Для завершения доказательства теоремы осталось показать, что набор $\{\lambda_{nq}, \alpha_{nq}\}$ совпадает со спектральными данными построенной краевой задачи $L(Q, h, H)$. По лемме 10 матрица-функция $\Phi(x, \lambda)$ является решением Вейля задачи L. Получим выражение для матрицы Вейля:

$$M(\lambda) = \Phi(0, \lambda) = \tilde{M}(\lambda) - \sum_{(k,l,j)\in V} \varphi_{klj}(0)\alpha'_{klj} \frac{\langle \tilde{\varphi}^*_{klj}(x), \tilde{\Phi}(x, \lambda)\rangle_{x=0}}{\lambda - \lambda_{klj}} =$$

$$= \tilde{M}(\lambda) + \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{l=1}^{m}\left(\frac{\alpha'_{kl0}}{\lambda - \lambda_{kl1}} - \frac{\alpha'_{kl1}}{\lambda - \lambda_{kl1}}\right).$$

Используя равенство (см. [2]) $\tilde{M}(\lambda) = \sum\limits_{k=0}^{\infty}\sum\limits_{l=1}^{m} \frac{\alpha'_{kl1}}{\lambda - \lambda_{kl1}}$, приходим к соотношению $M(\lambda) = \sum\limits_{k=0}^{\infty}\sum\limits_{l=1}^{m} \frac{\alpha'_{kl0}}{\lambda - \lambda_{kl0}}$. Отсюда вытекает, что $\{\lambda_{kl0}\}$ являются полюсами матрицы Вейля $M(\lambda)$, а $\{\alpha_{kl0}\}$ — вычетами относительно этих полюсов. Заметим, что кратности собственных значений также совпадают с количествами одинаковых чисел в наборе $\{\lambda_{kl0}\}$, потому что эти количества равны рангам вычетов $\{\alpha_{kl0}\}$. Теорема 1 полностью доказана. $\square$

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ и Национального научного совета Тайваня (*проекты* 10-01-00099, 10-01-92001-ННС).

Библиографический список

1. *Юрко, В.А.* Введение в теорию обратных спектральных задач / В.А. Юрко. – М.: Физматлит, 2007. – 384 с.
2. *Yurko, V.A.* Inverse problems for matrix Sturm – Liouville operators / V.A. Yurko // Russian J. of Math. Physics. – 2006. – V. 13, № 1. – P. 111–118.
3. *Carlson, R.* An inverse problem for the matrix Schrödinger equation / R. Carlson // J. of Math. Analysis and Applications. – 2002. – № 267. – P. 564–575.
4. *Malamud, M.M.* Uniqueness of the matrix Sturm – Liouville equation given a part of the monodromy matrix and borg type results / M.M. Malamud // Sturm – Liouville theory. Past and present. – Birkhauser; Basel, 2005. – P. 237–270,
5. *Yurko, V.A.* Inverse problems for the matrix Sturm – Liouville equation on a finite interval / V.A. Yurko // Inverse Problems. – 2006. – № 22. – P. 1139–1149.
6. *Chelkak, D.* Weyl – Titchmarsh functions of vector-valued Sturm – Liouville operators on the unit interval / D. Chelkak, E. Korotyaev // J. of Functional Analysis. – 2009. – V. 257, iss. 5, 1 September. – P. 1546–1588.

УДК 519.853.3

О ПРИБЛИЖЕННОМ РЕШЕНИИ ЗАДАЧИ ОБ АСФЕРИЧНОСТИ ВЫПУКЛОГО КОМПАКТА

С.И. Дудов, Е.А. Мещерякова

Саратовский государственный университет,
кафедра математической экономики
E-mail: DudovSI@info.sgu.ru

Рассматривается конечномерная задача о минимизации отношения радиуса описанного шара заданного выпуклого компакта (в произвольной норме) к радиусу вписанного шара за счет выбора единого центра этих шаров. Предлагается подход к построению численного метода её решения. На каждом шаге итерационного процесса требуется решать задачу выпуклого программирования, целевая функция которой является разностью радиуса описанного шара и, с некоторым варьируемым положительным множителем, радиуса вписанного шара. Показано, что эта вспомогательная задача, в случае, когда сам выпуклый компакт, а также шар используемой нормы являются многогранниками, сводится к задаче линейного программирования.

Ключевые слова: выпуклый компакт, асферичность, субдифференциал, аппроксимация.

