Библиографический список

1. *Дмитриев М.Г., Курина Г.А.* Сингулярные возмущения в задачах управления // Автоматика и телемеханика. 2006. № 1. С. 3–51.

2. *Kokotovic P.V., Khalil H.K., O'Reilly J.* Singular Perturbation Methods in Control: Analysis and Design. SIAM, 1999. 200 c.

3. *Калинин А.И.* Асимптотические методы оптимизации возмущенных динамических систем. Минск: Экоперспектива, 2000. 294 с.

4. *Колмановский В.Б., Носов В.Р.* Устойчивость и периодические режимы регулируемых систем с последействием. М.: Наука, 1981. 100 с.

5. *Красовский Н.Н.* Теория управления движением. М.: Наука, 1968. 475 с.

6. *Куржанский А.Б.* Управление и наблюдение в условиях неопределенности. М.: Наука, 1977. 392 с.

7. *Кремлёв А.Г.* Асимптотические свойства ансамбля траекторий сингулярно возмущенной системы в задаче оптимального управления // Автоматика и телемеханика. 1993. № 9. С. 61–78.

8. *Кремлёв А.Г.* Об оптимальном управлении ансамблем траекторий сингулярно возмущенной квазилинейной системы // Диф. уравнения. 1994. Т. 30, № 11. С. 1892–1904.

9. *Кремлёв А.Г., Гребенникова И.В.* Об асимптотике оптимального управления сингулярно возмущенной системой с запаздыванием // Математика. Информационные технологии. Образование: Материалы науч.-прктич. конф. Ч. 1. Оренбург: Изд-во ГОУ ОГУ, 2006. С. 36–38.

10. *Гребенникова И.В., Кремлёв А.Г.* О начальной аппроксимации минимаксной задачи управления сингулярно возмущенной системой с запаздыванием // Качество науки — качество жизни: Материалы науч.-прктич. конф. Тамбов: Изд-во ТГТУ, 2007. С. 89–92.

11. *Рокафеллар Р.* Выпуклый анализ. М.: Мир, 1973. 492 с.

12. *Васильева А.Б., Бутузов В.Ф.* Асимптотические разложения решений сингулярно возмущенных уравнений. М.: Наука, 1973. 192 с.

13. *Беллман Р., Кук К.* Дифференциально-разностные уравнения. М.: Мир, 1967. 547 с.

14. *Кремлёв А.Г., Гребенникова И.В.* Об асимптотике ансамбля траекторий управляемой сингулярно возмущенной системы с запаздыванием // Новости научной мысли – 2006: Материалы науч.-прктич. конф. Т. 4. Днепропетровск: Наука и образование, 2006. С. 65–69.

15. *Натансон И.П.* Теория функций вещественной переменной. М.: Наука, 1974. 498 с.

УДК 519.872

МЕТОД АНАЛИЗА СЕТЕЙ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ С ДИНАМИЧЕСКИМ УПРАВЛЕНИЕМ ИНТЕНСИВНОСТЯМИ ОБСЛУЖИВАНИЯ

В.И. Долгов, Ю.И. Митрофанов, Е.С. Рогачко

Саратовский государственный университет,
кафедра системного анализа и автоматического управления
E-mail: DolgovVI@sysan.ru, MitrophanovYuI@info.sgu.ru,
RogachkoES@info.sgu.ru

Предлагаются модель эволюции и метод анализа замкнутых экспоненциальных сетей массового обслуживания с динамическим управлением интенсивностями обслуживания. Приводятся способ вычисления стационарного распределения и формулы для вычисления стационарных характеристик сетей. Дается пример анализа сети обслуживания рассматриваемого типа. Как показали результаты анализа и имитационного моделирования данной сети, метод имеет достаточную для практических приложений точность.

Ключевые слова: сети массового обслуживания, интенсивности обслуживания, управление интенсивностями обслуживания, анализ сетей массового обслуживания.

