разложений в ряд по собственным и присоединенным функциям и в тригонометрический ряд Фурье.

On the Equiconvergence of Expansions for the Certain Class of the Functional-Differential Operators with Involution on the Graph

M.Sh. Burlutskaya, A.P. Khromov

The equiconvergence of expansions in eigen- and adjoint functions and trigonometric Fourier series is established for a 1-st order functional-differential operator on the graph-cycle.

На связном геометрическом графе Γ, состоящем из трех ребер, образующих цикл, рассматривается функционально-дифференциальный оператор, порождающий следующий оператор L в пространстве вектор-функций $y(x) = (y_1(x), y_2(x), y_3(x))^T$ (T — знак транспонирования), $x \in [0,1]$,

$$(Ly)(x) = \left(l_1(y_1), l_2(y_2), l_3(y_3)\right)^T, \tag{1}$$

$$y_1(0) = y_3(1), \quad y_2(0) = y_1(1), \quad y_3(0) = y_2(1), \tag{2}$$

где $l_k(y_k) = \alpha_k y_k'(x) + \beta_k y_k'(1-x) + p_{k1}(x) y_k(x) + p_{k2}(x) y_k(1-x)$,
$\beta_k^2 - \alpha_k^2 > 0$, $\beta_1^2 + \beta_2^2 + \beta_3^2 \neq 0$, $p_{ij}(x) \in C^1[0,1]$. Краевые условия (2) — это условия непрерывности $y(x)$ во внутренних узлах Γ.

В связи с интенсивным развитием теории краевых задач на ветвящихся многообразиях [1] возникает необходимость в переносе классических результатов спектральной теории операторов на случай операторов, заданных на графах. Компоненты оператора L есть функционально-дифференциальные операторы (ФДО) первого порядка с инволюцией $\nu(x) = 1 - x$. Исследование подобных операторов представляет собой активно развивающееся направление [2]–[6], в том числе и в задачах на графах [7], [8].

Будем рассматривать случай, когда один из коэффициентов при некоторой $y_k'(1-x)$ равен нулю. Пусть для определенности $\beta_3 = 0$, ($\beta_1\beta_2 \neq 0$). Тогда считаем, что $\alpha_3 = 1$, $p_{32}(x) \equiv 0$, и полагаем $p_{31}(x) = p(x)$. В этом случае оператор (1) на третьем ребре примет вид $l_3(y_3) = y_3'(x) + p(x)y_3(x)$. Таким образом, на двух ребрах графа задан ФДО (который может быть приведен к известному оператору Дирака), а на третьем — обычный оператор дифференцирования. В [8] исследовались вопросы о равномерной сходимости на всем графе Γ обобщенных средних Рисса разложений по собственным и присоединенным функциям (с.п.ф.) оператора L. В данной работе для оператора L устанавливается равносходимость разложений в ряд по с.п.ф. и в тригонометрический ряд Фурье.

Отметим, что для корректного задания дифференциального и функционально-дифференциального оператора первого порядка необходимо, чтобы граф содержал цикл, причем единственный. Поэтому полученные в работе результаты могут быть распространены на случай произвольного графа такой структуры. При этом на ребрах, входящих в цикл, может быть задан как ФДО, так и оператор чистого дифференцирования, а на ребрах вне цикла — только ФДО (иначе нарушается регулярность краевых условий).

Сходимость разложений по с.п.ф. исследуется методом контурного интегрирования резольвенты $R_\lambda = (L - \lambda E)^{-1}$ (λ — спектральный параметр, E — единичный оператор) по расширяющимся контурам комплексной плоскости.

