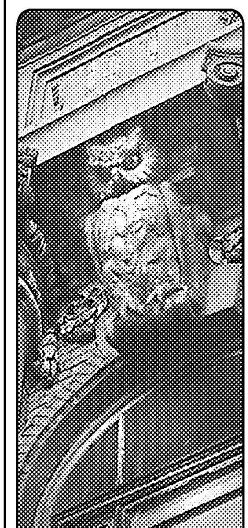
НАУЧНЫЙ ОТДЕЛ



МАТЕМАТИКА

УДК 517.95, 517.984

ОБОСНОВАНИЕ МЕТОДА ФУРЬЕ В СМЕШАННЫХ ЗАДАЧАХ С ИНВОЛЮЦИЕЙ

М. Ш. Бурлуцкая, А. П. Хромов*

Воронежский государственный университет,
кафедра математического анализа
*Саратовский государственный университет,
кафедра дифференциальных уравнений и прикладной математики
E-mail: bmsh2001@mail.ru, KhromovAP@info.sgu.ru

В работе исследуется смешанная задача для дифференциального уравнения первого порядка с инволюцией. Приводится обоснование применения метода Фурье на основе полученных уточненных асимптотических формул для собственных значений и собственных функций соответствующей спектральной задачи. Использованы приемы, позволяющие преобразовать ряд, представляющий формальное решение по методу Фурье, и доказать возможность его почленного дифференцирования. При этом на начальные данные задачи накладываются минимальные требования.

Ключевые слова: смешанная задача, инволюция, метод Фурье, классическое решение, асимптотика собственных значений и собственных функций, система Дирака.

Substantiation of Fourier Method in Mixed Problem with Involution

M. Sh. Burlutskaya, A. P. Khromov*

Voronezh State University,
Chair of Mathematical Analysis
*Saratov State University,
Chair of Differential Equations and Applied Mathematics
E-mail: bmsh2001@mail.ru, KhromovAP@info.sgu.ru

In this paper the mixed problem for the first order differential equation with involution is investigated. Using the received specified asymptotic formulas for eigenvalues and eigenfunctions of the corresponding spectral problem, the application of the Fourier method is substantiated. We used techniques, which allow to transform a series representing the formal solution on Fourier method, and to prove the possibility of its term by term differentiation. At the same time on the initial problem data minimum requirements are imposed.

Key words: mixed problem, involution, Fourier method, classical solution, asymptotic of eigenvalues and eigenfunctions, Dirac system.

При решении смешанных задач для уравнений в частных производных методом Фурье при обосновании равномерной сходимости ряда, представляющего решение, и рядов, полученных из него почленным дифференцированием, приходится накладывать завышенные требования на начальные данные задачи. Избежать этой проблемы впервые удалось А. Н. Крылову [1], предложившему прием, который он назвал методом ускорения сходимости рядов Фурье и им подобных. Этот прием заключался в том, что из исследуемого ряда выделялся ряд простейшего вида с медленной сходимостью, но сумма которого явно вычислялась, следовательно, можно было непосредственно судить о ее гладкости. Оставшийся ряд уже имел достаточно большую скорость сходимости для того, чтобы его можно было продифференцировать почленно нужное число раз, и получающиеся ряды уже равномерно сходились. Развивая прием А. Н. Крылова, В. А. Чернятин [2] изучил ряд смешанных задач (для волнового уравнения, уравнения теплопроводности, уравнения Шредингера), так что в результате требования гладкости начальных данных в методе Фурье не имеют никакого завышения и становятся естественными.

В данной работе, используя идеи А. Н. Крылова, В. А. Чернятина, приводится решение, полученное методом Фурье, следующей смешанной задачи:

$$\frac{1}{\beta i}\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = \left.\frac{\partial u(\xi,t)}{\partial \xi}\right|_{\xi=1-x} + q(x)u(x,t), \quad x\in[0,1], \quad t\in(-\infty,\infty), \tag{1}$$

$$u(0,t)=0, \qquad u(x,0)=\varphi(x), \tag{2}$$

где β — вещественное число, $q(x)\in C^1[0,1]$ и вещественна, $\varphi(x)$ удовлетворяет естественным условиям $\varphi(x)\in C^1[0,1]$ и $\varphi(0)=\varphi'(1)=0$. Решение ищется в классе функций непрерывно дифференцируемых по обеим переменным в полосе $[0,1]\times(-\infty,+\infty)$.

Решение задачи (1)–(2) в случае симметричного потенциала ($q(x)=q(1-x)$) получено в [3]. В общем случае эта задача рассматривалась в работах М. Ш. Бурлуцкой и А. П. Хромова [4, 5]. В данной работе обосновывается применение схемы, изложенной в [4, 5], на базе полученных уточненных асимптотических формул для собственных значений и собственных функций соответствующей (1)–(2) спектральной задачи:

$$y'(1-x)+q(x)y(x)=\lambda y(x), \quad y(0)=0. \tag{3}$$

Для удобства читателя в работе приводятся некоторые результаты из [5].

1. АСИМПТОТИЧЕСКИЕ ФОРМУЛЫ ДЛЯ СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЙ И СОБСТВЕННЫХ ФУНКЦИЙ ЗАДАЧИ (3)

Обозначим через L оператор

$$Ly=y'(1-x)+q(x)y(x), \quad y(0)=0,$$

порождаемый задачей (3).