Method for Analysis of Queueing Networks with Dynamic Control of Service Rates

V.I. Dolgov, Yu.I. Mitrophanov, E.S. Rogachko

Saratov State University,
Chair of Systems Analysis and Automatic Control
E-mail: DolgovVI@sysan.ru, MitrophanovYuI@info.sgu.ru,
RogachkoES@info.sgu.ru

Model of evolution and a method for analysis of closed exponential queueing networks with dynamic control of service rates are proposed. A method of computing of the stationary distribution and formulas for calculating of stationary characteristics of the networks are presented. An example of analysis of considered type queueing network is given. According to the results of analysis and simulation of this network the accuracy of this method is sufficient for practical application.

Key words: queueing networks, service rates, service rates control, analysis of queueing networks.

ВВЕДЕНИЕ

Разработка и исследование методов управления интенсивностями обслуживания в сетях массового обслуживания и методов анализа сетей обслуживания с управлением интенсивностями обслуживания являются актуальными направлениями развития теории сетей массового обслуживания. Практическое значение этих направлений определяется широким использованием сетей массового обслуживания в качестве математических моделей дискретных систем с управлением, сетевой структурой и стохастическим характером функционирования. Интенсивности обслуживания требований системами обслуживания, входящими в состав сетей массового обслуживания, являются параметрами, в существенной степени определяющими качество функционирования сетей. Поэтому проблемам, связанным с исследованием влияния интенсивностей обслуживания на функционирование сетей обслуживания, определением оптимальных интенсивностей обслуживания, управлением интенсивностями обслуживания уделяется значительное внимание в современной теории сетей массового обслуживания. При решении задач нахождения оптимальных интенсивностей обслуживания используются известные методы решения оптимизационных задач, такие как линейное, нелинейное и динамическое программирование [1–3], марковские и полумарковские процессы принятия решений [4, 5]. Значительный интерес представляют задачи анализа сетей обслуживания с интенсивностями обслуживания, зависящими от состояния систем массового обслуживания, подсетей или сети в целом. В качестве примера можно привести работы [6–9], посвященные разработке и развитию методов анализа сетей массового обслуживания этого класса.

В данной работе предлагается метод анализа замкнутых экспоненциальных сетей массового обслуживания с одним классом требований и динамическим управлением интенсивностями обслуживания [10]. В одной системе сети число обслуживающих приборов равно числу требований в сети, а остальные системы обслуживания (базисные системы) являются однoприборными. В сети используется централизованная система управления, осуществляющая идентификацию состояний сети в моменты окончания фиксированных интервалов времени — тактов. В зависимости от состояния сети системой управления могут быть изменены интенсивности обслуживания в базисных системах, в этом случае в течение очередного такта в них используются оптимальные значения интенсивностей обслуживания. Основными характеристиками качества функционирования сети являются математическое ожидание длительности пребывания требований в базисной подсети, включающей все базисные системы обслуживания, и вероятность пребывания сети в состояниях, в которых число требований в базисной подсети превышает заданное. Целью динамического управления интенсивностями обслуживания в сети является уменьшение значений этих характеристик. При анализе сети рассматриваемого типа используется моделирование эволюции сети цепями Маркова с соответствующими параметрами. В работе приводится способ вычисления стационарного распределения вероятностей состояний сети с управлением интенсивностями обслуживания, даются формулы для нахождения некоторых других стационарных характеристик сети.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Пусть N — замкнутая сеть массового обслуживания с Q требованиями одного класса, одной системой обслуживания S_0 типа $M/M/Q$ с интенсивностью μ_0 обслуживания требований одним прибором, L системами обслуживания S_i, $i = 1, \ldots, L$, типа $M/M/1$ с интенсивностями обслуживания μ_i и неприводимой маршрутной матрицей $\Theta = (\theta_{ij})$, $i, j = 0, 1, \ldots, L$. Состояние с номером n сети определяется вектором $s^{(n)} = (s_i^{(n)})$, $i = 0, 1, \ldots, L$, где $s_i^{(n)}$ — число требований, находящихся в системе S_i. Обозначим через X множество состояний сети, $c_X = |X|$, $B = \{1, \ldots, c_X\}$ — множество номеров состояний сети, $I = \{0, 1, \ldots, L\}$ — множество номеров систем в сети, H — базисную подсеть, включающую базисные системы S_i, $i = 1, \ldots, L$, $J = \{1, \ldots, L\}$ — множество номеров систем в подсети H.