1. Для построения и исследования краевой задачи для R_λ воспользуемся некоторыми результатами из [8]. Пусть $y(x) = (R_\lambda f)(x)$, где $y(x) = (y_1(x), y_2(x), y_3(x))^T$, $f(x) = (f_1(x), f_2(x), f_3(x))^T$. Введем в рассмотрение следующую краевую задачу в пространстве вектор-функций размерности 5:

$$Qz'(x) + P(x)z(x) = \lambda z(x) + m(x), \tag{3}$$

$$M_0 z(0) + M_1 z(1) = 0, \tag{4}$$

где $Q = \operatorname{diag}(Q_1, Q_2, Q_3)$, $P(x) = \operatorname{diag}(P_1(x), P_2(x), P_3(x))$, $Q_k = \begin{pmatrix} \alpha_k & -\beta_k \\ \beta_k & -\alpha_k \end{pmatrix}$, $k = 1, 2$, $Q_3 = (1)$, $P_k(x) = \begin{pmatrix} p_{k1}(x) & p_{k2}(x) \\ p_{k2}(1-x) & p_{k1}(1-x) \end{pmatrix}$, $k = 1, 2$, $P_3(x) = (p(x))$, $m(x) = (m_1(x), \ldots, m_5(x))^T$, $m_1(x) = f_1(x)$, $m_2(x) = f_1(1-x)$, $m_3(x) = f_2(x)$, $m_4(x) = f_2(1-x)$, $m_5(x) = f_3(x)$, M_0, M_1 — квадратные матрицы размерности 5, причем $(M_0)_{11} = (M_0)_{32} = (M_0)_{54} = -(M_0)_{33} = -(M_0)_{55} = 1$, $(M_1)_{22} = (M_1)_{41} = -(M_1)_{15} = -(M_1)_{25} = -(M_1)_{44} = 1$, остальные элементы $(M_k)_{ij} = 0$.

Лемма 1. *Если λ таково, что R_λ существует, и $y = R_\lambda f$, то $z(x) = (z_1(x), \ldots, z_5(x))^T$, где $z_1(x) = y_1(x), z_2(x) = y_1(1-x), z_3(x) = y_2(x), z_4(x) = y_2(1-x), z_5(x) = y_3(x)$, является решением* (3)–(4). *Обратно, если $z(x)$ удовлетворяет* (3)–(4) *и соответствующая однородная задача имеет только тривиальное решение, то R_λ существует, и $(R_\lambda f)(x) = (y_1(x), y_2(x), y_3(x))^T$, где $y_1(x) = z_1(x)$, $y_2(x) = z_3(x)$, $y_3(x) = z_5(x)$.*

Диагонализируя задачу (3)–(4), получим

$$u'(x) + \widetilde{P}(x)u(x) = \lambda D u(x) + \widetilde{m}(x), \tag{5}$$

$$\widetilde{M}_0 u(0) + \widetilde{M}_1 u(1) = 0, \tag{6}$$

где $\widetilde{P}(x) = \operatorname{diag}\left(\widetilde{P}_1(x),\ \widetilde{P}_2(x),\ \widetilde{P}_3(x)\right)$, $\widetilde{P}_k(x) = B_k^{-1} Q_k^{-1} P_k(x) B_k$, $D = \operatorname{diag}(D_1, D_2, D_3)$, $D_k = \operatorname{diag}\left(i/\sqrt{d_k}, -i/\sqrt{d_k}\right)$, $d_k = \beta_k^2 - \alpha_k^2$, $k = 1, 2$, $D_3 = (1)$, $\widetilde{m}(x) = \operatorname{diag}(B_1^{-1}Q_1^{-1}, B_2^{-1}Q_2^{-1}, B_3^{-1}Q_3^{-1}) m(x)$, $\widetilde{M}_k = M_k B$, $B = \operatorname{diag}(B_1, B_2, B_3)$, $B_k = \begin{pmatrix} 1 & b_k \\ b_k & 1 \end{pmatrix}$, $b_k = \frac{\left[i\sqrt{d_k} + \alpha_k\right]}{\beta_k}$, $k = 1, 2$, $B_3 = (1)$.

Для получения асимптотических оценок решения краевой задачи (5)–(6) проводится преобразование системы (5), заменяющее ненулевую матрицу $\widetilde{P}(x)$ на матрицу с элементами $O\left(\lambda^{-1}\right)$ ([9], с. 48–58).