Приведем задачу (3) к задаче в пространстве вектор-функций размерности 2. Положим $z(x)=(z_1(x),z_2(x))^T$, где $z_1(x)=y(x)$, $z_2(x)=y(1-x)$. Тогда из уравнения (3) получим векторно-матричное уравнение:

$$Bz'(x)+P(x)z(x)=\lambda z(x), \tag{4}$$

где $B=\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0\end{pmatrix}$, $P(x)=\begin{pmatrix} q(x) & 0 \\ 0 & q(1-x)\end{pmatrix}$, $z_1(x)=z_2(1-x)$. Более того, справедливо следующее утверждение [5, лемма 12].

Лемма 1. *Число λ является собственным значением, а $y(x)$ — собственной функцией краевой задачи* (3) *тогда и только тогда, когда $z(x)=(z_1(x),z_2(x))^T=(y(x),y(1-x))^T$ является ненулевым решением системы* (4) *с краевыми условиями:*

$$z_1(0)=0, \quad z_1(1/2)=z_2(1/2). \tag{5}$$

Нетрудно убедиться в справедливости следующего утверждения.

Лемма 2. *Пусть $\Gamma=\begin{pmatrix} 1 & -i \\ -i & 1\end{pmatrix}$, $H(x)=\operatorname{diag}(h_1(x),h_2(x))$, где $h_k(x)=e^{-\int_0^x p_k(t)\,dt}$, $k=1,2$, $p_1(x)=-p_2(x)=-\frac{i}{2}[q(x)+q(1-x)]$. Замена $z(x)=\Gamma H(x)u(x)$, где $u=(u_1,u_2)^T$, приводит систему* (4) *к виду*

$$u'(x)+Q(x)u(x)=\lambda Du(x), \tag{6}$$

где $D=\operatorname{diag}(-i,i)$, $Q(x)=\begin{pmatrix} 0 & q_2(x) \\ q_1(x) & 0\end{pmatrix}$, $q_1(x)=\frac{1}{2}[q(1-x)-q(x)]e^{i\left[\int_0^x q(t)\,dt+\int_{1-x}^1 q(t)\,dt\right]}$, $q_2(x)=\frac{1}{2}[q(1-x)-q(x)]e^{-i\left[\int_0^x q(t)\,dt+\int_{1-x}^1 q(t)\,dt\right]}$.

Замечание. Легко проверить, что функции $h_k(x)$ удовлетворяют соотношению

$$h_1(x) = e^{i\int\limits_0^1 q(t)\,dt} h_2(1-x). \tag{7}$$

Для удобства обозначим $\mu = -\lambda i$. Тогда $\lambda D = \mu\widetilde{D}$, где $\widetilde{D} = \operatorname{diag}(1,-1)$ и уравнение (6) примет вид

$$u'(x) + Q(x)u(x) = \mu\widetilde{D}u(x). \tag{8}$$

Уравнение (8) представляет собой двумерное уравнение Дирака. Для общего решения этого уравнения известна следующая асимптотическая формула:

$$u(x,\mu) = U(x,\mu)e^{\mu\widetilde{D}x}c, \qquad U(x,\mu) = E + O\left(\mu^{-1}\right), \tag{9}$$

где E — единичная матрица 2×2, $c = (c_1, c_2)^T$ — произвольный вектор, матрица-функция $O(\mu^{-1})$ регулярна[1] в полуплоскостях $\operatorname{Re}\mu \ge 0$ и $\operatorname{Re}\mu \le 0$ при $|\mu|$ достаточно больших. В статье [6] приводится описание нового элементарного метода получения формулы (9). Этот метод позволяет достаточно просто найти уточненные асимптотические формулы для решения уравнения (8), а именно справедливо утверждение (см. [7]).

Теорема 1. *Если* $\operatorname{Re}\mu \ge 0$, $q_j(x) \in C^1[0,1]$, *то для общего решения уравнения* (8) *имеем следующую асимптотическую формулу:*

$$u(x,\mu) = U(x,\mu)e^{\mu\widetilde{D}x}c,$$

где $U(x,\mu) = (u_{ij}(x,\mu))_{i,j=1,2}$, $c = (c_1,c_2)^T$ *— произвольный вектор и*

$$u_{11}(x,\mu) = 1 + \frac{1}{2\mu}\int\limits_0^x q_1(t)q_2(t)\,dt + O\left(\frac{1}{\mu^2}\right),$$

$$u_{12}(x,\mu) = \frac{1}{2\mu}\left(q_2(x) - q_2(1)e^{-2\mu(1-x)} + \int\limits_x^1 e^{2\mu(x-t)}q_2'(t)\,dt\right) + O\left(\frac{1}{\mu^2}\right),$$

$$u_{21}(x,\mu) = -\frac{1}{2\mu}\left(q_1(x) - q_1(0)e^{-2\mu x} - \int\limits_0^x e^{-2\mu(x-t)}q_1'(t)\,dt\right) + O\left(\frac{1}{\mu^2}\right),$$

$$u_{22}(x,\mu) = 1 - \frac{1}{2\mu}\int\limits_0^x q_1(t)q_2(t)\,dt + O\left(\frac{1}{\mu^2}\right).$$

Аналогичный результат может быть получен при $\operatorname{Re}\mu \le 0$.

Всюду, далее, для определенности будем считать, что $\operatorname{Re}\mu \ge 0$, соответственно $\operatorname{Re}\lambda i \le 0$ (противоположный случай рассматривается аналогично).