On a Approximate Solution of the Problem of Aspherical Convex Compact Set

S.I. Dudov, E.A. Mesheryakova

Saratov State University,
Chair of Mathematical Economy
E-mail: DudovSI@info.sgu.ru

We examine a finite-dimensional problem of minimizing the ratio radius of the ball given a compact convex set (in an arbitrary norm) to the radius of the inscribed sphere through the choice of a common center of these balls. The article offers an approach to building the numerical method of its solution. At each step of the iterative process it is required to solve the problem of convex programming, target function of which is the difference between the radius of a circumscribed sphere, and scalable, with some positive factor, the radius of the inscribed sphere. It is shown that this auxiliary problem, in case of convex compact, and the ball of the used norm being polyhedral, can be reduced to a linear programming problem.

Key words: compact convex set, asphericity, subdifferential, approximation.

1. Задачей об асферичности выпуклого компакта D из конечномерного пространства $\mathbb{R}^p$ с непустой внутренностью называют

$$\varphi(x) \equiv \frac{R(x)}{\rho(x)} \longrightarrow \min_{x \in D}, \tag{1}$$

где функции $R(x) = \max_{y \in D} n(x - y)$, $\rho(x) = \min_{y \in \Omega} n(x - y)$ выражают соответственно расстояние от точки x до самой удаленной точки компакта D и до самой близкой точки множества $\Omega = \overline{\mathbb{R}^p \backslash D}$ в заданной норме $n(\cdot)$.

Функция $R(x)$ является выпуклой на $\mathbb{R}^p$, а $\rho(x)$-вогнута на D. Известны соответствующие формулы субдифференциала и супердифференциала этих функций [1, 2]. Показатель асферичности $\varphi^* \equiv \min\{\varphi(x) : x \in D\}$ используется (обычно для случая евклидовой нормы) при описании свойств выпуклого тела и построении методов его приближения (см. напр. [3]). Однако результатов по характеризации и построению численных методов решения задачи (1) обнаружить не удалось. Трудности ее исследования, видимо, связаны с тем обстоятельством, что целевая функция является негладкой и при этом она не выпукла и не вогнута, в общем случае, даже локально. Однако выяснилось, что она является на D субдифференцируемой в смысле определения В.Ф. Демьянова – А.М. Рубинова [4, 5]. В [6] установлена соответствующая формула ее субдифференциала. На этой основе в статье [7] получены необходимые и достаточные условия решения, а так же пример условия единственности решения задачи (1).

2. Ниже предлагается подход к построению численного метода приближенного решения задачи (1). Пусть x_0 — произвольная внутренняя точка из D и $\alpha_0 = \varphi(x_0)$. Принципиальная схема построения последовательности приближений заключается в следующем.

Если уже построена точка $x_k \in D$ и $\alpha_k = \varphi(x_k)$, то в качестве точки x_{k+1} берем решение задачи

$$\psi_k(x) \equiv R(x) - \alpha_k \rho(x) \longrightarrow \min_{x \in D}, \tag{2}$$

т. е. $x_{k+1} \in D$ и $\psi_k(x_{k+1}) = \min_{x \in D} \psi_k(x)$.

Главная идея здесь заключается в том, что $\psi_k(x_k) = 0$ и поэтому, если точка x_k не является решением задачи (2), то $\psi_k(x_{k+1}) < 0$, что эквивалентно неравенству $\varphi(x_{k+1}) < \varphi(x_k)$. Таким образом последовательность $\{\varphi(x_k)\}_{k=1,2,\ldots}$ монотонно убывает. В качестве обоснования сходимости процесса докажем, что справедлива

Теорема 1. *Любая предельная точка последовательности* $\{x_k\}_{k=1,2,\ldots}$ *является решением задачи* (1).

Доказательство. Будем считать, без потери общности, что $x_k \to x^* \in D$ при $k \to \infty$. Предположим противное, что есть точка x^* не является решением, а значит существует положительное a такое, что

$$\varphi(x^*) = \varphi^* + \mathrm{a}, \quad \varphi^* = \min_{x \in D} \varphi(x). \tag{3}$$

Пусть $\hat{x} \in D$ и $\varphi(\hat{x}) = \varphi^*$, т. е. точка $\hat{x}$ - решение или одно из решений задачи (1). По построению $\psi_k(\hat{x}) \geq \psi_k(x_{k+1})$ или

$$R(\hat{x}) - \alpha_k \rho(\hat{x}) \geq R(x_{k+1}) - \alpha_k \rho(x_{k+1}). \tag{4}$$

Функции $R(x)$ и $-\rho(x)$ выпуклые конечные, а значит, и непрерывные [4, с. 43]. Поэтому, переходя в (4) к пределу по $k \to \infty$, получаем

$$R(\hat{x}) - \varphi(x^*)\rho(\hat{x}) \geq R(x^*) - \varphi(x^*)\rho(x^*) = 0. \tag{5}$$