Положим $H_0(x) = \operatorname{diag}\left(H_{01}(x), H_{02}(x), H_{03}(x)\right)$, где $H_{01}(x) = \operatorname{diag}\left(h_1(x), h_2(x)\right)$, $H_{02}(x) = \operatorname{diag}\left(h_3(x), h_4(x)\right)$, $H_{03}(x) = \left(h_5(x)\right)$, $h_i(x) = \exp\left\{-\int\limits_0^x \widetilde{p}_{ii}(t)\,dt\right\}$ и $\widetilde{p}_{ii}(x)$ — диагональные элементы матрицы $\widetilde{P}(x)$; $H_1(x) = \operatorname{diag}\left(H_{11}(x), H_{12}(x), H_{13}(x)\right)$, где $H_{13}(x) \equiv 0$, а $H_{1k}(x)$ $(k = 1, 2)$ — кодиагональная матрица, являющаяся единственным решением матричного уравнения: $H'_{0k}(x) + \widetilde{P}_k(x)H_{0k}(x) + (H_{1k}(x)D_k - D_kH_{1k}(x)) = 0$. Так как элементы матрицы $P(x)$ и соответственно $\widetilde{P}(x)$ принадлежат пространству $C^1[0,1]$, то элементы $H_1(x)$ из пространства $C^1[0,1]$, а $H_0(x)$ — из $C^2[0,1]$.

Теорема 1. *Преобразование $z(x,\lambda) = BH(x,\lambda)v(x)$, где $H(x,\lambda) = H_0(x) + \lambda^{-1}H_1(x)$, приводит систему* (3)–(4) *к виду*

$$v'(x) + P(x,\lambda)v(x) = \lambda Dv(x) + m(x,\lambda), \tag{7}$$

$$M_{0\lambda}v(0) + M_{1\lambda}v(1) = 0, \tag{8}$$

где $P(x,\lambda) = \lambda^{-1}H^{-1}(x,\lambda)[H'_1(x) + \widetilde{P}(x)H_1(x)]$, $m(x,\lambda) = H^{-1}(x,\lambda)\widetilde{m}(x)$, $M_{0\lambda} = M_0BH(0,\lambda)$, $M_{1\lambda} = M_1BH(1,\lambda)$.

2. Рассмотрим сначала краевую задачу:

$$w'(x) = \mu\widehat{D}w(x) + m(x), \tag{9}$$

$$U(w) = M_{0\lambda}w(0) + M_{1\lambda}w(1) = 0, \tag{10}$$

где $m = (m_1, m_2, m_3, m_4, m_5)$, $m_i = m_i(x) \in L[0,1]$, $\mu = i\lambda/\sqrt{d_1}$, $\widehat{D} = \operatorname{diag}(1, -1, d, -d, \omega)$, $d = \sqrt{d_1/d_2} > 0$, $\omega = \sqrt{d_1}/i$, т. е. $\lambda D = \mu\widehat{D}$.

Общее решение системы (9) имеет вид

$$w(x,\mu) = V(x,\mu)c + \int\limits_0^1 g(x,t,\mu)m(t)\,dt,$$

где $V(x,\mu) = \operatorname{diag}\left(e^{\mu x}, e^{-\mu x}, e^{\mu dx}, e^{-\mu dx}, e^{\mu\omega x}\right)$, $g(x,t,\mu) = \operatorname{diag}\left(g_1(x,t,\mu), \ldots, g_5(x,t,\mu)\right)$, $g_k(x,t,\mu) = \varepsilon(x,t)e^{\mu\omega_k(x-t)}$, если $\operatorname{Re}\mu\omega_k \le 0$, $g_k(x,t,\mu) = -\varepsilon(t,x)e^{\mu\omega_k(x-t)}$, если $\operatorname{Re}\mu\omega_k \ge 0$; $\varepsilon(x,t) = 1$, если $x \ge t$, $\varepsilon(x,t) = 0$, если $x \le t$, $\omega_1 = 1$, $\omega_2 = -1$, $\omega_3 = d$, $\omega_4 = -d$, $\omega_5 = \omega$, c — произвольный вектор. Подчиняя его краевым условиям (10) получим следующий результат.