Сеть массового обслуживания, структура, параметры и алгоритмы функционирования которой такие же, как у сети N, и которая отличается от N только тем, что в ней реализовано динамическое управление интенсивностями обслуживания в базисных системах, обозначим через N^c. Для параметров и характеристик сети N^c используются введенные для соответствующих параметров и характеристик сети N обозначения с индексом c. В частности, число требований в подсети H сетей N и N^c обозначается соответственно через Q_H и Q_H^c. Целью управления интенсивностями обслуживания в N^c является уменьшение математического ожидания (м.о.) длительности реакции $\bar{\zeta}^c$ сети N^c для системы S_0 (м.о. длительности пребывания требований в подсети H) и вероятности ρ^c пребывания этой сети в состояниях, в которых Q_H^c больше математического ожидания $\bar{Q}_H$ числа требований в подсети H сети N.

Различаются два режима эволюции сети N^c — нормальный и коррективный. Периоды эволюции сети в этих режимах называются соответственно нормальными и коррективными тактами. Обозначим через $x^{(k)}$ такт с номером $k \in \{1, 2, \ldots\}$, $\tau^{(k)}$ — момент окончания такта $x^{(k)}$, φ — длительность такта, $Q_H^{(k)}$ — число требований в H в момент $\tau^{(k)}$. В момент $\tau^{(k)}$ проверяется выполнение неравенства $Q_H^{(k)} \le \bar{Q}_H$. Если неравенство выполняется, то такт $x^{(k+1)}$ считается нормальным, и в течение этого такта используется вектор $\mu^{(k+1)} = \mu = (\mu_i)$, $i = 1, \ldots, L$, в противном случае этот такт — коррективный, формируется зависящий от $Q_H^{(k)}$ вектор $\tilde{\mu}^{(k+1)}$, значения компонент которого направляются базисным системам и используются в течение $x^{(k+1)}$. Округлим с избытком $\bar{Q}_H$ до целого числа b, тогда при $b < Q$ имеем множество $\{b, b+1, \ldots, Q\}$ возможных значений $Q_H^{(k)} > \bar{Q}_H$. Для значения $Q_H^{(k)} > \bar{Q}_H$ находится в соответствии с алгоритмом, приведенным в [10], вектор оптимальных интенсивностей обслуживания $\tilde{\mu}^{(k+1)} = \mu^{(r)} = (\mu_i^{(r)})$, $r \in R = \{1, \ldots, D\}$, $D = Q - b + 1$, используемый в течение коррективного такта $x^{(k+1)}$. Вектор $\mu^{(r)}$ является решением следующей задачи оптимизации: минимизировать $\sum\limits_{i=1}^{L} a_i \mu_i^{(r)}$ при ограничении $\bar{\zeta} \le U$, где $a_i \mu_i^{(r)}$, $0 < a_i < \infty$, $i \in J$, — стоимость системы S_i при использовании в ней интенсивности обслуживания $\mu_i^{(r)}$, U — заданная величина. Решение находится методом множителей Лагранжа. Вектор $\mu^{(r)}$ обеспечивает выполнение приближенного равенства $Q_H^{(k+1)} \approx \bar{Q}_H$.

Определим разбиение множества X состояний сети N^c на подмножества $X^{(0)}, X^{(1)}, \ldots, X^{(D)}$, такие что

$$X^{(0)} = \{s^{(n)} \in X \,|\, 0 \le Q_H^c \le b - 1\},$$

$$X^{(r)} = \{s^{(n)} \in X \,|\, Q_H^c = r + b - 1\}, \qquad r = 1, \ldots, D.$$

Множество $X^{(r)}$, $r \in \{0, 1, \ldots, D\}$, назовем агрегированным состоянием с номером r сети N^c; множество номеров агрегированных состояний $E = \{0, 1, \ldots, D\}$. Обозначим через $B^{(r)}$, $r \in E$, множество номеров состояний сети N^c из множества $X^{(r)}$.