По лемме 2 имеем:

$$\begin{aligned} z_1(x) &= c_1e^{\mu x}\left[h_1(x)u_{11}(x) - ih_2(x)u_{21}(x)\right] + c_2e^{-\mu x}\left[h_1(x)u_{12}(x) - ih_2(x)u_{22}(x)\right],\\ z_2(x) &= c_1e^{\mu x}\left[-ih_1(x)u_{11}(x) + h_2(x)u_{21}(x)\right] + c_2e^{-\mu x}\left[-ih_1(x)u_{12}(x) + h_2(x)u_{22}(x)\right] \end{aligned} \tag{10}$$

(здесь для удобства аргументы λ и μ у соответствующих функций опущены). Из краевых условий (5) получим следующее уравнение для собственных значений:

$$\begin{vmatrix} u_{11}(0) - iu_{21}(0) & u_{12}(0) - iu_{22}(0) \\ e^{\frac{\mu}{2}}\left[h_2\left(\frac12\right)u_{21}\left(\frac12\right) - ih_1\left(\frac12\right)u_{11}\left(\frac12\right)\right] & e^{-\frac{\mu}{2}}\left[h_2\left(\frac12\right)u_{22}\left(\frac12\right) - ih_1\left(\frac12\right)u_{12}\left(\frac12\right)\right] \end{vmatrix} = 0. \tag{11}$$

Для получения простейших асимптотических оценок собственных значений используем сначала u_{ij} из формулы (9). Обозначая $[1] = 1 + O(1/\mu)$, имеем

$$u_{kk}(x,\mu) = [1], \quad u_{kj}(x,\mu) = O\left(\frac{1}{\mu}\right), \qquad k,j = 1,2, \quad k \ne j. \tag{12}$$

[1]Под регулярностью понимается аналитичность функции внутри области и непрерывность на границе.

Поэтому уравнение (11) примет вид

$$\begin{vmatrix} [1] & -i[1]+O\left(\frac{1}{\mu}\right) \\ e^{\frac{\mu}{2}}\left[-h_1\left(\frac{1}{2}\right)[1]+O\left(\frac{1}{\mu}\right)\right] & e^{-\frac{\mu}{2}}\left[h_2\left(\frac{1}{2}\right)[1]+O\left(\frac{1}{\mu}\right)\right] \end{vmatrix} = 0.$$

Отсюда, учитывая, что $\dfrac{h_2(1/2)}{h_1(1/2)} = e^{-i\int\limits_0^1 q(t)\,dt}$, получим $e^{\mu} = -ie^{-i\int\limits_0^1 q(t)\,dt}[1]$, откуда

$$\mu_n = -\left(\frac{\pi}{2}+\int\limits_0^1 q(t)\,dt\right)i - 2\pi ni + O(1/\mu)$$

и $O\,(1/\mu) = O\,(1/n)$. Вычисляя теперь $\lambda_n = i\mu_n$, придем к следующему утверждению.

Теорема 2. *Для собственных значений λ_n задачи (4)–(5) имеют место асимптотические формулы:*

$$\lambda_n = \lambda_n^0 + O\left(\frac{1}{n}\right), \quad n = \pm n_0, \pm(n_0+1), \ldots, \tag{13}$$

где $\lambda_n^0 = 2\pi n + a$, $a = \dfrac{\pi}{2}+\int\limits_0^1 q(t)\,dt$, n_0 — некоторое достаточно большое натуральное число. При этом собственные значения, достаточно большие по модулю, простые.

Для того чтобы получить более тонкие оценки для собственных значений, воспользуемся в уравнении (11) значениями $u_{ij}(1/2)$ и $u_{ij}(0)$, вычисленными по уточненным формулам из теоремы 1 при $\mu = \mu_n$. Всюду далее через α будем обозначать различные константы, не зависящие от n (из конечного набора констант), через α_n — такие константы, что $\sum\limits_{-\infty}^{\infty} |\alpha_n|^2 < \infty$.

Лемма 3. *Для любого целого числа k, любой функции $s(x) \in C[0,1]$ и $p = \pm 1$ имеем:*

$$e^{k\mu_n} = \alpha + O\left(\frac{1}{n}\right), \tag{14}$$

$$\int\limits_0^{1/2} e^{2p\mu_n t} s(t)\,dt = \alpha_n + O\left(\frac{1}{n}\right), \tag{15}$$

$$\int\limits_0^{1} e^{2p\mu_n t} s(t)\,dt = \alpha_n + O\left(\frac{1}{n}\right). \tag{16}$$

Доказательство. Учитывая, что $e^{O(1/n)} = 1 + O\left(\frac{1}{n}\right)$, получим

$$e^{k\mu_n} = e^{-2\pi kni - kai + O(1/n)} = e^{-kai}\left(1 + O\left(\frac{1}{n}\right)\right),$$

откуда следует (14). Далее,

$$\int\limits_0^{1/2} e^{2\mu_n t} s(t)\,dt = \int\limits_0^{1/2} e^{-4\pi nit} e^{-2ait} e^{O(1/n)} s(t)\,dt = \int\limits_0^{1/2} e^{-4\pi nit} e^{-2ait} s(t)\,dt +$$

$$+\int\limits_0^{1/2} O\left(\frac{1}{n}\right) e^{-4\pi nit} e^{-2ait} s(t)\,dt = \frac{1}{2}\int\limits_0^{1} e^{-2\pi nit} e^{-ait} s\left(\frac{t}{2}\right)dt + O\left(\frac{1}{n}\right) = \alpha_n + O\left(\frac{1}{n}\right).$$

Здесь первое слагаемое, обозначенное α_n, есть коэффициент Фурье непрерывной функции $b(x) = \dfrac{1}{2}\,e^{-aix} s\left(\dfrac{x}{2}\right)$ по тригонометрической системе $\left\{e^{2\pi nix}\right\}$ на отрезке $[0,1]$ (в силу неравенства Бесселя

$\sum\limits_{-\infty}^{\infty} |\alpha_n|^2 < \infty$), а во втором интегральном слагаемом использовали ограниченность подынтегральных функций. Аналогично

$$\int\limits_0^1 e^{2\mu_n t} s(t)\,dt = \int\limits_0^1 e^{-4\pi n i t} e^{-2ait} s(t)\,dt + O\left(\frac{1}{n}\right) = c_{2n} + O\left(\frac{1}{n}\right),$$

где $\{c_{2n}\}$ — подпоследовательность коэффициентов Фурье непрерывной функции $b(x) = e^{-2aix}s(x)$, и следовательно, выполняется (16).

