ниже, чем $|\varkappa_1| + 1$, а $\Omega_2(z)$ — нуль порядка не ниже, чем $|\varkappa_2| + 1$. Равенства (23) и есть равенства нулю соответствующих лорановских коэффициентов функций $\Omega_1(z)$, $\Omega_2(z)$. Аналогичным образом могут быть доказаны остальные утверждения теоремы. $\square$

При решении неоднородной задачи Маркушевича мы не упоминали о возможности точного ее решения. Легко видеть, что это можно сделать, например, в случае, когда $f_1(t)$ — рациональная дробь с коэффициентами из $\mathbb{Q}(i)$.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (*проект* 07-01-96010).

Библиографический список

1. *Литвинчук Г.С.* Краевые задачи и сингулярные интегральные уравнения со сдвигом. М., 1977. 448 с.
2. *Векуа Н.П.* Системы сингулярных интегральных уравнений. М., 1970. 380 с.
3. *Сабитов И.Х.* Об общей краевой задаче линейного сопряжения на окружности // Сиб. мат. журн. 1964. Т. 5, № 1. С. 124–129.
4. *Патрушев А.А.* К задаче Маркушевича для односвязной области // Тр. семинара по краевым задачам. Казань, 1980. Вып.17. С. 110–123.
5. *Патрушев А.А.* Задача Маркушевича для одной бесконечно-связной области в классе автоморфных функций // Тр. семинара по краевым задачам. Казань, 1981. Вып. 18. С. 132–145.
6. *Патрушев А.А.* Краевая задача Маркушевича в классе автоморфных функций относительно циклической группы эллиптического типа // Краевые задачи и их приложения. Чебоксары, 1989. С. 76–79.
7. *Расулов К.М.* Об одном методе решения граничной задачи Маркушевича в классе аналитических функций // Исследования по краевым задачам комплексного анализа и дифференциальным уравнениям: межвуз. сб. науч. тр. Смоленск, 2001. Вып. 3. С. 98–108.
8. *Расулов К.М.* О решении обобщенной граничной задачи Маркушевича в классе аналитических функций // Системы компьютерной математики и их приложения: сб. тр. междунар. науч. конф. Смоленск, 2002. С. 137–142.
9. *Гахов Ф.Д.* Краевые задачи. М., 1963. 640 с.
10. *Чибрикова Л.П., Салехов Л.Г.* К решению одной общей задачи линейного сопряжения аналитических функций в случае алгебраических контуров // Тр. семинара по краевым задачам. Казань, 1968. Вып.5. С. 224–249.
11. *Адуков В.М.* Факторизация Винера – Хопфа мероморфных матриц-функций // Алгебра и анализ. 1992. Т. 4, вып. 1. С. 54–74.
12. *Адуков В.М.* Generalized inversion of block Toeplitz matrices // Linear Algebra Appl. 1998. Vol. 274. P. 85–124.
13. *Адуков В.М.* Факторизация Винера – Хопфа кусочно мероморфных матриц-функций // Мат. сб. 2009. Т. 200, № 8. С. 3–24.

УДК 519.853.3

ХАРАКТЕРИЗАЦИЯ УСТОЙЧИВОСТИ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ОБ АСФЕРИЧНОСТИ ВЫПУКЛОГО КОМПАКТА

С.И. Дудов, Е.А. Мещерякова

Саратовский государственный университет,
кафедра математической экономики
E-mail: DudovSI@info.sgu.ru

Рассматривается вопрос об устойчивости решения задачи об асферичности выпуклого компакта к погрешности задания этого компакта. Показано, что задача обладает устойчивостью оптимального значения целевой функции (показателя асферичности). Исследуются также свойства многозначного отображения, сопоставляющего выпуклому компакту множество центров его асферичности. Доказано, что это многозначное отображение полунепрерывного сверху всюду на пространстве выпуклых компактов. Приводится пример, показывающий, что полунепрерывности снизу может не быть.