2. МОДЕЛИ И АНАЛИЗ СЕТИ ОБСЛУЖИВАНИЯ

Эволюция сети N^c описывается случайным процессом Ξ с непрерывным временем и конечным множеством состояний B, который представляет собой последовательность фрагментов, соответствующих нормальным и коррективным тактам функционирования сети. Из определения сети N^c следует, что фрагментами реализаций процесса Ξ являются реализации цепей Маркова $\hat{C}$ и $\tilde{C}^{(r)}$, $r \in R$, с множеством состояний B и непрерывным временем. Эволюция сети N^c в течение нормальных тактов описывается цепью $\hat{C}$ с множеством начальных состояний $B^{(0)}$, а в течение коррективных тактов — цепями $\tilde{C}^{(r)}$ с множествами начальных состояний $B^{(r)}$ соответственно. Длительности реализаций цепей $\hat{C}$ и $\tilde{C}^{(r)}$ равны φ.

Обозначим через $\hat{A} = (\hat{a}_{mn})$, $m, n = 1, \ldots, c_X$, инфинитезимальный оператор цепи $\hat{C}$, а через $\hat{P}^{(t)} = (\hat{p}_{mn}^{(t)})$ матрицу вероятностей перехода этой цепи за время t. Имеем

$$\hat{a}_{mn} = \alpha_i(s_i^{(m)}) \mu_i \theta_{ij}, \quad m \ne n, \quad i, j \in I, \quad i \ne j,$$

$$\hat{a}_{nn} = -\sum_{i=0}^{L} \alpha_i(s_i^{(n)}) \mu_i,$$

где $\alpha_i(x) = \min(x, \kappa_i)$, $0 \le x \le Q$, $\kappa_0 = Q$, $\kappa_i = 1$, $i = 1, \ldots, L$ (κ_i, $i \in I$, — число приборов в S_i). При вычислении $\hat{P}^{(t)}$ используется известное соотношение $\hat{P}^{(t)} = e^{\hat{A}t}$ [11].

Для параметров цепи $\tilde{C}^{(r)}$ используются введенные для цепи $\hat{C}$ соответствующие обозначения со знаком $\sim$ и индексом r, в частности, $\tilde{A}^{(r)} = (\tilde{a}_{mn}^{(r)})$, $m, n = 1, \ldots, c_X$, — инфинитезимальный оператор,

$\tilde{P}^{(t),(r)} = (\tilde{p}_{mn}^{(t),(r)})$ — матрица вероятностей перехода за время t цепи $\tilde{C}^{(r)}$. Тогда

$$\tilde{a}_{mn}^{(r)} = \alpha_i(s_i^{(m)})\mu_i^{(r)}\theta_{ij}, \quad m \neq n, \quad i,j \in I, \quad i \neq j,$$

$$\tilde{a}_{nn}^{(r)} = -\sum_{i=0}^{L} \alpha_i(s_i^{(n)})\mu_i^{(r)}.$$

Теорема. *При заданном значении φ стационарное распределение $\pi = (\pi_n)$, $n = 1, \ldots, c_X$, сети N^c существует, является единственным и удовлетворяет уравнению $\pi = \pi P$, где $P = (p_{mn})$, $m, n = 1, \ldots, c_X$, $p_{mn} = \begin{cases} \hat{p}_{mn}^{(\varphi)}, & m \in B^{(0)}, \\ \tilde{p}_{mn}^{(\varphi),(r)}, & m \in B^{(r)},\ r \in R. \end{cases}$*

Доказательство. Так как множество состояний сети является конечным и существенным, а все состояния — устойчивыми, стационарное распределение сети N^c существует и является единственным. Из определения процесса Ξ следует, что стационарное распределение сети N^c совпадает со стационарным распределением процесса Ξ. Так как реализация процесса Ξ представляет собой последовательность конечных реализаций цепей $\hat{C}$ и $\tilde{C}^{(r)}$, характеристики процесса Ξ определяются параметрами этих цепей и длительностями их реализаций. В стационарном режиме процесса Ξ вероятности $\hat{p}_{mn}^{(\varphi)}$, $m \in B^{(0)}$, и $\tilde{p}_{mn}^{(\varphi),(r)}$, $m \in B^{(r)}$, являются вероятностями окончания реализаций цепей $\hat{C}$ и $\tilde{C}^{(r)}$, $r \in R$, в состоянии $n \in B$ при начале их эволюции из состояния m. Поэтому

$$\pi_n = \sum_{m \in B^{(0)}} \pi_m \hat{p}_{mn}^{(\varphi)} + \sum_{r=1}^{D} \sum_{m \in B^{(r)}} \pi_m \tilde{p}_{mn}^{(\varphi),(r)}, \quad n \in B, \quad \text{или} \quad \pi = \pi P,$$