Аналогично доказываются (15), (16) при $p = -1$. □

Далее, из леммы 3 и оценки

$$\frac{1}{\mu_n} = \frac{1}{2\pi n i}\left(1 + O\left(\frac{1}{n}\right)\right)^{-1} = \frac{1}{2\pi n i} + O\left(\frac{1}{n^2}\right) = \frac{\alpha}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right),$$

следует

Лемма 4. *Для значений функций $u_{ij}(x, \mu_n)$ из теоремы 1 справедливы следующие асимптотические формулы:*

$$u_{11}(0) = 1 + O\left(\frac{1}{n^2}\right), \quad u_{12}(0) = \frac{\alpha}{n} + \frac{\alpha_n}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right), \quad u_{22}(0) = 1 + O\left(\frac{1}{n^2}\right), \quad u_{21}(0) = O\left(\frac{1}{n^2}\right),$$

$$u_{11}\left(\frac{1}{2}\right) = 1 + \frac{\alpha}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right), \quad u_{12}\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\alpha}{n} + \frac{\alpha_n}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right),$$

$$u_{22}\left(\frac{1}{2}\right) = 1 + \frac{\alpha}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right), \quad u_{21}\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\alpha}{n} + \frac{\alpha_n}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

(для удобства аргумент μ_n опускаем).

Теорема 3. *Для собственных значений λ_n задачи* (4)–(5) *имеют место уточненные асимптотические формулы:*

$$\lambda_n = \lambda_n^0 + \frac{\alpha}{n} + \frac{\alpha_n}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right), \quad n = \pm n_0, \pm(n_0 + 1), \ldots, \tag{17}$$

где λ_n^0 определяется так же как и в теореме 2.

Доказательство. Используя в уравнении (11) оценки из леммы 4, получим

$$e^{-\frac{\mu}{2}} h_2\left(\frac{1}{2}\right)\left(1 + \frac{\alpha}{n} + \frac{\alpha_n}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) = ie^{\frac{\mu}{2}} h_1\left(\frac{1}{2}\right)\left(1 + \frac{\alpha}{n} + \frac{\alpha_n}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)$$

и, следовательно,

$$e^{\mu} = -ie^{-i\int\limits_0^1 q(t)\,dt}\left(1 + \frac{\alpha}{n} + \frac{\alpha_n}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) = e^{-\pi/2i - 2\pi n i - i\int\limits_0^1 q(t)\,dt} e^{\frac{\alpha}{n} + \frac{\alpha_n}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)}.$$

Поэтому для μ_n имеем следующую уточненную асимптотическую формулу:

$$\mu_n = -\lambda_n^0 i + \frac{\alpha}{n} + \frac{\alpha_n}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right),$$

откуда следует (17). □

Перейдем к исследованию асимптотики собственных функций задачи (3). В силу леммы 1 собственная функция, отвечающая значению λ_n, есть $y_n(x) = z_1(x, \lambda_n)$, где $z_1(x, \lambda_n)$ определена соотношением из (10), и, следовательно,

$$\begin{aligned} y_n(x) = c_1\big[h_1(x)e^{-\lambda_n ix}u_{11}(x, \mu_n) - ih_2(x)e^{-\lambda_n ix}u_{21}(x, \mu_n)\big] + \\ + c_2\big[h_1(x)e^{\lambda_n ix}u_{12}(x, \mu_n) - ih_2(x)e^{\lambda_n ix}u_{22}(x, \mu_n)\big]. \end{aligned} \tag{18}$$

Теорема 4. *Для собственных функций оператора L имеют место асимптотические формулы:*

$$y_n(x) = y_n^0(x) + O\left(\frac{1}{n}\right), \qquad n = \pm n_0, \pm(n_0 + 1), \ldots,$$

где $y_n^0(x) = e^{\lambda_n^0 i(1-x)}h_2(1 - x) - ie^{\lambda_n^0 ix}h_2(x)$, функция $h_2(x)$ та же, что и в лемме 2.

Доказательство. Воспользуемся оценками (12) и полученной из них асимптотикой (13) для собственных значений.

Из (18) и краевого условия $y_n(0)=0$ имеем

$$c_1[u_{11}(0)-iu_{21}(0)]+c_2[u_{12}(0)-iu_{22}(0)]=c_1[1]-ic_2[1]=0,$$

откуда $c_1=c_2i[1]$. Положим $c_2=1$, тогда $c_1=i[1]$. Так как $e^{-\lambda_n ix}=e^{-\lambda_n^0 ix}[1]$, $e^{\lambda_n ix}=e^{\lambda_n^0 ix}[1]$, то из (18) и (12) получим

$$y_n(x)=i[1]e^{-\lambda_n ix}\big[h_1(x)[1]-ih_2(x)O\left(\frac{1}{n}\right)\big]+e^{\lambda_n ix}\big[h_1(x)O\left(\frac{1}{n}\right)-ih_2(x)[1]\big]=$$
$$=ie^{-\lambda_n^0 ix}[1]\left[h_1(x)+O\left(\frac{1}{n}\right)\right]+e^{\lambda_n^0 ix}[1]\left[-ih_2(x)+O\left(\frac{1}{n}\right)\right]=$$
$$=i\left(e^{-\lambda_n^0 ix}h_1(x)-e^{\lambda_n^0 ix}h_2(x)\right)+O\left(\frac{1}{n}\right).$$