Лемма 2. *Если μ таково, что матрица $\Delta(\mu) = U(V(x,\mu))$ обратима, то краевая задача* (9)–(10) *однозначно разрешима при любой $m(x)$ с компонентами из $L[0,1]$, и ее решение имеет вид*

$$w(x,\mu) = R_{1\mu}m(x) = -V(x,\mu)\Delta^{-1}(\mu)U(g_\mu m(x)) + g_\mu m(x), \tag{11}$$

где $g_\mu m(x) = \int\limits_0^1 g(x,t,\mu)m(t)\,dt$, $U(g_\mu m(x)) = \int\limits_0^1 U_x(g(x,t,\mu))m(t)\,dt$, ($U_x$ означает, что U применяется к g по переменной x).

Из ограниченности компонент матрицы $g(x,t,\mu)$ следует

Лемма 3. *Имеют место оценки:*

$$\|g_\mu m\|_\infty = O(\|m\|_1), \qquad \|U(g_\mu m)\|_\infty = O(\|m\|_1),$$

где $\|\cdot\|_\infty$ ($\|\cdot\|_1$) — норма в пространстве вектор-функций размерности 5 с компонентами из L_∞ (L_1).

Так же как в [8] можно показать, что для определителя $\delta(\mu) = \det\Delta(\mu)$ справедливо следующее асимптотическое представление:

$$\det\Delta(\mu)=A_1(\mu)e^{\mu+\mu d+\mu\omega}+A_2(\mu)e^{\mu+\mu d}+A_3(\mu)e^{-\mu-\mu d}+A_4(\mu)e^{-\mu-\mu d+\mu\omega}+\sum_{k=5}^{20}A_k(\mu)e^{a_k\mu+b_k\mu d+c_k\mu\omega},$$

где $A_k(\mu)=\nu_k+O\left(\mu^{-1}\right)$, $k=\overline{1,4}$, $\nu_1=b_1\,b_2\,h_1(1)h_3(1)h_5(1)$, $\nu_2=-b_1^2\,b_2^2\,h_1(1)h_3(1)$, $\nu_3=-h_2(1)h_4(1)$, $\nu_4=-b_1\,b_2\,h_2(1)h_4(1)h_5(1)$, причем $\nu_k\neq 0$; $A_k(\mu)=O(1)$, $k=\overline{5,20}$, $a_k\mu+b_k\mu d+c_k\mu\omega$ — различные комбинации, отличные от показателей экспонент первых четырех слагаемых (числа a_k, b_k, c_k есть 0, 1 или -1).

Далее предполагаем, что $\mathrm{Re}\,\mu\geq 0$, $\mathrm{Re}\,\mu\omega\geq 0$ (остальные случаи рассматриваются аналогично). Тогда $\det\Delta(\mu)=e^{\mu+\mu d+\mu\omega}T(\mu)$, где $T(\mu)$ есть квазиполином, который имеет счетное количество нулей (см. [10, с. 113, лемма 1]), все они находятся в полосах вдоль мнимой и действительной осей, причем в любых прямоугольниках $|\mathrm{Im}\,\mu-t|\leq 1$, $|\mathrm{Re}\,\mu-t|\leq 1$ соответствующих полос их число ограничено некоторой константой, не зависящей от t. Вырежем из комплексной плоскости эти нули вместе с круговыми окрестностями одного и того же радиуса δ_0. Полученную область обозначим S_{δ_0}. Тогда в S_{δ_0} при $\mathrm{Re}\,\mu\geq 0$, $\mathrm{Re}\,\mu\omega\geq 0$ справедлива оценка $|\delta(\mu)|\geq c\left|e^{\mu(1+d+\omega)}\right|$. Отсюда и из оценки элементов матриц $\Delta^{-1}(\mu)$ и $V(x,\mu)$ следует