Ключевые слова: асферичность, устойчивость решения, выпуклый компакт, многозначное отображение, полунепрерывность снизу (сверху).

The Characteristic of Stability of the Solution in the Problem of Convex Compact Set Asphericity

S.I. Dudov, E.A. Mesheryakova

Saratov State University,
Chair of Mathematical Economy
E-mail: DudovSI@info.sgu.ru

We consider the problem of stability of the solution in the problem of asphericity of a convex set with respect to the error of defining the compact set. It is shown that the optimal value of the criterion function (an asphericity indicator) is stable. Properties of the set-valued mapping, that puts to a convex compact compact set the centers of its asphericity are also investigated. It is proved that this mapping is semicontinious from above everywhere in the space of convex compact sets.

Key words: compact convex set, asphericity, stability, set-valued mapping, semicontinious above.

1. Задачи по оценке и приближению сложных множеств множествами простой геометрической структуры находят обширные приложения в естествознании и представляют один из разделов негладкого анализа (см. [1, 2]). К ним можно отнести и задачу об асферичности выпуклого компакта, в которой требуется найти наименьшее значение отношения радиуса описанного шара к радиусу вписанного шара за счет выбора единого центра этих шаров. Приведем ее математическую формализацию.

Пусть D — некоторый выпуклый компакт с непустой внутренностью (выпуклое тело) из конечномерного действительного пространства $\mathbb{R}^p$, а функция $n(x)$ удовлетворяет на $\mathbb{R}^p$ аксиомам нормы.

Функция, определенная как

$$R(x) = \max_{y \in D} n(x - y),$$

выражает радиус наименьшего шара в норме $n(\cdot)$ с центром в точке $x \in \mathbb{R}^p$, содержащего компакт D. Другими словами, это радиус описанного шара с центром в точке x.

Для $x \in D$ и множества $\Omega = \overline{\mathbb{R}^p \backslash D}$ функция

$$\rho(x) = \min_{y \in \Omega} n(x - y)$$

выражает радиус наибольшего шара с центром в точке x, содержащегося в D, т. е. это радиус вписанного шара в данной точке.

Теперь задачу об асферичности выпуклого тела D можно записать в виде

$$\psi(x) \equiv \frac{R(x)}{\rho(x)} \to \min_{x \in D}. \tag{1}$$

Функция $R(x)$ является выпуклой на $\mathbb{R}^p$, а $\rho(x)$ — вогнутой на D. Известны соответствующие формулы субдифференциала и супердифференциала этих функций [1, 3, 4]. Показатель асферичности $\psi^* \equiv \inf \{\psi(x) : x \in D\}$ используется (обычно для случая, когда $n(\cdot)$ — евклидова норма) при описании свойств выпуклого тела и построении методов его приближения (см. напр. [5]). Однако результатов по исследованию задачи (1) авторам найти не удалось. Их собственные усилия позволили дать описание свойств целевой функции $\psi(x)$, получить необходимые и достаточные условия решения, а также условие его единственности [6, 7]. В статье [8] предложен подход к построению метода приближенного решения задачи.

В практических ситуациях информация о выпуклом компакте D может носить приближенный характер. А именно, вместо D нам может быть известен другой выпуклый компакт D_ε такой, что

$$h(D, D_\varepsilon) \le \varepsilon, \tag{2}$$

где $\varepsilon > 0$ — известная погрешность задания компакта D, а

$$h(A, B) = \max \left\{ \sup_{a \in A} \inf_{b \in B} n(a - b),\ \sup_{b \in B} \inf_{a \in A} n(a - b) \right\}$$

— расстояние Хаусдорфа между множествами A и B в норме $n(\cdot)$. Таким образом, о решении задачи (1) мы можем судить по решению приближенной задачи:

$$\psi_\varepsilon(x) \equiv \frac{R_\varepsilon(x)}{\rho_\varepsilon(x)} \to \min_{x \in D_\varepsilon}, \tag{3}$$

