УДК 517

# О ЧИСЛЕ РЕШЕНИЙ НЕЛИНЕЙНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ С ИНТЕГРАЛОМ СТИЛТЬЕСА

**М. Б. Давыдова, С. А. Шабров**

Воронежский государственный университет,
кафедра математического анализа
E-mail: mbd@vsu.ru, shaspoteha@mail.ru

В работе получены достаточные условия существования нескольких решений у нелинейной краевой задачи с интегралом Стилтьеса.

**Ключевые слова:** краевая задача, интеграл Стилтьеса, нелинейная задача.

**On the Number of Solutions of Nonlinearity Boundary Value Problems with a Stieltjes Integral**

**M. B. Davidova, S. A. Shabrov**

Voronezh State University,
Chair of Mathematical Analysis
E-mail: mbd@vsu.ru, shaspoteha@mail.ru

In this paper we obtain sufficient conditions for the existence of multiple solutions for nonlinear boundary value problem with a Stieltjes integral.

**Key words:** boundary value problem, Stieltjes integral, nonlinear problem.

## ВВЕДЕНИЕ

В последнее время интенсивно изучаются дифференциальные уравнения с производными по мере. Так, для линейных уравнений второго порядка построена точная параллель классической теории обыкновенных дифференциальных уравнений, вплоть до осцилляционных теорем [1–4].

Эффективность использования производных по мере (или в интегродифференциальной форме) объясняется следующим обстоятельством: для применения качественных методов анализа (теорем типа Ролля) решений дифференциальных уравнений необходимо знать значения функции и её производных в каждой точке, что с позиций теории обобщённых функций затруднительно. Здесь можно отметить работу А. Д. Мышкиса [5] — доказательство аналога теоремы Штурма о перемежаемости нулей для уравнения $u'' + qu = 0$ с обобщённым коэффициентом $q$.

## ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Требуется получить достаточные условия существования нескольких различных решений задачи

$$\begin{cases} Lu \equiv -(pu'_x)(x) + (pu'_x)(0) + \int\limits_0^x u\, dQ = \int\limits_0^x f(s, u(s)) d\sigma(s), \\ (pu'_x)(0) - \gamma_1 u(0) = 0, \\ (pu'_x)(l) + \gamma_2 u(l) = 0. \end{cases} \tag{1}$$

Здесь $\sigma(x)$ — строго возрастающая функция, порождающая на $[0;l]$ меру, причем $p(x)$ и $Q(x)$ — $\sigma$-абсолютно непрерывны на $[0;l]$; $\gamma_1\gamma_2 \geq 0$, $\gamma_1 + \gamma_2 > 0$; функция $f(x,u)$ порождает оператор суперпозиции

$$[Fu](x) = f(x, u(x)),$$

который непрерывно действует из $C[0;l]$ в $L_{p,\sigma}[0;l]$ — пространство измеримых на $[0;l]$ функций, суммируемых с $p$ степенью ($1 \leq p < \infty$). Нормой в $L_{p,\sigma}[0;l]$ служит величина $\|f\|_{p,\sigma} = \left(\int\limits_0^l |f(x)|^p\, d\sigma(x)\right)^{1/p}$. Для того чтобы $F$ непрерывно действовал из $C[0;l]$ в $L_{1,\sigma}[0;l]$, достаточно, чтобы $f(x,u)$ была совокупно равномерно $[\sigma \times u]$-непрерывна: для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что для всяких точек $(x_1, u_1)$ и $(x_2, u_2)$, удовлетворяющих неравенствам $|\sigma(x_1) - \sigma(x_2)| < \delta$ и $|u_1 - u_2| < \delta$, справедливо неравенство $|f(x_1, u_1) - f(x_2, u_2)| < \varepsilon$. Интегралы в (1) понимаются по Лебегу – Стилтьесу.

В уравнении из (1) $x$ принадлежит множеству $\overline{[0;l]}_S$, которое строится следующим образом. Через $S(\sigma)$ обозначим множество точек разрыва функции $\sigma(x)$. На множестве $J_S = [0;l] \setminus S(\sigma)$ введем метрику $\rho(x,y) = |\sigma(x) - \sigma(y)|$. Если $S(\sigma) \neq \emptyset$, то метрическое пространство $(J_S, \rho)$, очевидно, не является полным. Стандартное пополнение $(J_S, \rho)$, при котором каждая точка $\xi \in S(\sigma)$ заменяется парой собственных элементов $\{\xi - 0, \xi + 0\}$, и приводит нас к $\overline{[0;l]}_S$. В каждой точке $\xi \in S(\sigma)$ уравнение в (1) принимает вид

$$-\Delta(pu'_x)(\xi) + u(\xi)\Delta Q(\xi) = f(\xi, u(\xi)),$$

где $\Delta\psi(\xi) = \psi(\xi + 0) - \psi(\xi - 0)$ — скачок функции $\psi(x)$ в точке $\xi$.