Лемма 4. *Если $x\in[\delta,1-\delta]$ ($\delta\in[0,1/2)$), то компоненты матрицы $V(x,\mu)\Delta^{-1}(\mu)=(\eta_{ij}(x,\mu))_{i,j=1}^5$ в области S_{δ_0} имеют следующие оценки: $\eta_{ij}(x,\mu)=O\left(e^{-\mu\omega_k\delta}\right)$, $i=\overline{1,5}$, $j=\overline{1,5}$, где $\omega_{1,2}=1$, $\omega_{3,4}=d$, $\omega_5=\omega$.*

С помощью лемм 2, 3 и 4, так же как теорема 2 из [6], доказывается

Лемма 5. *В области S_{δ_0} при больших $|\mu|$ справедливы оценки*

$$\|R_{1\mu}m\|_\infty=O\left(\|m\|_1\right),\tag{12}$$

$$\|R_{1\mu}\varphi\|_\infty=O\left(\mu^{-1}\right),\tag{13}$$

где $\varphi(x)$ — вектор-функция, каждая компонента которой есть функция ограниченной вариации.

Лемма 6. *В области S_{δ_0} при больших $|\mu|$ краевая задача* (7)–(8) *однозначно разрешима, и для ее решения $v(x,\lambda)$ справедлива оценка*

$$\|v(x,\lambda)-R_{1\mu}H_0^{-1}\widetilde{m}\|_\infty=O\left(\mu^{-1}\|f\|_1\right).$$

Доказательство. Из (7) имеем $v(x,\lambda){=}R_{1\mu}\left(m(x,\lambda)-P(x,\lambda)v(x,\lambda)\right)$, или

$$(E+R_{1\mu}P(x,\lambda))v(x,\lambda)=R_{1\mu}m(x,\lambda).\tag{14}$$

Так как ядро оператора $R_{1\mu}$ ограниченно, а $P(x,\lambda)=O\left(\lambda^{-1}\right)=O\left(\mu^{-1}\right)$, то оператор $E+R_{1\mu}P(x,\lambda)$ обратим в L_∞. Поэтому уравнение (14) однозначно разрешимо и $v(x,\lambda)=L_\mu R_{1\mu}m(x,\lambda)$, где $L_\mu=(E+R_{1\mu}P(x,\lambda))^{-1}$. Учитывая, что $L_\mu=E-L_\mu R_{1\mu}P(x,\lambda)$, получим $v(x,\lambda)=R_{1\mu}m(x,\lambda)-L_\mu R_{1\mu}P(x,\lambda)R_{1\mu}m(x,\lambda)$. Отсюда, используя представления $m(x,\lambda)=H^{-1}(x,\lambda)\widetilde{m}(x)$, $H^{-1}(x,\lambda)=H_0^{-1}(x)+O\left(\mu^{-1}\right)$, оценку (12) и ограниченность оператора L_μ, получим утверждение леммы. □

Аналогично, учитывая оценку (13), имеем

Лемма 7. *Если компоненты $\widetilde{m}(x)$ есть функции ограниченной вариации, то*

$$\|v(x,\lambda)-R_{1\mu}H_0^{-1}\widetilde{m}\|_\infty=O\left(\mu^{-2}\right).$$

Из лемм 6 и 7 по теореме Банаха – Штейнгауза следует

Лемма 8. *Если $\widetilde{m}(x)$ та же, что и в* (5) *для интегрируемой вектор-функции $f(x)=(f_1(x),f_2(x),f_3(x))^T$, то*

$$\lim_{r\to\infty}\left\|\int\limits_{|\lambda|=r}H(x,\lambda)\left[v(x,\lambda)-R_{1\mu}H_0^{-1}\widetilde{m}\right]\,d\lambda\right\|_\infty=0$$

(интегрирование проводится по контурам, целиком лежащим в S_{δ_0}).