где P — матрица вероятностей перехода процесса Ξ. $\square$

Очевидно,

$$\rho^c = \sum_{r=1}^{D} \sum_{s^{(n)} \in X^{(r)}} \pi_n.$$

При вычислении стационарных характеристик сети N^c используется м.о. интенсивностей обслуживания в базисных системах

$$\bar{\mu}_i^c = \mu_i \sum_{s^{(n)} \in X^{(0)}} \pi_n + \sum_{r=1}^{D} \mu_i^{(r)} \sum_{s^{(n)} \in X^{(r)}} \pi_n, \qquad i = 1, \ldots, L.$$

Обозначим через $\bar{s}_i^c$ м.о. числа требований в системе S_i сети N^c; ψ_i^c — коэффициент использования обслуживающих приборов системы S_i; λ_i^c — интенсивность входящего в систему S_i потока требований; $\bar{u}_i^c$ — м.о. длительности пребывания требований в системе S_i.

Тогда $\bar{s}_i^c = \sum\limits_{k=1}^{Q} kP\{s_i = k\}$, $i = 0, 1, \ldots, L$, где $P\{s_i = k\} = \sum\limits_{s^{(n)} \in X\ \&\ s_i^{(n)} = k} \pi_n$. Учитывая, что $\kappa_0 = Q$, $\kappa_i = 1$, $i = 1, \ldots, L$, получим

$$\psi_0^c = \bar{s}_0^c / Q, \qquad \psi_i^c = 1 - P\{s_i = 0\}, \quad i = 1, \ldots, L,$$
$$\lambda_0^c = \mu_0 \bar{s}_0^c, \qquad \lambda_i^c = \bar{\mu}_i^c (1 - P\{s_i = 0\}), \quad i = 1, \ldots, L.$$

По формуле Литтла [12]

$$\bar{u}_0^c = 1/\mu_0, \qquad \bar{u}_i^c = \bar{s}_i^c / \lambda_i^c, \quad i = 1, \ldots, L.$$

Математическое ожидание длительности реакции сети N^c для S_0 вычисляется по формуле

$$\bar{\zeta}^c = \frac{1}{\mu_0 \bar{s}_0^c} \sum_{i=1}^{L} \bar{s}_i^c.$$

3. ПРИМЕР

Пусть задана сеть массового обслуживания N со следующими параметрами:

$$L = 3, \qquad Q = 8, \qquad \mu = (0.5, 2.3, 0.9, 1.7), \qquad \Theta = \begin{bmatrix} 0 & 0.5 & 0.5 & 0 \\ 0.6 & 0 & 0.2 & 0.2 \\ 0 & 0.2 & 0 & 0.8 \\ 0.7 & 0.2 & 0.1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Тогда $c_X = 165$, $\bar{Q}_H = 5.66$, $D = 3$, $R = \{1, 2, 3\}$, $|E| = 4$.

При окончании нормального такта в состоянии $X^{(r)}$, $r \in R$, в течение следующего коррективного такта в сети N^c используется вектор интенсивностей обслуживания $\mu^{(r)}$, зависящий от длительности такта φ и формируемый в соответствии с методом, изложенным в работе [10]. При формировании вектора $\mu^{(r)}$ предполагается, что $a_i = 1$, $i = 1, 2, 3$, $U = 2$. В частности, если в момент окончания нормального такта сеть N^c находится в одном из состояний $X^{(1)}$, $X^{(2)}$ или $X^{(3)}$, а $\varphi = 1$, то будет использоваться один из векторов $\mu^{(1)} = (2.3, 2.1, 2.2)$, $\mu^{(2)} = (2.9, 2.7, 2.7)$ или $\mu^{(3)} = (3.5, 3.3, 3.3)$ соответственно.