где

$$R_\varepsilon(x) = \max_{y \in D_\varepsilon} n(x - y), \qquad \rho_\varepsilon(x) = \min_{y \in \Omega_\varepsilon} n(x - y) \qquad \Omega_\varepsilon = \overline{\mathbb{R}^p \backslash D_\varepsilon}.$$

Далее используются обозначения:

$$\psi^* = \min_{x \in D} \psi(x), \qquad C_\psi = \{y \in D : \psi(y) = \psi^*\}, \qquad \psi_\varepsilon = \min_{x \in D_\varepsilon} \psi_\varepsilon(x), \qquad C_\psi^\varepsilon = \{y \in D_\varepsilon : \psi(y) = \psi_\varepsilon\}.$$

В данной статье нас будет интересовать устойчивость решения задачи (1) к погрешности ε задаваемого выпуклого компакта относительно оптимального значения целевой функции ψ^*, а также множества центров асферичности C_ψ.

Нам предстоит ответить на вопрос: имеет ли место сходимость

$$\lim_{\varepsilon\downarrow 0}\psi_\varepsilon(x) = \psi^*, \tag{4}$$

$$\lim_{\varepsilon\downarrow 0}h(C_\psi, C_\psi^\varepsilon) = 0. \tag{5}$$

2. Сначала исследуем устойчивость оптимального значения целевой функции (устойчивость по функционалу). Предварительно докажем два вспомогательных факта.

Лемма 1. *Для любой точки $x \in \mathbb{R}^p$ выполняются неравенства*

$$|\rho(x) - \rho_\varepsilon(x)| \le \varepsilon, \tag{6}$$

$$|R(x) - R_\varepsilon(x)| \le \varepsilon. \tag{7}$$

Доказательство. Пусть z — одна из точек проекции точки x на множество Ω в норме $n(\cdot)$, т. е. $x \in \Omega$ и при этом

$$\rho(x) = n(x - z). \tag{8}$$

Поскольку имеет место неравенство (2), то очевидно и $h(\Omega, \Omega_\varepsilon) \le \varepsilon$, а значит, существует точка $z_\varepsilon \in \Omega_\varepsilon$ такая, что

$$n(z - z_\varepsilon) \le \varepsilon. \tag{9}$$

Используя (9) и свойства нормы, получаем

$$n(x - z) = n(x - z_\varepsilon + z_\varepsilon - z) \ge n\,(x - z_\varepsilon) - n(z_\varepsilon - z) \ge n(x - z_\varepsilon) - \varepsilon. \tag{10}$$

Поскольку $z_\varepsilon \in \Omega_\varepsilon$, то в соответствии с определением функции $\rho_\varepsilon(x)$ справедливо неравенство

$$\rho_\varepsilon(x) \le n(x - z_\varepsilon). \tag{11}$$

Теперь из (8), (10) и (11) имеем

$$\rho(x) \ge \rho_\varepsilon(x) - \varepsilon. \tag{12}$$

Теми же рассуждениями получаем также неравенство

$$\rho_\varepsilon(x) \ge \rho(x) - \varepsilon. \tag{13}$$

Теперь из (12), (13) вытекает (6). Неравенство (7) доказывается аналогично. Лемма доказана. □

Обозначим через

$$\rho^* = \max_{x\in D}\rho(x), \qquad \rho_\varepsilon = \max_{x\in D_\varepsilon}\rho_\varepsilon(x), \qquad R^* = \min_{x\in\mathbb{R}^p}R(x), \qquad R_\varepsilon = \min_{x\in\mathbb{R}^p}R_\varepsilon(x)$$

соответственно радиусы вписанных и описанных шаров множеств D и D_ε.