3. Для получения основного результата статьи (теоремы равносходимости) рассмотрим следующую краевую задачу:

$$u'(x)=\mu\widehat{D}u(x)+m(x),\quad U_0(u)=u(0)-u(1)=0.\tag{15}$$

Удалим из S_{δ_0} вместе с круговыми окрестностями радиуса δ_0 собственные значения краевых задач: $u_j'(x) = \mu\omega_j u_j(x)$, $u_j(0) - u_j(1) = 0$, ($j = \overline{1,5}$), где $\omega_1 = 1$; $\omega_2 = -1$; $\omega_3 = d$; $\omega_4 = -d$; $\omega_5 = \omega$, и получившуюся область снова обозначим S_{δ_0}. Тогда в S_{δ_0} задача (15) однозначно разрешима, и ее решение есть $R_{2\mu}m$, которое имеет тот же вид (11), что и $R_{1\mu}m$, с заменой U на U_0.

Лемма 9. *Если $\widetilde{m}(x)$ та же, что и в лемме 8, то*

$$\lim_{r\to\infty}\Big\| \int\limits_{|\lambda|=r} H(x,\lambda)\left[R_{1\mu}H_0^{-1}\widetilde{m} - R_{2\mu}H_0^{-1}\widetilde{m}\right]\, d\lambda \Big\|_{C[\varepsilon,1-\varepsilon]} = 0,$$

где $\varepsilon \in (0,1/2)$, и $\|\cdot\|_{C[\varepsilon,1-\varepsilon]}$ — норма в пространстве непрерывных вектор-функций на $[\varepsilon, 1-\varepsilon]$.

Доказательство повторяет доказательство леммы 13 из [6].

Лемма 10. *Для любой функции $f(x) = (f_1(x), f_2(x), f_3(x))^T$, $f_i(x) \in L[0,1]$,*

$$\lim_{r\to\infty}\Big\| \int\limits_{|\lambda|=r} \left[H(x,\lambda)v(x,\lambda) - H_0(x)R_{2\mu}H_0^{-1}\widetilde{m}\right]\, d\lambda \Big\|_{C[\varepsilon,1-\varepsilon]} = 0, \tag{16}$$

где $v(x,\lambda)$ — решение задачи (7)–(8), и $\widetilde{m}(x)$ та же, что и в (5).

Доказательство. Обозначим интеграл в (16) через I. Представим его в виде суммы $I = I_1 + I_2 + I_3$, где $I_1 = \int\limits_{|\lambda|=r} H(x,\lambda)[v(x,\lambda) - R_{1\mu}H_0^{-1}\widetilde{m}]\, d\lambda$, $I_2 = \int\limits_{|\lambda|=r} H(x,\lambda)[R_{1\mu}H_0^{-1}\widetilde{m} - R_{2\mu}H_0^{-1}\widetilde{m}]\, d\lambda$,

$I_3 = \int\limits_{|\lambda|=r} (H(x,\lambda) - H_0(x))R_{2\mu}H_0^{-1}\widetilde{m}\, d\lambda$. По леммам 8 и 9, $\|I_1\|_\infty \to 0$, $\|I_2\|_{C[\varepsilon,1-\varepsilon]} \to 0$, при $r \to \infty$. Так как $H(x,\lambda) - H_0(x) = O\left(\lambda^{-1}\right)$, и $R_{2\mu}H_0^{-1}\widetilde{m} = O\left(\|f\|_1\right)$, то $\|I_3\|_\infty = O\left(\|f\|_1\right)$. Если $f_i(x)$ $(i = 1,2,3)$ есть непрерывные функции ограниченной вариации, то $R_{2\mu}H_0^{-1}\widetilde{m} = O\left(\mu^{-1}\right)$ и $\|I_3\|_\infty = O\left(r^{-1}\right)$. Тогда по теореме Банаха – Штейнгауза $\|I_3\|_\infty \to 0$, при $r \to \infty$. Отсюда следует утверждение леммы. □

Обозначим через $S_r(f,x)$ частичную сумму ряда Фурье функции f по с.п.ф. оператора L для собственных чисел λ_k, попадающих в круг $|\lambda_k| < r$; через $\sigma_{r_j}(f_j,x)$ частичную сумму ряда Фурье функции f_j по тригонометрической системе $\{e^{2k\pi ix}\}_{k=-\infty}^{+\infty}$, включающую слагаемые, для которых $|2\pi k| < r_j$.