В таблице приведены значения характеристик ρ^c, $\bar{\zeta}^c$ качества функционирования сети N^c и полученные методом имитационного моделирования их оценки ρ^c_s, $\bar{\zeta}^c_s$ при различных значениях φ. Результаты имитационного моделирования получены с доверительной вероятностью 0.95 и доверительным интервалом 10% от значения оценки. При отсутствии управления в сети N $\rho = 0.58$, $\bar{\zeta} = 4.85$.

Из таблицы видно, что качество функционирования сети N^c при малых значениях φ существенно выше, чем у сети N. Это свидетельствует о достаточно высокой эффективности метода динамического управления интенсивностями обслуживания. Из сравнения результатов аналитического и имитационного моделирования заключаем, что максимальная разность величин ρ^c и ρ^c_s, $\bar{\zeta}^c$ и $\bar{\zeta}^c_s$ не превышает 10% от значений соответствующих характеристик, что свидетельствует о достаточной для практических приложений точности метода анализа.

Зависимость от φ характеристик ρ^c, $\bar{\zeta}^c$ и оценок ρ^c_s, $\bar{\zeta}^c_s$

φ	ρ^c	ρ^c_s	$\bar{\zeta}^c$	$\bar{\zeta}^c_s$
0.1	0.16	0.15	2.40	2.29
0.2	0.22	0.21	2.57	2.44
0.5	0.29	0.28	2.82	2.69
1	0.34	0.33	3.01	2.88
2	0.37	0.37	3.19	3.06
5	0.41	0.40	3.38	3.24
10	0.43	0.41	3.51	3.34
20	0.44	0.42	3.57	3.35
50	0.45	0.43	3.58	3.39
100	0.45	0.44	3.58	3.41

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В статье предложен приближенный метод анализа замкнутых экспоненциальных сетей массового обслуживания с динамическим управлением интенсивностями обслуживания. Данный метод обеспечивает возможность определения с удовлетворительной точностью стационарных характеристик сети обслуживания рассматриваемого класса при различных длительностях тактов, в моменты окончания которых сеть может находиться в переходном режиме функционирования. Поэтому он расширяет возможности анализа сетей обслуживания с динамическим управлением интенсивностями обслуживания по сравнению с предложенным в работе [10] методом анализа сетей данного класса, основанным на предположении о достижении сетью в моменты окончания тактов режима, близкого к стационарному. Длительность такта в сетях этого класса, являясь одним из основных параметров метода управления, в существенной степени определяет качество функционирования сетей. Таким образом, актуальными являются не только анализ сетей этого класса при заданной длительности такта, но и задачи выбора близкой к оптимальной длительности такта, при решении которых может быть использован предложенный в данной работе метод анализа сетей.

Библиографический список

1. *Alidrisi M.* Linear programming model for the optimal control of a queueing network // Intern. J. Syst. Sci. 1987. V. 18. P. 1079–1089.

2. *Azaron A., Ghomi S.M.* Optimal control of the service rates and arrivals in Jackson networks // Eur. J. Oper. Res. 2003. V. 147, № 1. P. 17–31.

3. *Weber R.R., Stidham S.* Optimal control of service rates in networks of queues // Advances in Applied Probability. 1987. V. 19. P. 202–218.

4. *Jo K.Y.* Decomposition approximation of queueing-network control models with tree structures // Annals of Operations Research. 1987. V. 8. P. 117–132.

5. *Alidrisi M.* Optimal control of the service rate of an exponential queueing network using Markov decision theory // Intern. J. Syst. Sci. 1990. V. 21. P. 2553–2563.

6. *Bruell S.C., Balbo G., Afshari P.V.* Mean value analysis of mixed, multiple class BCMP networks with load dependent service stations // Performance Evaluation. 1984. V. 4. P. 241–260.

7. *Mitra D., McKenna J.* Asymptotic expansions for closed Markovian networks with state-dependent service rates // J. of the Association for Computing Machinery. 1986. V. 33, № 3. P. 568–592.