С другой стороны, в силу (3) имеем

$$R(\hat{x}) - \varphi(x^*)\rho(\hat{x}) = \rho(\hat{x}) \left(\frac{R(\hat{x})}{\rho(\hat{x})} - \varphi^* - a \right) = -a\rho(\hat{x}) < 0,$$

что противоречит (5). Теорема доказана. □

Важное обстоятельство для нас в этом подходе заключается в том, что целевая функция $\psi_k(x)$ вспомогательной задачи (2), решаемой на каждом шаге, является выпуклой на выпуклом компакте D.

Это легко следует из выпуклости функции $R(x)$ и вогнутости функции $\rho(x)$ на D. Следовательно, для решения задачи (2) можно использовать наработанный широкий спектр численных методов выпуклого программирования (см. напр. [8–9]).

3. Рассмотрим важный частный случай, когда вспомогательная задача (2) сводится к задаче линейного программирования.

Предположим, что выпуклый компакт D является многогранником, заданным в виде

$$D = \left\{ y \in \mathbb{R}^p : \langle A_i, y \rangle + a_i \geq 0, i = \overline{1,m} \right\}, \tag{6}$$

где $A_i \in \mathbb{R}^p$, $a_i \in \mathbb{R}$, $i = \overline{1,m}$, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ — скалярное произведение.

Обозначим через $Bn(x,r) = \{y \in \mathbb{R}^p : n(x-y) \leq r\}$ — шар в норме $n(\cdot)$ с центром в точке x и радиуса r. Предположим норма такова, что ее единичный шар с центром в начале координат также является многогранником, имеющим вид

$$Bn(0_p, 1) = \left\{ y \in \mathbb{R}^p : \langle B_j, y \rangle + b_j \geq 0,\ j = \overline{1,l} \right\}, \tag{7}$$

где $B_j \in \mathbb{R}^p$, $b_j \in \mathbb{R}$, $b_j > 0$, $j = \overline{1,m}$.

Напомним, что полярной нормой к норме $n(\cdot)$ называется функция $n^*(x) = \max\limits_{n(v) \leq 1} \langle v, x \rangle$.

Конкретизируем вид функций $R(x)$ и $\rho(x)$ в рассматриваемом случае.

Лемма 1. *Если единичный шар нормы $n(\cdot)$ можно представить в виде (7), то*

$$R(x) = \max_{j=\overline{1,l}} \{ \langle D_j, x \rangle + d_j \},$$

где

$$D_j = -\frac{B_j}{b_j}, \quad d_j = \max_{y \in D} \langle D_j, y \rangle. \tag{8}$$

Доказательство. Известно (см. [1, 10]), что исходная норма $n(\cdot)$ выражается через полярную к ней норму $n^*(\cdot)$ формулой

$$n(x) = \max_{n^*(v) \leq 1} \langle v, x \rangle, \tag{9}$$

причем единичный шар полярной нормы является полярой, в привычном смысле выпуклого анализа [10], единичного шара исходной нормы. Нетрудно убедиться, что полярой к шару (7) является множество

$$\{y \in \mathbb{R}^p : n^*(y) \leq 1\} = \mathrm{co} \left\{ -\frac{B_j}{b_j} : j = \overline{1,l} \right\}. \tag{10}$$

Здесь $\mathrm{co}\, A$ — выпуклая оболочка множества A.

Теперь используя (9), (10), обозначения (8), а также известный из выпуклого анализа факт [4, с. 26], что для произвольного компакта $A \subset \mathbb{R}^p$ выполняется равенство

$$\max_{v \in A} \langle v, g \rangle = \max_{v \in \mathrm{co}\ A} \langle v, g \rangle, \quad \forall\ g \in \mathbb{R}^p,$$

получаем

$$R(x) = \max_{y \in D} \max_{n^*(v) \leq 1} \langle v, x-y \rangle = \max_{y \in D} \max_{v \in \mathrm{co} \left\{ -\frac{B_j}{b_j} : j = \overline{1,l} \right\}} \langle v, x-y \rangle = \max_{y \in D} \max_{v \in \left\{ -\frac{B_j}{b_j} : j = \overline{1,l} \right\}} \langle v, x-y \rangle =$$

$$= \max_{j=\overline{1,l}} \max_{y \in D} \langle D_j, x-y \rangle = \max_{j=\overline{1,l}} \left\{ \langle D_j, x \rangle + \max_{y \in D} \langle D_j, -y \rangle \right\} = \max_{j=\overline{1,l}} \{ \langle D_j, x \rangle + d_j \}.$$