Следствие. *Справедлива оценка*

$$|\rho^* - \rho_\varepsilon| \le \varepsilon. \tag{14}$$

Доказательство. Пусть $y \in D$ и $\rho(y) = \rho^*$, а $y_\varepsilon \in D_\varepsilon$ и $\rho_\varepsilon(y_\varepsilon) = \rho_\varepsilon$. Используя неравенство (6), получаем

$$\rho^* = \rho(y) \le \rho_\varepsilon(y) + \varepsilon \le \rho_\varepsilon + \varepsilon, \tag{15}$$

$$\rho_\varepsilon = \rho_\varepsilon(y_\varepsilon) \le \rho(y_\varepsilon) + \varepsilon \le \rho^* + \varepsilon. \tag{16}$$

Из (15), (16) следует (14). Следствие доказано. □

Лемма 2. *Если $x^* \in \mathrm{C}_\psi$, а $x_\varepsilon \in \mathrm{C}_\psi^\varepsilon$, то*

$$\rho(x^*) \ge \rho^*/2, \tag{17}$$

$$\rho_\varepsilon(x_\varepsilon) \ge (\rho^* - \varepsilon)/2. \tag{18}$$

Доказательство. Пусть $y \in D$ и $\rho(y) = \rho^*$. Тогда, поскольку $x^* \in C_\psi$, имеем:

$$\psi^* = \frac{R(x^*)}{\rho(x^*)} \leq \frac{R(y)}{\rho(y)} = \frac{R(y)}{\rho^*}. \tag{19}$$

Теперь, учитывая очевидные неравенства $R(x^*) \geq R^*$, $R(y) \leq 2R^*$, из (19) получаем (17). Аналогичные рассуждения дают неравенство

$$\rho_\varepsilon(x_\varepsilon) \geq \frac{\rho_\varepsilon}{2}.$$

После этого для получения неравенства (18) остается применить неравенство (14). Лемма доказана. □

Лемма 3. *Для любого* $x \in \operatorname{int} D$ *при достаточно малых* $\varepsilon > 0$ *справедливо неравенство*

$$|\psi(x) - \psi_\varepsilon(x)| \leq \frac{\rho(x) + R(x)}{\rho^2(x)} \left[\varepsilon + \frac{\varepsilon^2}{\rho(x) - \varepsilon}\right]. \tag{20}$$

Доказательство. В самом деле, используя лемму 1, получаем

$$\psi(x) - \psi_\varepsilon(x) = \frac{R(x)}{\rho(x)} - \frac{R_\varepsilon(x)}{\rho_\varepsilon(x)} \leq \frac{R(x)}{\rho(x)} - \frac{R(x) - \varepsilon}{\rho(x) + \varepsilon} \leq \frac{\rho(x) + R(x)}{(\rho(x))^2}\varepsilon. \tag{21}$$

С другой стороны, также имеем

$$\psi_\varepsilon(x) - \psi(x) = \frac{R_\varepsilon(x)}{\rho_\varepsilon(x)} - \frac{R(x)}{\rho(x)} \leq \frac{R(x) + \varepsilon}{\rho(x) - \varepsilon} - \frac{R(x)}{\rho(x)} =$$

$$= \frac{(\rho(x) + R(x))\varepsilon}{\rho(x)(\rho(x) - \varepsilon)} = \frac{\rho(x) + R(x)}{(\rho(x))^2} \left[\varepsilon + \frac{\varepsilon^2}{\rho(x) - \varepsilon}\right]. \tag{22}$$

При получении неравенств мы считали $\varepsilon > 0$ настолько малым, чтобы $x \in \operatorname{int} D_\varepsilon$ и $\rho(x) > \varepsilon$. Теперь из (21) и (22) следует (20) Лемма доказана. □

Теорема 1. *Имеет место асимтотическое неравенство:*

$$|\psi^* - \psi_\varepsilon| \leq \frac{4(\rho^* + 2R^*)}{(\rho^*)^2}\varepsilon + o(\varepsilon), \tag{23}$$

где $o(\varepsilon)/\varepsilon \to 0$ *при* $\varepsilon \downarrow 0$.