8. *Ляхов А.И.* Асимптотический анализ замкнутых сетей очередей, включающих устройства с переменной интенсивностью обслуживания // Автоматика и телемеханика. 1997. № 3. С. 131–143.

9. *Mandelbaum A., Massey W.A., Reiman M.I.* Strong approximations for Markovian service networks // Queueing Systems. 1998. V. 30. P. 149–201.

10. *Митрофанов Ю.И., Долгов В.И.* Динамическое управление интенсивностями обслуживания в сетях массового обслуживания // АВТ. 2008. № 6. С. 44–56.

11. *Баруча-Рид А.Т.* Элементы теории марковских процессов и их приложения. М.: Наука, ГРФМЛ, 1969. 512 с.

12. *Митрофанов Ю.И.* Анализ сетей массового обслуживания. Саратов: Науч. книга, 2005. 175 с.

УДК 515.14

ПРЕПЯТСТВИЯ К ВЛОЖЕНИЮ РАССЛОЕНИЙ МАТРИЧНЫХ АЛГЕБР В ТРИВИАЛЬНОЕ РАССЛОЕНИЕ

А.В. Ершов

Саратовский государственный университет,
кафедра геометрии
E-mail: ershov.andrei@gmail.com

В работе изучаются топологические препятствия к вложению $M_k(\mathbb{C})$-расслоения в тривиальное $M_{kl}(\mathbb{C})$-расслоение при условии $(k,\,l) = 1$. Описана также связь рассматриваемой задачи с теорией расслоений со структурным группоидом.

Ключевые слова: расслоение, топологическое препятствие, характеристический класс, группоид.

Obstructions to Embedding of Matrix Algebra Bundles into a Trivial One

A.V. Ershov

Saratov State University,
Chair of Geometry
E-mail: ershov.andrei@gmail.com

Topological obstructions to embedding of an $M_k(\mathbb{C})$-bundle into a trivial $M_{kl}(\mathbb{C})$-bundle under the condition $(k,\,l) = 1$ are studied. The relation of this problem to the theory of bundles with a structure groupoid is described.

Key words: bundle, topological obstruction, characteristic class, groupoid.

1. КОГОМОЛОГИЧЕСКОЕ ОПИСАНИЕ ПРЕПЯТСТВИЙ

1.1. Постановка задачи. Пусть X — конечное клеточное пространство, $A_k \xrightarrow{\pi} X$ — локально тривиальное расслоение со слоем комплексная матричная алгебра $M_k(\mathbb{C})$ (таким образом, его «естественной» структурной группой является $\mathrm{Aut}(M_k(\mathbb{C})) \cong \mathrm{PGL}_k(\mathbb{C})$). Зафиксируем натуральное l, взаимно простое с k. Наша задача — описать топологические препятствия к существованию отображения расслоений над X:

$$\mu\colon A_k \to X \times M_{kl}(\mathbb{C}), \tag{1}$$

такого что для любой точки $x \in X$ ограничение $\mu\mid_x$ вкладывает слой $(A_k)_x$ в $M_{kl}(\mathbb{C})$ в качестве унитальной подалгебры.

1.2. Конструкция препятствий. Чтобы применить стандартную технику топологической теории препятствий, сведем задачу о вложениях к задаче о сечениях подходящего расслоения.

Заметим, что группы $\mathrm{PGL}_n(\mathbb{C})$ можно заменить их компактными деформационными ретрактами $\mathrm{PU}(n)$, рассматривая вместо всех унитальных гомоморфизмов матричных алгебр только их $*$-гомоморфизмы.

Пусть $\mathrm{Hom}_{alg}(M_k(\mathbb{C}),\, M_{kl}(\mathbb{C}))$ — множество всех унитальных $*$-гомоморфизмов $M_k(\mathbb{C}) \to M_{kl}(\mathbb{C})$. Из теоремы Нетер – Сколема [1] следует его представление

$$\mathrm{Hom}_{alg}(M_k(\mathbb{C}),\, M_{kl}(\mathbb{C})) \cong \mathrm{PU}(kl)/(E_k \otimes \mathrm{PU}(l)) \tag{2}$$