Лемма доказана. □

Лемма 2. *Если компакт D задан в виде (6) и точка $x \in D$, то*

$$\rho(x) = \min_{i=\overline{1,m}} \{ \langle C_i, x \rangle + c_i \}, \tag{11}$$

где

$$C_i = \frac{A_i}{n^*(A_i)}, \qquad c_i = \frac{a_i}{n^*(a_i)}. \tag{12}$$

Доказательство. Известно, что расстояние в норме $n(\cdot)$ от точки до гиперплоскости $\pi = \{y \in \mathbb{R}^p : \langle A, y\rangle + a = 0\}$, где $A \in \mathbb{R}^p, a \in \mathbb{R}$, выражается формулой

$$\rho_\pi(x) = \frac{|\langle A, x\rangle +|}{n^*(A)}. \tag{13}$$

Очевидно, для точки $x \in D$, учитывая вид (6) множества D, выполняется

$$\rho(x) = \min_{i=\overline{1,m}} \rho_{\pi_i}(x),$$

где $\pi_i = \{y \in \mathbb{R}^p : \langle A_i, y\rangle + a_i = 0\}$ — гиперплоскости, образующие грани многогранника D. Теперь, используя (13) и учитывая, что $\langle A_i, x\rangle + a_i \geq 0$ для $x \in D$, имеем

$$\rho(x) = \min_{i=\overline{1,m}} \left\{ \frac{\langle A_i, x\rangle + a_i}{n^*(A_i)} \right\}.$$

Принимая во внимание обозначения (12), мы получим (11). Лемма доказана. □

Из лемм 1–2 непосредственно вытекает

Следствие. *Если выпуклый компакт D задан в виде* (6), *а единичный шар нормы в виде* (7), *то задача* (2) *эквивалентна задаче*

$$\max_{i=\overline{1,m}, j=\overline{1,l}} \{\langle D_j - \alpha_k C_i, x\rangle + d_j - \alpha_k c_i\} \to \min_{x\in D}. \tag{14}$$

Далее рассуждениями, аналогичными [11, с. 244], приходим к выводу, что справедлива

Теорема 2. *Задача* (14) *эквивалентна задаче линейного программирования следующего вида:*

$$\begin{cases} z \to \min, \\ \langle D_j - \alpha_k C_i, x\rangle + d_j - \alpha_k c_i \leq z, \quad i = \overline{1,m}, \quad j = \overline{1,l}, \\ x \in D. \end{cases} \tag{15}$$

При этом если пара (x^*, z^*) — решение задачи (15), *то x^* — решение задачи* (14). *И наоборот, если x^* — решение задачи* (14), *то пара (x^*, z^*), где $z^* = \max_{j=\overline{1,l}}\{\langle D_j, x^*\rangle + d_j\} - \alpha_k \min_{i=\overline{1,m}}\{\langle C_i, x^*\rangle + c_i\}$, является решением задачи* (15).

Замечание. Таким образом мы можем предложить следующий путь получения приближенного решения задачи (1). Сначала аппроксимировать выпуклый компакт D и единичный шар нормы многогранниками с некоторой точностью. Отметим, что методов полиэдральной аппроксимации выпуклых тел существует довольно много (см. напр. [3, 12] и библиографию в них). А далее воспользоваться предложенным в п. 2 численным методом для решения уже замененной задачи, решая на каждом шаге задачу линейного программирования вида (15). В связи с этим предстоит ответить на вопрос, как точность аппроксимации компакта D и такой способ аппроксимации нормы $n(\cdot)$ отразятся на точности решения исходной задачи?

Работа выполнена при поддержке РФФИ (*проект* 10-01-00270) *и гранта Президента РФ для поддержки ведущих научных школ* (*проект* НШ-4383.2010.1).

Библиографический список

1. *Пшеничный, Б.Н.* Выпуклый анализ и экстремальные задачи / Б.Н. Пшеничный. – М.: Наука, 1980.
2. *Дудов, С.И.* Равномерная оценка выпуклого компакта шаром произвольной нормы / С.И. Дудов, И.В. Златорунская // Мат. сб. – 2000. – Т. 191, № 10. – С. 13–38.
3. *Каменев, Г.К.* Скорость сходимости адаптивных методов полиэдромной аппроксимации выпуклых тел на начальном этапе / Г.К. Каменев // ЖВМ и МФ. – 2008. – Т. 48, № 5. – С. 763–778.
4. *Демьянов, В.Ф.* Недифференцируемая оптимизация / В.Ф. Демьянов, Л.В. Васильев. – М.: Наука, 1981.
5. *Демьянов, В.Ф.* Основы негладкого анализа и квазидифференциальное исчисление / В.Ф. Демьянов, А.М. Рубинов. – М.: Наука, 1990.
6. *Мещерякова, Е.А.* О двух задачах по оценке выпуклого компакта шаром / Е.А. Мещерякова // Математика. Механика: сб. науч. тр. – Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 2008. – Вып. 10. – С. 48–50.