Положим $y_n^0(x)=i\left(e^{-\lambda_n^0 ix}h_1(x)-e^{\lambda_n^0 ix}h_2(x)\right)$. Из (7) следует, что

$$h_1(x)=e^{-\pi/2i}e^{\pi/2i+i\int_0^1 q(t)\,dt}h_2(1-x)=-ie^{ai}h_2(1-x)=-ie^{\lambda_n^0 i}h_2(1-x).$$

Тогда

$$y_n^0(x)=e^{-\lambda_n^0 ix}e^{\lambda_n^0 i}h_2(1-x)-ie^{\lambda_n^0 ix}h_2(x)=e^{\lambda_n^0 i(1-x)}h_2(1-x)-ie^{\lambda_n^0 ix}h_2(x),$$

откуда следует утверждение теоремы. □

Чтобы получить более тонкие оценки для собственных функций, используем уточненные оценки (17) для собственных значений и асимптотики из теоремы 1.

Теорема 5. *Для собственных функций оператора L имеют место уточненные асимптотические формулы:*

$$y_n(x)=y_n^0(x)+\Omega_{1n}(x)+\Omega_{2n}(x)+O\left(\frac{1}{n^2}\right),\qquad n=\pm n_0,\pm(n_0+1),\ldots,$$

где $y_n^0(x)$ определяется так же как в теореме 4, и

$$\Omega_{1n}(x)=\frac{1}{n}\big[b(x)e^{-\lambda_n^0 ix}+b(x)e^{\lambda_n^0 ix}+b(x)\alpha_n e^{-\lambda_n^0 ix}+b(x)\alpha_n e^{\lambda_n^0 ix}\big],$$
$$\Omega_{2n}(x)=\frac{1}{n}\big[b(x)\int_0^x e^{-\lambda_n^0 it}q_1'\left(\frac{x+t}{2}\right)dt+b(x)\int_0^x e^{\lambda_n^0 it}q_1'\left(\frac{x-t}{2}\right)dt+$$
$$+b(x)\int_0^x e^{\lambda_n^0 it}q_2'\left(\frac{x+t}{2}\right)dt+b(x)\int_0^x e^{-\lambda_n^0 it}q_2'\left(\frac{x-t}{2}\right)dt\big]$$

(через $b(x)$ обозначаем различные непрерывные функции из некоторого конечного набора).

Доказательство. Из (18) и краевого условия $y_n(0)=0$, используя оценки из леммы 4, имеем

$$c_1\left[1+O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right]+c_2\left[-i+\frac{\alpha}{n}+\frac{\alpha_n}{n}+O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right]=0,$$

откуда

$$c_1=ic_2\left[1+\frac{\alpha}{n}+\frac{\alpha_n}{n}+O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right]. \tag{19}$$

Так как $e^{\pm\lambda_n ix}=e^{\pm\lambda_n^0 ix}\left(1+\frac{\alpha}{n}x+\frac{\alpha_n}{n}x\right)+O\left(\frac{1}{n^2}\right)$, то по теореме 1 получим

$$e^{-\lambda_n ix}u_{11}(x,\mu_n)=e^{-\lambda_n^0 ix}\left(1+\frac{\alpha}{n}x+\frac{\alpha_n}{n}x\right)\left(1+\frac{b(x)}{n}\right)+O\left(\frac{1}{n^2}\right)=$$

$$= e^{-\lambda_n^0 ix}\left(1+\frac{b(x)}{n}+\frac{\alpha_n}{n}\,b(x)\right)+O\left(\frac{1}{n^2}\right), \tag{20}$$

$$e^{\lambda_n ix}u_{22}(x,\mu) = e^{\lambda_n^0 ix}\left(1+\frac{\alpha}{n}\,x+\frac{\alpha_n}{n}\,x\right)\left(1+\frac{b(x)}{n}\right)+O\left(\frac{1}{n^2}\right)=$$

$$= e^{\lambda_n^0 ix}\left(1+\frac{b(x)}{n}+\frac{\alpha_n}{n}\,b(x)\right)+O\left(\frac{1}{n^2}\right), \tag{21}$$

$$e^{-\lambda_n ix}u_{21}(x,\mu) = e^{-\lambda_n^0 ix}\Big(1+\frac{\alpha}{n}\,x+\frac{\alpha_n}{n}\,x\Big)\Big(\frac{b(x)}{n}+\frac{\alpha}{n}\,e^{2\lambda_n^0 ix}+\frac{\alpha}{n}\int\limits_0^x e^{2\lambda_n^0 i(x-t)}q_1'(t)\,dt\Big)+O\left(\frac{1}{n^2}\right)=$$

$$= \frac{b(x)}{n}\,e^{-\lambda_n^0 ix}+\frac{\alpha}{n}\,e^{\lambda_n^0 ix}+\frac{\alpha}{n}\int\limits_0^x e^{\lambda_n^0 i(x-2t)}q_1'(t)\,dt+O\left(\frac{1}{n^2}\right),$$

$$e^{\lambda_n ix}u_{12}(x,\mu) = e^{\lambda_n^0 ix}\Big(1+\frac{\alpha}{n}\,x+\frac{\alpha_n}{n}\,x\Big)\Big(\frac{b(x)}{n}+\frac{\alpha}{n}\,e^{2\lambda_n^0 i(1-x)}+\frac{\alpha}{n}\int\limits_x^1 e^{-2\lambda_n^0 i(x-t)}q_2'(t)\,dt\Big)+O\left(\frac{1}{n^2}\right)=$$