Будем говорить, что однородное уравнение $Lu = 0$ не осциллирует на $[0;l]$, если всякое нетривиальное решение имеет на $[0;l]$ не более одного нуля.

Более подробно с теорией неосцилляции этого уравнения можно ознакомиться в работах [2, 3].

Введем обозначение

$$K = \{u(x) \in C[0;l] : \ u(x) \geq 0 \ \forall \ x \in [0;l]\}.$$

Множество $K$ является телесным, нормальным конусом в $C[0;l]$. В дальнейшем нам понадобится $u_0$-норма:

$$\|u\|_{u_0} = \sup_{0<x<l} \left| \frac{u(x)}{u_0(x)} \right|,$$

где

$$u_0(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{1}{\max\limits_{(x,s)} g(x,s)}, & \text{если } \gamma_1 < \infty \text{ и } \gamma_2 < \infty, \\ x/(2l), & \text{если } \gamma_1 = \infty \text{ и } \gamma_2 < \infty, \\ (l-x)/(2l), & \text{если } \gamma_1 < \infty \text{ и } \gamma_2 = \infty, \\ x(l-x)/l, & \text{если } \gamma_1 = \infty \text{ и } \gamma_2 = \infty. \end{cases}$$

Запись $\gamma_1 = \infty$ мы понимаем следующим образом: краевое условие $(pu'_x)(0) - \gamma_1 u(0) = 0$ заменяется условием $u(0) = 0$. Аналогично понимается запись $\gamma_2 = \infty$. Как нетрудно видеть, $\|\cdot\|_{u_0}$ является нормой в простанстве $E_{u_0}$ функций $u(x)$ из $C[0;l]$, для каждой из которых $\|u\|_{u_0}$ конечна, более того, $E_{u_0}$ является полным пространством по этой норме. Множество $K_{u_0} = K \cap E_{u_0}$ является телесным конусом. Кроме того, отношение $u \leq v$ эквивалентно по определению включению $v - u \in K_{u_0}$.

## ОСНОВНОЙ РЕЗУЛЬТАТ

**Теорема**. *Пусть выполнены следующие условия:*

1) *однородное уравнение $Lu = 0$ не осциллирует на $[0;l]$;*

2) *$f(x,u)$ — равномерно $[\sigma \times u]$-непрерывна на $[0;l] \times R^1$;*

3) *функция $f(x,u)$ не убывает по $u$ при каждом $x \in [0;l]$ и*

$$f(x,0) \geq 0; \tag{2}$$

4) *существует $N$ пар чисел $\alpha_i, \beta_i$, удовлетворяющих неравенствам*

$$0 \leq \alpha_1 < \beta_1 < \alpha_2 < \beta_2 < \cdots < \alpha_n < \beta_n, \tag{3}$$

$$f(x, \beta_k u_0(x)) < \frac{\beta_k}{\int\limits_0^l h_2(s)\, d\sigma(s)} \qquad (x \in [0;l]). \tag{4}$$

5) *для каждого $k$ существует множество $w_k \subset [0;l]$ положительной $\sigma$-меры такое, что*

$$f(x, \alpha_k u_0(x)) > \frac{1}{\int\limits_{w_k} h_1(s)\, d\sigma(s)} \qquad (x \in [0;l], \ k = 1, \ldots, N). \tag{5}$$

*Тогда задача (1) имеет $2N-1$ нетривиальных решений $\{u_i(x)\}_{i=1}^{i=2N-1}$, удовлетворяющих неравенствам*

$$u_i(x) \geq 0 \qquad (i = 1, 3, \ldots, 2N-1) \tag{6}$$

*и*

$$u_{2i-1}(x) \leq u_{2i+1}(x) \qquad (i = 1, 2, \ldots, N-1).$$

Неравенства (6) связывают лишь решения $u_i(x)$ с нечетными номерами. По отношению к этим решениям остальные расположены «между» ними в следующем смысле: при каждом $k = 1, 2, \ldots, N-1$ существуют точки $x_k'$ и $x_k''$ такие, что

$$u_{2k-1}(x_k') < u_{2k}(x_k') \quad \text{и} \quad u_{2k}(x_k'') \leq u_{2k+1}(x_k'').$$