Теорема 2. *Для любой вектор-функции $f(x) = (f_1(x), f_2(x), f_3(x))^T$ с компонентами $f_i(x)$ из $L[0,1]$, и любого $\varepsilon \in (0,1/2)$*

$$\lim_{r\to\infty}\left\| S_r(f,x) - (\sigma_{r_1}(f_1,x), \sigma_{r_2}(f_2,x), \sigma_r(f_3,x))^T \right\|_{C[\varepsilon,1-\varepsilon]} = 0,$$

где $r_1 = r/\sqrt{d_1}$, $r_2 = r/\sqrt{d_2}$.

Доказательство. Из леммы 1, $R_\lambda f = (z_1(x,\lambda), z_3(x,\lambda), z_5(x,\lambda))^T$, где z_i — компоненты решения задачи (3)–(4). Учитывая теорему 1 и лемму 10,

$$(S_r(f,x))_1 = -\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\lambda|=r} z_1(x,\lambda)\, d\lambda = -\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\lambda|=r} I_\lambda(x)\, d\lambda + o(1), \tag{17}$$

где I_λ есть первая компонента вектора $BH_0(x)R_{2\mu}H_0^{-1}(x)\widetilde{m}$, а $o(1) \to 0$ при $r \to \infty$ равномерно по $x \in [\varepsilon, 1-\varepsilon]$. Вычислим I_λ. Имеем

$$I_\lambda(x) = \left(BH_0(x)R_{2\mu}H_0^{-1}(x)B^{-1}Q^{-1}m(x)\right)_1,$$

где $m(x) = (f_1(x), f_1(1-x), f_2(x), f_2(1-x), f_3(x))^T$. Полагая $BH_0(x) = (\gamma_{ij}(x))_{i,j=1}^5$, $H_0^{-1}(x)B^{-1} = (\delta_{ij}(x))_{i,j=1}^5$, и учитывая, что $R_{2\mu} = \mathrm{diag}\,(R_\mu^0, R_{-\mu}^0, R_{\mu d}^0, R_{-\mu d}^0, R_{\mu\omega}^0)$ (R_λ^0 — резольвента скалярного оператора $L_0 y = y'$, $y(0) = y(1)$), найдем

$$I_\lambda = \gamma_{11}R_\mu^0\big(\delta_{11}g_1 + \delta_{12}g_2\big) + \gamma_{12}R_{-\mu}^0\big(\delta_{21}g_1 + \delta_{22}g_2\big),$$

где $g_1(x) = {d_1}^{-1}[-\alpha_1 f_1(x) + \beta_1 f_1(1-x)]$, $g_2(x) = {d_1}^{-1}[-\beta_1 f_1(x) + \alpha_1 f_1(1-x)]$.

Так как $\mu = i\lambda/\sqrt{d_1}$, то

$$-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\lambda|=r}(R_\mu^0 f)(x)\,d\lambda = \frac{\sqrt{d_1}}{i}\,\sigma_{r_1}(f,x), \qquad -\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\lambda|=r}(R_{-\mu}^0 f)(x)\,d\lambda = -\frac{\sqrt{d_1}}{i}\,\sigma_{r_1}(f,x),$$

где $r_1 = r/\sqrt{d_1}$. Поэтому

$$-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\lambda|=r} I_\lambda(x)\,d\lambda = \frac{\sqrt{d_1}}{i}\Big\{\gamma_{11}(x)\big[\sigma_{r_1}(\delta_{11}g_1,x) + \sigma_{r_1}(\delta_{12}g_2,x)\big] - \\ -\gamma_{12}(x)\big[\sigma_{r_1}(\delta_{21}g_1,x) + \sigma_{r_1}(\delta_{22}g_2,x)\big]\Big\}. \tag{18}$$