$$= \frac{b(x)}{n}\,e^{\lambda_n^0 ix}+\frac{\alpha}{n}\,e^{-\lambda_n^0 ix}+\frac{\alpha}{n}\int\limits_x^1 e^{-\lambda_n^0 i(x-2t)}q_2'(t)\,dt+O\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Далее

$$\int\limits_0^x e^{\lambda_n^0 i(x-2t)}q_1'(t)\,dt = \frac{1}{2}\int\limits_{-x}^x e^{\lambda_n^0 i\tau}q_1'\big(\frac{x-\tau}{2}\big)\,d\tau = \frac{1}{2}\int\limits_0^x e^{-\lambda_n^0 it}q_1'\big(\frac{x+t}{2}\big)\,dt+\frac{1}{2}\int\limits_0^x e^{\lambda_n^0 it}q_1'\big(\frac{x-t}{2}\big)\,dt,$$

$$\int\limits_x^1 e^{-\lambda_n^0 i(x-2t)}q_2'(t)\,dt = e^{-\lambda_n^0 ix}\int\limits_0^1 e^{2\lambda_n^0 it}q_2'(t)\,dt-\int\limits_0^x e^{-\lambda_n^0 i(x-2t)}q_2'(t)\,dt=$$

$$= \alpha_n e^{-\lambda_n^0 ix}+\frac{1}{2}\int\limits_0^x e^{-\lambda_n^0 it}q_2'\big(\frac{x-t}{2}\big)\,dt+\frac{1}{2}\int\limits_0^x e^{\lambda_n^0 it}q_2'\big(\frac{x+t}{2}\big)\,dt.$$

Поэтому

$$e^{-\lambda_n ix}u_{21}(x,\mu) = \frac{b(x)}{n}\,e^{-\lambda_n^0 ix}+\frac{\alpha}{n}\,e^{\lambda_n^0 ix}+\frac{\alpha}{n}\int\limits_0^x e^{-\lambda_n^0 it}q_1'\big(\frac{x+t}{2}\big)\,dt+$$

$$+\frac{\alpha}{n}\int\limits_0^x e^{\lambda_n^0 it}q_1'\big(\frac{x-t}{2}\big)\,dt+O\left(\frac{1}{n^2}\right), \tag{22}$$

$$e^{\lambda_n ix}u_{12}(x,\mu) = \frac{b(x)}{n}\,e^{\lambda_n^0 ix}+\frac{\alpha}{n}\,e^{-\lambda_n^0 ix}+\frac{\alpha_n}{n}\,e^{-\lambda_n^0 ix}+\frac{\alpha}{n}\int\limits_0^x e^{-\lambda_n^0 it}q_2'\big(\frac{x-t}{2}\big)\,dt+$$

$$+\frac{\alpha}{n}\int\limits_0^x e^{\lambda_n^0 it}q_2'\big(\frac{x+t}{2}\big)\,dt+O\left(\frac{1}{n^2}\right). \tag{23}$$

Полагая $c_2=1$ и подставляя (19)–(23) в (18), получим утверждение теоремы. □

2. ТЕОРЕМА О РАЗЛОЖЕНИИ ПО СОБСТВЕННЫМ ФУНКЦИЯМ

Обозначим через S_δ область, полученную из λ-плоскости удалением всех чисел вида $\pi n+a$, $(n\in\mathbb{Z})$, $a=\dfrac{\pi}{2}+\int\limits_0^1 q(t)dt$, вместе с круговыми окрестностями одного и того же достаточно малого радиуса δ.

Так же как в [5] доказывается следующее утверждение.

Теорема 6. *Если $f(x) \in C^1[0,1]$, $f(0)=0$, то*

$$\lim_{r\to\infty} \|f(x) - S_r(f,x)\|_\infty = 0,$$

где $S_r(f,x) = -\dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int\limits_{|\lambda|=r} R_\lambda f\,d\lambda$ — частичная сумма ряда Фурье функции f по собственным и присоединенным функциям оператора L.

Так как L самосопряженный оператор, то по теореме 6 получим

Лемма 5. *Система $\{y_n(x)\}$ является ортогональной и полной в $L_2[0,1]$, и $\|y_n\|^2 = 2 + O(1/n)$, где $\|\cdot\|$ — норма в $L_2[0,1]$.*

3. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ФОРМАЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

Идеи А. Н. Крылова и В. А. Чернятина мы реализуем следующим образом. Ряд Σ, представляющий формальное решение рассматриваемой задачи по методу Фурье, мы берем в виде

$$\Sigma = S_0 + (\Sigma - \Sigma_0), \tag{24}$$

где Σ_0 — ряд, являющийся решением некоторой специальной эталонной задачи, а S_0 — сумма этого ряда, которая явно вычисляется. В свою очередь, $\Sigma - \Sigma_0$ представляется в виде суммы двух составляющих, одна из которых — конечная сумма, а вторая — ряд, составленный из разностей соответствующих членов рядов Σ и Σ_0, причем этот ряд и ряды, получающиеся из него почленным дифференцированием, сходятся равномерно. Это последнее обстоятельство, а также то, что S_0 есть решение эталонной задачи, позволяет весьма просто убедиться, что $\Sigma = S_0 + (\Sigma - \Sigma_0)$ и есть классическое решение исходной задачи при минимальных требованиях гладкости начальных данных.

В качестве эталонной задачи мы берем задачу (1)–(2), где $q(x)$ заменяется на $q_0(x) = \dfrac{1}{2}(q(x) + q(1-x))$. Функция $q_0(x)$ является симметричной: $q_0(x) = q_0(1-x)$. Такая задача рассматривалась в статьях [3, 5], где ее решение дается явной формулой. Соответствующий оператор обозначим L_0:

$$L_0 y(x) = y'(1-x) + q_0(x)y(x), \quad y(0) = 0.$$

Собственными значениями и собственными функциями этого оператора являются λ_n^0 и $y_n^0(x)$ из теорем 2 и 4 (см. [3]).

4. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ (1)–(2)

Согласно методу Фурье формальное решение задачи (1)–(2) имеет вид

$$u(x,t) = -\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\lambda|=r} (R_\lambda \varphi(x)) e^{\lambda\beta it} d\lambda + \sum_{|\lambda_n|>r} \frac{1}{\|y_n\|^2}(\varphi, y_n)\, y_n(x) e^{\lambda_n \beta it}, \tag{25}$$

где r таково, что при $|\lambda_n| > r$ все собственные значения простые.

Представим ряд (25) в виде (24), где

$$\Sigma_0 = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{(\varphi, y_n^0)}{\|y_n^0\|^2}\, y_n^0(x) e^{\lambda_n^0 \beta it}.$$

Для суммы S_0 ряда Σ_0 справедливо утверждение (см. [3])

Лемма 6. *Если $\varphi(x) \in C^1[0,1]$, $\varphi(0) = \varphi'(1) = 0$, то имеет место формула*

$$S_0 = e^{a\beta it}[p(1-x) f_0(1-x+\beta t) - ip(x) f_0(x+\beta t)], \tag{26}$$

где $f_0(x)$ — непрерывно дифференцируемая на всей оси функция, периодическая с периодом 1, и $f_0(x) = \dfrac{1}{2p(x)}[i\varphi(x) + \varphi(1-x)]$ при $x \in [0,1]$; $p(x) = e^{iax - i\int_0^x q(t)\,dt}$, $a = \dfrac{\pi}{2} + \int_0^1 q(t)\,dt$.

Далее, положим

$$\Sigma - \Sigma_0 = u_1(x,t) + u_2(x,t),$$

где

$$u_1(x,t) = -\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\lambda|=r}\left(\left(R_\lambda - R_\lambda^0\right)\varphi(x)\right)e^{\lambda\beta it}d\lambda, \tag{27}$$

$$u_2(x,t) = \sum_{|\lambda_n|>r}\left[\frac{(\varphi, y_n)}{\|y_n\|^2}\,y_n(x)e^{\lambda_n\beta it} - \frac{(\varphi, y_n^0)}{\|y_n^0\|^2}\,y_n^0(x)e^{\lambda_n^0\beta it}\right], \tag{28}$$

R_λ^0 — резольвента оператора L_0.

Лемма 7. *Имеет место формула*

$$u_2(x,t) = \sum_{|\lambda_n|>r}\left[\frac{(g, y_n)\,y_n(x)e^{\lambda_n\beta it}}{\|y_n\|^2\lambda_n} - \frac{(g, y_n^0)\,y_n^0(x)e^{\lambda_n^0\beta it}}{\|y_n^0\|^2\lambda_n^0}\right] + \sum_{|\lambda_n|>r}\frac{(g_2, y_n^0)\,y_n^0(x)e^{\lambda_n^0\beta it}}{\|y_n^0\|^2(\lambda_n^0)^2}, \tag{29}$$

где $g = L\varphi$, $g_1 = g - L_0\varphi$, $g_2 = L_0 g_1$ (здесь g_1 из области определения оператора L_0, так как $q(x)\in C^1[0,1]$).

Доказательство. Из тождества Гильберта имеем:

$$R_\lambda\varphi = -\frac{\varphi}{\lambda} + \frac{R_\lambda g}{\lambda},$$

$$R_\lambda^0\varphi = -\frac{\varphi}{\lambda} + \frac{R_\lambda^0(L_0\varphi)}{\lambda} = -\frac{\varphi}{\lambda} + \frac{R_\lambda^0(g-g_1)}{\lambda} =$$

$$= -\frac{\varphi}{\lambda} + \frac{R_\lambda^0 g}{\lambda} - \frac{R_\lambda^0 g_1}{\lambda} = -\frac{\varphi}{\lambda} + \frac{R_\lambda^0 g}{\lambda} + \frac{g_1}{\lambda^2} - \frac{R_\lambda^0 g_2}{\lambda^2}.$$

Тогда

$$R_\lambda\varphi - R_\lambda^0\varphi = \frac{(R_\lambda - R_\lambda^0)g}{\lambda} - \frac{g_1}{\lambda^2} + \frac{R_\lambda^0 g_2}{\lambda^2},$$

и (29) следует из представления слагаемых в (28) через интегралы от резольвенты по контурам достаточно малого радиуса с центрами в λ_n. □

Лемма 8. *Если $g(x)\in C[0,1]$, то $(g,\Omega_{jn}) = \frac{\alpha_n}{n}$ $(j=1,2)$.*

Доказательство. Утверждение леммы для $j=1$ очевидно. Далее,

$$\int_0^1 b(x)\,dx\int_0^x e^{\lambda_n^0 it}\overline{q_1'\Big(\frac{x+t}{2}\Big)}\,dt = \int_0^1 e^{\lambda_n^0 it}\,dt\int_t^1 b(x)\overline{q_1'\Big(\frac{x+t}{2}\Big)}\,dx = \alpha_n,$$

и, аналогично рассмотрев остальные слагаемые в Ω_{2n}, получим, что и $(g,\Omega_{2n}) = \frac{\alpha_n}{n}$. □

Лемма 9. *Ряды в* (29) *и ряды, полученные из них почленным дифференцированием по x и t, равномерно сходятся по $x\in[0,1]$ и $t\in[-A,A]$, где $A>0$ и любое.*