**Доказательство.** Вопрос о разрешимости краевой задачи (1) можно заменить вопросом о разрешимости нелинейного интегрального уравнения

$$u(x) = \int_0^l G(x,s) f(s, u(s))\, d\sigma(s), \tag{7}$$

где $G(x,s)$ — функция Грина краевой задачи

$$\begin{cases} -(pu_x')(x) + (pu_x')(0) + \int\limits_0^x u\, dQ = -pu_x'(0) + F^*(x) - F^*(0), \\ (pu_x')(0) - \gamma_1 u(0) = 0, \\ (pu_x')(l) + \gamma_2 u(l) = 0, \end{cases}$$

здесь $F^*(x)$ — $\sigma$-абсолютно непрерывна на $[0; l]$.

Уравнение (7) можно записать в виде

$$u = GFu, \tag{8}$$

где $G$ — интегральный оператор с ядром $G(x,s)$: $(GF^*)(x) = \displaystyle\int_0^l G(x,s) \frac{d}{d\sigma} F^*(s)\, d\sigma(s)$ и $F$ — оператор суперпозиции: $(Fu)(x) = f(x, u(x))$.

Уравнение (8) эквивалентно уравнению

$$\frac{u(x)}{u_0(x)} = \int_0^l \frac{G(x,s)}{u_0(x)} f\left(s, \frac{u(s)}{u_0(s)} \cdot u_0(s)\right) d\sigma(s),$$

или

$$\hat{u}(x) = (\hat{G}\hat{F}\hat{u})(x),$$

где $\hat{G}$ — интегральный оператор с ядром $\dfrac{G(x,s)}{u_0(x)}$, $\hat{F}$ — оператор суперпозиции $(\hat{F}u)(x) = f(x, u(x) \times$ $\times\, u_0(x))$ и $\hat{u}(x) = \dfrac{u(x)}{u_0(x)}$.

По условию теоремы $\hat{F}$ непрерывно действует из $E_{u_0}$ в $L_{1,\sigma}[0; l]$; $\hat{G}$ — действует и вполне непрерывен из $L_{1,\sigma}[0; l]$ в $E_{u_0}$. Поэтому $\hat{G}\hat{F}$ действует и вполне непрерывен из $E_{u_0}$ в $E_{u_0}$.

Покажем, что $\hat{G}\hat{F}$ удовлетворяет всем условиям теоремы из [6, § 45, с. 373] (при соответствующем выборе $E$ и $K$). Для удобства читателя приведем формулировку этой теоремы.

**Теорема**. *Пусть $K$ — нормальный телесный конус в банаховом пространстве $E$, $A$ — действующий в $E$ монотонный вполне непрерывный оператор. Пусть существует $N$ пар элементов*

$$u_1 \leq v_1 \leq u_2 \leq v_2 \leq \cdots \leq u_N \leq v_N \tag{9}$$

*таких, что*

$$u_i \ll Au_i, \quad Av_i \ll v_i \quad (i = 1, 2, \ldots, N). \tag{10}$$

*Тогда существует $2N-1$ неподвижных точек $x_1, x_2, \ldots, x_{2N+1}$ оператора $A$, удовлетворяющих неравенствам*

$$u_i \leq x_{2i-1} \leq v_i, \quad u_i \leq x_{2i} \leq v_{i+1}, \quad u_{i+1} \not\leq x_{2i}, \quad x_{2i} \not\leq v_i$$

*при всех $i = 1, 2, \ldots, N$.*

Положим $E = E_{u_0}$ и в качестве конуса $K$ возьмем множество $K_{u_0}$. Телесность и нормальность этого конуса очевидны, причем $u \gg 0$ эквивалентно $u(x) > 0$ при всех $x \in [0; l]$. По условию теоремы

$f(x,u)$ монотонна по $u$. Отсюда и из неотрицательности $\dfrac{G(x,s)}{u_0(x)}$ следует монотонность оператора $\hat{G}\hat{F}$. Компактность установлена ранее.

Введем в рассмотрение функции

$$u_i(x) \equiv \alpha_i \quad \text{и} \quad v_i(x) \equiv \beta_i \quad (i = 1, 2, \ldots, N).$$

Из (3) вытекает, что функции $u_i(x)$ и $v_i(x)$ удовлетворяют неравенствам (9). Докажем выполнимость (10).