Далее используя принцип локализации и теорему Штейнгауза ([11], с. 111), несложно получить, что если $a(x)$ удовлетворяет условию Липшица первого порядка, то $\|\sigma_r(af,x) - a(x)\sigma_r(f,x)\|_{C[\varepsilon,1-\varepsilon]} \to 0$, при $r\to\infty$ для любой функции $f(x)\in L[0,1]$. Следовательно, (18) перейдет в

$$-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\lambda|=r} I_\lambda(x)\,d\lambda = \frac{1}{i\sqrt{d_1}}\,\big[\theta_1\sigma_{r_1}(f_1,x) + \theta_2\sigma_{r_1}(\widetilde{f}_1,x)\big] + o(1), \tag{19}$$

где $\theta_1 = \alpha_1(\gamma_{12}\delta_{21} - \gamma_{11}\delta_{11}) + \beta_1(\gamma_{12}\delta_{22} - \gamma_{11}\delta_{12})$, $\theta_2 = \alpha_1(\gamma_{11}\delta_{12} - \gamma_{12}\delta_{22}) + \beta_1(\gamma_{11}\delta_{11} - \gamma_{12}\delta_{21})$, $\widetilde{f}_1(x) = f(1-x)$. Непосредственно вычислив элементы $\gamma_{ij}(x)$ и $\delta_{ij}(x)$, найдем, что $\theta_1 = i\sqrt{d_1}$, $\theta_2 = 0$. Таким образом, из (17) и (19) имеем $(S_r(f,x))_1 = \sigma_{r_1}(f_1,x) + o(1)$.

Аналогично доказывается, что $(S_r(f,x))_2 = \sigma_{r_2}(f_2,x) + o(1)$, где $r_2 = rd/\sqrt{d_1} = (r\sqrt{d_1})/(\sqrt{d_1}\sqrt{d_2}) = r/\sqrt{d_2}$, а $o(1)\to 0$ при $r\to\infty$ равномерно по $x\in[\varepsilon,1-\varepsilon]$. Для третьей компоненты $S_r(f,x)$ имеем $(S_r(f,x))_3 = \sigma_r(f_3,x) + o(1)$. Отсюда следует утверждение теоремы. $\square$

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (*проекты* 06-01-00003, 07-01-00397).

Библиографический список

1. *Покорный Ю.В., Пенкин О.М., Прядиев В.Л. и др.* Дифференциальные уравнения на геометрических графах. М.:Физматлит, 2004. 272 с.

2. *Андреев А.А.* Об аналогах классических краевых задач для одного дифференциального уравнения второго порядка с отклоняющимся аргументом // Дифференц. уравнения. 2004. Т. 40, № 5. С. 1126–1128.

3. *Dankl Ch.G.* Differential-Difference Operators Associated to Reflection Groups // Trans. Amer. Math. Soc. 1989. V. 311, № 1. P. 167–183.

4. *Платонов С.С.* Разложение по собственным функциям для некоторых функционально-дифференциальных операторов // Тр. Петрозавод. ун-та. Сер. Матем. 2004. Вып. 11. С. 15–35.

5. *Хромов А.П.* Теоремы равносходимости для интегро-дифференциальных и интегральных операторов // Мат. сборник. 1981. Т. 114(156), № 3. С. 378–405.

6. *Корнев В.В., Хромов А.П.* О равносходимости разложений по собственным функциям интегральных операторов с ядрами, допускающими разрывы производных на диагоналях // Мат. сборник. 2001. Т. 192, № 10. С. 33–50.

7. *Бурлуцкая М.Ш., Курдюмов В.П., Луконина А.С., Хромов А.П.* Функционально-дифференциальный оператор с инволюцией // Докл. АН. 2007. Т. 414, № 4. С. 443–446.

8. *Бурлуцкая М.Ш., Хромов А.П.* О сходимости средних Рисса разложений по собственным функциям функционально-дифференциального оператора на графе-цикле //Изв. Сарат. ун-та. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2007. Т. 7, вып. 1. С. 3–8.

9. *Рапопорт И.М.* О некоторых асимптотических методах в теории дифференциальных уравнений. Киев: Изд-во АН Укр. ССР, 1954. 287 с.

10. *Расулов М.Л.* Метод контурного интеграла и его применение к исследованию задач для дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1964. 464 с.

11. *Бари Н.К.* Тригонометрические ряды. М.: Физматгиз, 1961. 936 с.