Доказательство. Согласно неравенствам Коши – Буняковского и Бесселя ряды $\sum\dfrac{|(g,y_n)|}{\|y_n\|\cdot|\lambda_n|}$ и $\sum\dfrac{|(g,y_n^0)|}{\|y_n^0\|\cdot|\lambda_n^0|}$ сходятся, откуда следует равномерная сходимость рядов в (29). Рассмотрим ряд

$$\sum_{|\lambda_n|>r}\left[\frac{(g, y_n)\,y_n(x)e^{\lambda_n\beta it}}{\|y_n\|^2\lambda_n} - \frac{(g, y_n^0)\,y_n^0(x)e^{\lambda_n^0\beta it}}{\|y_n^0\|^2\lambda_n^0}\right]. \tag{30}$$

Используя асимптотические формулы для λ_n, $y_n(x)$, имеем:

$$\frac{(g, y_n)\,y_n'(x)e^{\lambda_n\beta it}}{\|y_n\|^2\lambda_n} = \frac{(g, y_n)\,(y_n^0(x))'e^{\lambda_n^0\beta it}}{\|y_n^0\|^2\lambda_n^0} + (g,y_n)\,O\left(\frac{1}{n}\right).$$

Поэтому ряд, полученный почленным дифференцированием по x ряда (30), имеет следующее представление:

$$\sum_{|\lambda_n|>r}\left[\frac{\left(g, y_n - y_n^0\right)\left(y_n^0(x)\right)' e^{\lambda_n^0 \beta i t}}{\|y_n^0\|^2 \lambda_n^0} + (g, y_n)\, O\left(\frac{1}{n}\right)\right]. \tag{31}$$

В силу леммы 8 $\left(g, y_n - y_n^0\right) = \alpha_n/n$, где $\sum \alpha_n^2 < \infty$. Отсюда следует равномерная сходимость первого ряда в (31). Для второго слагаемого в (31) она очевидна. Аналогично доказывается равномерная сходимость ряда, полученного из (30) почленным дифференцированием по t. Для второго слагаемого в (29) утверждение леммы очевидно. □

Основным результатом работы является следующее утверждение

Теорема 7. *Если $q(x)$ вещественна, $q(x) \in C^1[0,1]$, $\varphi(x) \in C^1[0,1]$, $\varphi(0) = \varphi'(1) = 0$, то классическое решение задачи* (1)–(2) *существует и имеет вид*

$$u(x,t) = u_1(x,t) + u_2(x,t) + S_0(x,t),$$

где $u_1(x,t)$, $u_2(x,t)$ определены по формулам (27), (28), *а $S_0(x,t)$ — по формуле* (26).

Доказательство. В силу лемм 6 и 9 $u(x,t)$ дифференцируема по обеим переменным. Легко проверяется, что $u(x,t)$ удовлетворяет условиям (2). Докажем, что $u(x,t)$ удовлетворяет (1). Обозначим составляющие в (27), (28) через u_{kj}, т.е. $u_1 = u_{11} - u_{12}$, $u_2 = u_{21} - u_{22}$. Тогда очевидно, что

$$u_{11} + u_{21} = u, \qquad u_{12} + u_{22} = \Sigma_0. \tag{32}$$

Обозначим через Du следующее дифференциальное выражение:

$$Du = \frac{1}{\beta i}\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} - \left.\frac{\partial u(\xi,t)}{\partial \xi}\right|_{\xi=1-x}.$$

Тогда имеем

$$Du = Du_1 + Du_2 + DS_0 = Du_{11} - Du_{12} + Du_{21} - Du_{22} + DS_0. \tag{33}$$

Но $Du_{j1} = q(x)u_{j1}$, $Du_{j2} = q_0(x)u_{j2}$ $(j = 1, 2)$, $DS_0 = q_0(x)S_0$. Поэтому из (32) и (33) получаем

$$Du = q(x)u_{11} - q_0(x)u_{12} + q(x)u_{21} - q_0(x)u_{22} + q_0(x)S_0 =$$

$$= q(x)[u_{11} + u_{21}] - q_0(x)[u_{12} + u_{22} - S_0] = q(x)u(x,t) - q_0(x)\cdot 0 = q(x)u(x,t).$$

Теорема доказана. □

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (*проект* 10-01-00270) *и гранта Президента РФ по государственной поддержке ведущих научных школ* (*проект* НШ-4383.2010.1).

Библиографический список

1. *Крылов А. Н.* О некоторых дифференциальных уравнениях математической физики, имеющих приложения в технических вопросах. Л., 1950. 368 с.

2. *Чернятин В. А.* Обоснование метода Фурье в смешанной задаче для уравнений в частных производных. М., 1991. 112 с.

3. *Хромов А. П.* Смешанная задача для дифференциального уравнения с инволюцией и потенциалом специального вида // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. 2010. Т. 10. Сер. Математика. Механика. Информатика, вып. 4. С. 17–22.

4. *Бурлуцкая М. Ш., Хромов А. П.* О классическом решении смешанной задачи для уравнения первого порядка с инволюцией // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. Физика. Математика. 2010. № 2. С. 26–33.

5. *Бурлуцкая М. Ш., Хромов А. П.* Классическое решение для смешанной задачи с инволюцией // Докл. РАН. 2010. Т. 435, № 2. С. 151–154.

6. *Хромов А. П.* Об асимптотике решений уравнения Дирака // Современные методы теории функций и смежные проблемы: материалы Воронеж. зимней мат. шк. Воронеж, 2011. С. 346–347.

7. *Бурлуцкая М. Ш.* Уточненные асимптотические формулы решений системы Дирака // Современные методы теории функций и смежные проблемы: материалы Воронеж. зимней мат. шк. Воронеж, 2011. С. 53–54.