Доказательство. Пусть $x^* \in C_\psi$, $x_\varepsilon \in C_\psi^\varepsilon$, а $\varepsilon > 0$ и достаточно мало, чтобы $\rho(x^*) > \varepsilon$, $\rho(x_\varepsilon) > \varepsilon$. Применяя лемму 3, получаем

$$\psi_\varepsilon - \psi^* = \psi_\varepsilon - \psi_\varepsilon(x^*) + \psi_\varepsilon(x^*) - \psi(x^*) \leq \psi_\varepsilon(x^*) - \psi(x^*) \leq \frac{\rho(x^*) + R(x^*)}{\rho^2(x^*)} \left[\varepsilon + \frac{\varepsilon^2}{\rho(x^*) - \varepsilon}\right], \tag{24}$$

$$\psi^* - \psi_\varepsilon = \psi^* - \psi(x_\varepsilon) + \psi(x_\varepsilon) - \psi_\varepsilon(x_\varepsilon) \leq \psi(x_\varepsilon) - \psi_\varepsilon(x_\varepsilon) \leq \frac{\rho(x_\varepsilon) + R(x_\varepsilon)}{\rho^2(x_\varepsilon)} \left[\varepsilon + \frac{\varepsilon^2}{\rho(x_\varepsilon) - \varepsilon}\right]. \tag{25}$$

В соответствии с леммами 1 и 2 имеем

$$\rho(x^*) \geq \rho^*/2, \tag{26}$$

$$\rho(x_\varepsilon) \geq \rho_\varepsilon(x_\varepsilon) - \varepsilon \geq (\rho^* - \varepsilon)/2 - \varepsilon. \tag{27}$$

Кроме того, очевидны неравенства

$$\rho(x^*) \leq \rho^*, \qquad \rho(x_\varepsilon) \leq \rho^*, \tag{28}$$

$$R(x^*) \leq 2R^*, \qquad R(x_\varepsilon) \leq 2R^*. \tag{29}$$

Теперь из (24), (25), используя при оценке правых частей этих неравенств соотношения (26)–(29), получаем (23). Теорема доказана. □

Тем самым мы показали, что сходимость (4) имеет место, т. е. задача (1) устойчива по оптимальному значению целевой функции относительно погрешности задания выпуклого компакта D.

Замечание 1. Простые примеры показывают, что оценка (23) является точной относительно степени погрешности ε.

3. Теперь рассмотрим вопрос об устойчивости самого множества решений задачи (1), т. е. множества центров асферичности.

Под $Kv(\mathbb{R}^p)$ будем понимать метрическое пространство всех выпуклых компактов из $\mathbb{R}^p$ с введенной ранее метрикой Хаусдорфа. Каждому элементу $D \in Kv(\mathbb{R}^p)$ можно сопоставить множество центров асферичности $C_\psi(D)$. Поэтому можно рассматривать многозначное отображение $C_\psi(\cdot) : Kv(\mathbb{R}^p) \to 2^{\mathbb{R}^p}$, где $2^{\mathbb{R}^p}$ — множество всех подмножеств из пространства $\mathbb{R}^p$. Рассмотрим свойства этого отображения. Напомним, следующее

Определение. Многозначное отображение $A(\cdot)$, сопоставляющее каждому элементу из множества Ω_1 из некоторого метрического пространства некоторое подмножество из множества Ω_2 другого метрического пространства, т. е. $A(\cdot) : \Omega_1 \to 2^{\Omega_2}$, называется *полунепрерывным сверху в точке* $x_0 \in \Omega_1$, если из того что $x_k \to x_0$, $v_k \in A(x_k)$, $v_k \to v_0$, $k \to \infty$, следует $v_0 \in A(x_0)$.