Интегральный оператор $\hat{G}$ с ядром $\hat{G}(x,s)$ обладает свойством сильной положительности: для любой неотрицательной нетривиальной функции $f(x)$ ее образ $(\hat{G}f)(x)$ есть функция строго положительная. По условию теоремы функция

$$w(x) = \beta_i - \int_0^l h_2(s)\,d\sigma(s) \cdot f(x, \beta_i u_0(x))$$

неотрицательна и отлична от тождественного нуля. Поэтому $(\hat{G}\hat{F}w)(x) \gg 0$, что означает

$$\beta_i \int_0^l \frac{G(x,s)}{u_0(x)}\,d\sigma(s) > \int_0^l h_2(s)\,d\sigma(s) \cdot (\hat{G}\hat{F})v_i(x). \tag{11}$$

Так как $\dfrac{G(x,s)}{u_0(x)} \le h_2(s)$ и $\int\limits_0^l h_2(s)\,d\sigma(s) > 0$, то из (11) вытекает $\beta_i > (\hat{G}\hat{F}v_i)(x)$ для $x \in [0;l]$. Последнее и означает что $(\hat{G}\hat{F}v_i) \ll v_i$.

Докажем теперь неравенство $\hat{G}\hat{F}u_k \ge u_k$. При фиксированном $k$ рассмотрим функцию

$$u(x) = \begin{cases} f(x, \alpha_k u_0(x)) - \dfrac{\alpha_k}{\int\limits_{w_k} h_1(s)\,d\sigma(s)}, & x \in w_k, \\[2ex] 0, \quad x \notin w_k. \end{cases}$$

По условию $u(x) \ge 0$ и положительна на множестве положительной меры. Сильно положительным оператором $\hat{G}\hat{F}$ эта функция переводится в строго положительную функцию $(\hat{G}\hat{F}u) > 0$ на $[0;l]$, т.е. $\hat{G}\hat{F}u \gg 0$. Так как $G(x,s) \ge u_0(x)h_1(s)$, то

$$\int_{w_k} \frac{G(x,s)}{u_0(x)} f(s, \alpha_k u_0(s))\,d\sigma(s) \ge \frac{\alpha_k \displaystyle\int_{w_k} \frac{G(x,s)}{u_0(x)}\,d\sigma(s)}{\displaystyle\int_{w_k} h_1(s) d\sigma(s)} \ge \alpha_k = u_k(x). \tag{12}$$

С другой стороны, из (2) и монотонности по $u$ функции $f(x,u)$ вытекает неотрицательность функции $f(x;\alpha)$ при любом $\alpha \ge 0$. Поэтому

$$(\hat{G}\hat{F}u_k)(x) \ge \int_{w_k} \frac{G(x,s)}{u_0(x)} f(s, \alpha_k u_0(s))\,d\sigma(s).$$

Отсюда и из (12) следует $\hat{G}\hat{F}u_k \gg u_k$.

Итак, для оператора $\hat{G}\hat{F}$ выполнены все условия теоремы 45.3 из [6]. Теорема доказана. □

**Библиографический список**


1. *Покорный Ю.В., Пенкин О.М., Боровских А.В., Прядиев В.Л., Лазарев К.П., Шабров С.А.* Дифференциальные уравнения на геометрических графах. М., 2004. 272 с.

2. *Покорный Ю.В., Зверева М.Б., Шабров С.А.* Осцилляционная теория Штурма – Лиувилля для импульсных задач // Успехи математических наук. 2008. Т. 63, вып. 1 (379). С. 98–141

3. *Pokornyi Yu.V., Shabrov S.A.* Toward a Sturm – Liouville theory for an equation with generalized coefficients // J. of Math. Sciences. 2004. Vol. 119, № 6. P. 769–787.

4. *Покорный Ю.В., Бахтина Ж.И., Зверева М.Б.,*

*Шабров С. А.* Осцилляционный метод Штурма в спектральных задачах. М., 2009. 192 с.

5. *Мышкис А. Д.* О решениях линейного однородного двучленного дифференциального неравенства второго порядка с обобщённым коэффициентом // Дифференциальные уравнения. 1996. Т. 32, № 5. С. 615–619.

6. *Красносельский М. А., Забрейко П. П.* Геометрические методы нелинейного анализа. М., 1975. 512 с.