7. *Дудов, С.И.* Об асферичности выпуклого компакта / С.И. Дудов, Е.А. Мещерякова // Математика. Механика: сб. науч. тр. – Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 2009. – Вып. 11. – С. 24–27.
8. *Васильев, Ф.П.* Численные методы решения экстремальных задач / Ф.П. Васильев. – М.: Наука, 1988.
9. *Карманов, В.Г.* Математическое программирование / В.Г. Карманов. – М.: Наука, 1986.
10. *Рокафеллар, Р.* Выпуклый анализ / Р. Рокафеллар. – М.: Мир, 1973.
11. *Зуховицкий, С.И.* Линейное и выпуклое программирование / С.И. Зуховицкий, Л.И. Авдеева. – М.: Наука, 1964.
12. *Половинкин, Е.С.* Элементы выпуклого и сильно выпуклого анализа / Е.С. Половинкин, М.В. Балашов. – М.: Физматлит, 2004.

УДК 517.984

СМЕШАННАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ С ИНВОЛЮЦИЕЙ И ПОТЕНЦИАЛОМ СПЕЦИАЛЬНОГО ВИДА

А.П. Хромов

Саратовский государственный университет,
кафедра дифференциальных уравнений и прикладной математики
E-mail: KhromovAP@info.sgu.ru

Для решения некоторой смешанной задачи с инволюцией и вещественным симметричным потенциалом найдено явное аналитическое представление методом Фурье. При этом использованы приемы, позволяющие избегать почленного дифференцирования функционального ряда и накладывать минимальные условия на начальные данные задачи.

Ключевые слова: смешанная задача, инволюция, метод Фурье, классическое решение.

The Mixed Problem for the Differential Equation with Involution and Potential of the Special Kind

A.P. Khromov

Saratov State University,
Chair of Differential Equations and Applied Mathematics
E-mail: KhromovAP@info.sgu.ru

For the solution of some mixed problem with involution and real symmetrical potential, explicit analytical formula has been found with the use of the Fourier method. Techniques allowing to avoid term-by-term differentiation of the functional series and impose the minimum conditions for initial problem data, are used.

Key words: mixed problem, involution, Fourier method, classical solution.

Рассматривается следующая смешанная задача:

$$\frac{1}{\beta i}u_t(x,t) = u_\xi(\xi,t)|_{\xi=1-x} + q(x)u(x,t), \qquad x\in[0,1], \qquad t\in(-\infty,+\infty), \tag{1}$$

$$u(x,0)=\varphi(x), \qquad u(0,t)=0. \tag{2}$$

Предполагаем выполненными следующие условия: 1) β — вещественное число, $\beta\neq 0$, 2) $q(x)\in C[0,1]$, $q(x)=q(1-x)$, $q(x)$ — вещественная функция; 3) $\varphi\in C^1[0,1]$ и $\varphi(0)=0$, $\varphi'(1)=0$.

Уравнение (1) представляет собой простейшее уравнение в частных производных, содержащее инволюцию $\nu(x)=1-x$. Краевые задачи с инволюцией активно исследуются (см., например, работу [1] и библиографию в ней).

Решение задачи (1)–(2) будем искать методом Фурье. Наши предположения позволяют получить классическое решение, т. е. решение, непрерывно дифференцируемое по обеим переменным. Условия на $\varphi(x)$ являются естественными, так как им удовлетворяют собственные функции порождаемой (1)–(2) краевой задачи. Условия на $q(x)$ снимают многие трудности при исследовании задачи и позволяют дать хорошую структурную форму для решения.

В работе широко используются приемы из [2], позволяющие получить решение, избегая почленного дифференцирования функционального ряда.

1. Согласно методу Фурье положим $u(x,t)=y(x)T(t)$. Тогда получим следующую задачу на собственные значения для $y(x)$:

$$y'(1-x)+q(x)y(x)=\lambda y(x), \tag{3}$$

$$y(0)=0, \tag{4}$$

а для $T(t)$ имеем $T(t)=ce^{\lambda\beta it}$.