Теорема 2. *Многозначное отображение $C_\psi(\cdot)$ является полунепрерывным сверху всюду на $Kv(\mathbb{R}^p)$.*

Доказательство. 1. Сначала покажем, что если $x_0 \in \operatorname{int} D$, а $x_\varepsilon \to x_0$ при $\varepsilon \downarrow 0$, то

$$\psi_\varepsilon(x_\varepsilon) \to \psi(x_0). \tag{30}$$

В самом деле, запишем очевидное неравенство:

$$|\psi_\varepsilon(x_\varepsilon) - \psi(x_0)| \le |\psi_\varepsilon(x_\varepsilon) - \psi(x_\varepsilon)| + |\psi(x_\varepsilon) - \psi(x_0)|\,. \tag{31}$$

Поскольку в силу леммы 1

$$|R_\varepsilon(x_\varepsilon) - R(x_\varepsilon)| \le \varepsilon, \qquad |\rho_\varepsilon(x_\varepsilon) - \rho(x_\varepsilon)| \le \varepsilon,$$

то $|\psi_\varepsilon(x_\varepsilon) - \psi(x_\varepsilon)| = \left|\dfrac{R_\varepsilon(x_\varepsilon)}{\rho_\varepsilon(x_\varepsilon)} - \dfrac{R(x_\varepsilon)}{\rho(x_\varepsilon)}\right| \le \left|\dfrac{R(x_\varepsilon)+\varepsilon}{\rho(x_\varepsilon)-\varepsilon} - \dfrac{R(x_\varepsilon)}{\rho(x_\varepsilon)}\right| = \dfrac{\varepsilon(\rho(x_\varepsilon)+R(x_\varepsilon))}{\rho(x_\varepsilon)(\rho(x_\varepsilon)-\varepsilon)} \to 0, \quad \varepsilon \downarrow 0.$

Кроме того, функция $\psi(x)$ как отношение двух непрерывных функций сама является непрерывной в точке $x_0 \in \operatorname{int} D$. Поэтому и второе слагаемое в правой части неравенства (31) также стремится к нулю при $\varepsilon \downarrow 0$. Тем самым (30) доказано.

2. Пусть $\varepsilon_i \downarrow 0$ при $i \to \infty$, а $\{D_{\varepsilon_i}\}$ — последовательность элементов из $Kv(\mathbb{R}^p)$ такая, что $h(D, D_{\varepsilon_i}) \le \varepsilon_i$. Кроме того, пусть

$$x_{\varepsilon_i} \in C_\psi(D_{\varepsilon_i}), \qquad x_{\varepsilon_i} \to x_0 \in \operatorname{int} D, \qquad i \to \infty. \tag{32}$$

Покажем, что $x_0 \in C_\psi(D)$. Предположим противное. Тогда для $x^* \in C_\psi(D)$

$$\psi(x_0) - \psi(x^*) = \Delta > 0. \tag{33}$$

По лемме 3 имеем

$$|\psi_{\varepsilon_i}(x^*) - \psi(x^*)| \le \frac{\rho(x^*) + R(x^*)}{\rho^2(x^*)}\,[\varepsilon_i + o(\varepsilon_i)]\,, \tag{34}$$

где $o(\varepsilon_i)/\varepsilon_i \to 0$ при $i \to \infty$. Кроме того, ввиду (30)

$$|\psi_{\varepsilon_i}(x_{\varepsilon_i}) - \psi(x_0)| = \delta_i \downarrow 0, \qquad i \to \infty. \tag{35}$$

Из (34), (35) следуют неравенства

$$\psi_{\varepsilon_i}(x_{\varepsilon_i}) \ge \psi(x_0) - \delta_i, \qquad \psi(x^*) + \frac{\rho(x^*) + R(x^*)}{\rho^2(x^*)}\,[\varepsilon_i + o(\varepsilon_i)] \ge \psi_{\varepsilon_i}(x^*),$$

из которых получаем

$$\psi_{\varepsilon_i}(x_{\varepsilon_i}) - \psi_{\varepsilon_i}(x^*) \geq \psi(x_0) - \psi(x^*) - \delta_i - \frac{\rho(x^*) + R(x^*)}{\rho^2(x^*)} \left[\varepsilon_i + o(\varepsilon_i)\right].$$

Отсюда, учитывая (33), следует, что при достаточно больших значениях i выполняется

$$\psi_{\varepsilon_i}(x_{\varepsilon_i}) - \psi_{\varepsilon_i}(x^*) \geq \frac{\Delta}{2}.$$

Это противоречит тому, что $x_{\varepsilon_i} \in C_\psi(D_{\varepsilon_i})$, поскольку в точке x^* функция $\psi_{\varepsilon_i}(\cdot)$ принимает меньшее значение, чем в точке x_{ε_i}.