УДК 539.3

# РАЗРЕШИМОСТЬ ЭВОЛЮЦИОННЫХ УРАВНЕНИЙ В ОБОБЩЕННЫХ ЗАДАЧАХ ТРАНСМИССИИ ДЛЯ ПОЛОГИХ ОБОЛОЧЕК

**В. Ф. Кириченко**

Саратовский государственный технический университет,
кафедра математики и моделирования
E-mail: saratuni@list.ru

С помощью метода компактности и нового способа получения априорных оценок доказана разрешимость обобщенной задачи трансмиссии в неклассической теории пологих оболочек.

**Ключевые слова:** задачи трансмиссии, нелинейные системы уравнений с частными производными, обобщенные решения краевых задач, неклассическая теория оболочек.

## Solvability of Evolutionary Equations in Generalized Transmission Problems for Shallow Shells

**V. F. Kirichenko**

Saratov State Technical University,
Chair of Mathematics and Modelling
E-mail: saratuni@list.ru

We prove the solvability of the generalized transmission problem in the non-classical theory of shallow shells using the method of compactness and a new way of obtaining a priori estimates.

**Key words:** transmission problems, nonlinear systems of partial differential equations, generalized solutions of boundary value problems, non-classical theory of shells.

В настоящей работе исследуется новый класс обобщенных задач трансмиссии для нелинейной системы уравнений с частными производными, характеризуемой структурной неоднородностью входящих в нее дифференциальных уравнений различного типа. Доказательство корректности такой системы имеет в своей основе метод компактности [1, 2] и новый «трехмерный» способ получения априорных оценок. Заметим, что классические задачи трансмиссии (или дифракции) исследуются, например, в работах [3–5].

Объектом исследования является пологая однородная и изотропная оболочка, занимающая в начальный момент времени наблюдения $t_0$ трехмерную область $D = D_1 \cup D_2$ из пространства $R^3$, при этом:

$$D_1 \cap D_2 = \varnothing, \quad D_i = \Omega_i \times \left(-\frac{h_i}{2}; \frac{h_i}{2}\right) \quad (i = 1, 2),$$
$$\overline{\Omega}_i = \Omega_i \cup \partial\Omega_i \cup \gamma, \quad \Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2, \quad \overline{\Omega} = \partial\Omega \cup \Omega, \quad \partial\Omega = \partial\Omega_1 \cup \partial\Omega_2.$$

Здесь $\Omega$ — план оболочки; $\partial\Omega$ — граничный контур плана; $\gamma$ — достаточно гладкая кривая, разбивающая область $\Omega$ на две измеримые подобласти $\Omega_i$; $h_i$ — постоянная толщина части оболочки, занимающей измеримую подобласть $D_i$; $h_1 \geq h_2 > 0$. Как обычно, отождествляем элементы $(x_1, x_2, x_3) \in R^3$ с координатами точек в геометрическом пространстве, параметризованном декартовой системой координат таким образом, что уравнение $x_3 = 0$ является определяющим для срединной поверхности рассматриваемой оболочки, а ось $Ox_3$ направлена к центру кривизны оболочки.

Полагаем, что в области $D_1$ эволюция оболочки описывается на базе обобщенных гипотез Тимошенко, а в области $D_2$ — гипотез Кирхгофа – Лява. Математическая модель такой оболочки определяется следующим вариационным уравнением Гамильтона – Остроградского:

$$\int_{t_0}^{t_1} \left\{ \iint_{\Omega} \sum_{i=1}^{2} \left( -\rho\mu_i h_i \frac{\partial u_{30}}{\partial t}\frac{\partial}{\partial t}(\delta u_{30}) - \rho\mu_i \frac{h_i^3}{12} \cdot \mathrm{grad}\,\frac{\partial u_{30}}{\partial t} \cdot \mathrm{grad}\,\frac{\partial}{\partial t}(\delta u_{30}) + h_i\mu_i\tilde{\varepsilon}_i \frac{\partial u_{30}}{\partial t}\delta u_{30} + \right.\right.$$

$$+\mu_i\tilde{\varepsilon}_i \frac{h_i^3}{12} \cdot \mathrm{grad}\,\frac{\partial u_{30}}{\partial t} \cdot \mathrm{grad}\,\delta u_{30} + \mu_1 \int_{-h_1/2}^{h_1/2} (\sigma_{ii}\delta\varepsilon_{ii} + \sigma_{i3-i}\delta\varepsilon_{i3-i} + 2\sigma_{i3}\delta\varepsilon_{i3})\,dx_3 +$$