Поскольку последовательность $\{x_{\varepsilon_i}\}_{i=1,2,\dots}$ со свойством (32) выбиралась произвольно, мы тем самым доказали полунепрерывность сверху многозначного отображения $C_\psi(\cdot)$ на произвольно выбранном элементе $D \in Kv(\mathbb{R}^p)$ в соответствии с определением 1. Теорема доказана. $\square$

Замечание 2. Практическое значение полунепрерывности сверху многозначного отображения $C_\psi(\cdot)$ состоит в том, что решая некоторую последовательность задач (3) для D_{ε_i}, где $\varepsilon_i \downarrow 0$ при $i \to \infty$ мы можем получить приближенное значение хотя бы одного из центров асферичности для D.

Замечание 3. Из теоремы 2 вытекает, что если для некоторого выпуклого тела D множество его центров асферичности $C_\psi(D)$ является одноэлементным, т. е. решение задачи (1) единственно, то отображение $C_\psi(\cdot)$ является непрерывным на этом элементе $D \in Kv(\mathbb{R}^p)$. Это значит, что для него сходимость (5) имеет место. Единственность решения задачи (1) гарантирует, в частности, строгая выпуклость тела D [7].

Замечание 4. Нетрудно показать, что доказанную полунепрерывность сверху многозначного отображения $C_\psi(\cdot)$ на элементе $D \in Kv(\mathbb{R}^p)$ можно понимать, как сходимость

$$\rho(C_\psi(D_\varepsilon), C_\psi(D)) = \sup_{x \in C_\psi(D_\varepsilon)} \inf_{y \in C_\psi(D)} n(x-y) \to 0, \quad \varepsilon \downarrow 0.$$

Соответственно полунепрерывность снизу многозначного отображения $C_\psi(\cdot)$ на элементе $D \in Kv(\mathbb{R}^p)$, если она имеет место, можно было бы понимать как

$$\rho(C_\psi(D), C_\psi(D_\varepsilon)) \to 0, \quad \varepsilon \to 0. \tag{36}$$

Приведем пример, показывающий что сходимость (36) может не иметь место. А поскольку

$$h(C_\psi(D), C_\psi(D_\varepsilon)) = \max\left\{\rho(C_\psi(D),\ C_\psi(D_\varepsilon)),\ \rho(C_\psi(D_\varepsilon),\ C_\psi(D))\right\},$$

то это будет означать, что в таком случае сходимости (5) не будет.

Пример. Пусть $p = 2$, $n(\cdot) = \|\cdot\|$ — евклидова норма, $D = co\{Bn(0_2, 1), x_0\}$, где точка $x_0 = (3, 0)$. Нетрудно видеть (в качестве обоснования можно также использовать необходимые и достаточные условия решения из [7]), что решение задачи (1) в данном случае не единственное, причем множеством центров асферичности является отрезок $C_\psi(D) = [(0,0),(1,0)]$, а соответствующее значение асферичности $\psi^* = 3$.

Обозначим через $strco_r D$ — r-сильно выпуклую оболочку множества D, т. е. пересечение всех евклидовых кругов радиуса r, содержащих компакт D (см. [9]), а $\varepsilon(r) = h(D, strco_r D)$. Легко видеть, что для множества $D_{\varepsilon(r)} = strco_r D$ имеем $h(D, D_{\varepsilon(r)}) = \varepsilon(r) \to 0$ при $r \to \infty$. Но поскольку при этом множество $D_{\varepsilon(r)}$ является строго выпуклым (более того — сильно выпуклым), то, как известно [7], решение задачи об асферичности для него будет единственным, т. е. $C_\psi(D_{\varepsilon(r)}) = \{x(r)\}$. Следовательно, при любом сколь угодно большом значении r, а значит, и сколь угодно малых $\varepsilon(r)$, будет выполняться

$$\rho(C_\psi(D), C_\psi(D_{\varepsilon(r)})) = \rho([(0,0),(1,0)], \{x(r)\}) \geq \frac{1}{2}.$$

Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект 10-01-0027) *и гранта Президента РФ для поддержки ведущих научных школ (проект* НШ-4383.2010.1).

Библиографический список

1. *Пшеничный Б.Н.* Выпуклый анализ и экстремальные задачи. М.: Наука, 1980.
2. *Демьянов В.Ф., Рубинов А.М.* Основы негладкого анализа и квазидифференциальное исчисление. М.: Наука, 1990.
3. *Дудов С.И., Златорунская И.В.* Равномерная оценка выпуклого компакта шаром произвольной нормы // Мат. сб. 2000. Т. 191, № 10. С. 13–38.
4. *Дудов С.И.* Субдифференцируемость и супердифференцируемость функции расстояния // Мат. заметки. 1997. Т.61, № 4. С. 530–542.
5. *Каменев Г.К.* Скорость сходимости адаптивных методов полиэдральной аппроксимации выпуклых тел на начальном этапе// ЖВМ и МФ. 2008. Т. 48, № 5. С. 763–778.
6. *Мещерякова Е.А.* О двух задачах по оценке выпуклого компакта шаром // Математика. Механика: сб. науч. тр. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 2008. Вып. 10. С. 48–50.
7. *Дудов С.И., Мещерякова Е.А.* Об асферичности выпуклого компакта // Математика. Механика: сб.науч.тр. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 2009. Вып. 11. С. 24–27.
8. *Дудов С.И., Мещерякова Е.А.* О приближенном решении задачи об асферичности выпуклого компакта // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. 2010. Т. 10. Сер. Математика. Механика. Информатика, вып. 4. С. 13–17.
9. *Половинкин Е.С., Балашов М.В.* Элементы выпуклого и сильно выпуклого анализа. М.: Физматлит, 2004.

УДК 517.518.36

ПАРАМЕТРИЗАЦИЯ ДВУМЕРНЫХ НЕСЕПАРАБЕЛЬНЫХ ВСПЛЕСКОВ ХААРА

М.С. Красильникова

Воронежский государственный университет,
кафедра функционального анализа и операторных уравнений
E-mail: krasilnikovams@nm.ru

В работе получен общий вид ортогональных базисов всплесков, порожденных кратномасштабным анализом Хаара. Рассмотрены базисы, генерируемые тремя кусочно-постоянными (на четвертинках единичного квадрата) всплеск-функциями $\{\eta_i(x,y)\}$, где $i = 1, 2, 3$, имеющими носитель $[0,1] \times [0,1]$, со значениями $a_{ij} \in \mathbb{R}$, где $i = 1, 2, 3$ и $j = 1, 2, 3, 4$.

Ключевые слова: ортогональные базисы, всплески Хаара, кратномасштабный анализ.

Parametrization of Bivariate Nonseparable Haar Wavelets

M.S. Krasilnikova

Voronezh State University,
Chair of Functional Analysis and Operator Equations
E-mail: krasilnikovams@nm.ru

A parametrization of all orthogonal wavelet bases for Haar multiresolution analysis is derived. The bases generated by three piecewise constant wavelets $\{\eta_i(x,y)\}$, $i = 1, 2, 3$, supported on $[0,1] \times [0,1]$, with values $a_{ij} \in \mathbb{R}$, $i = 1, 2, 3$, $j = 1, 2, 3, 4$ are considered.

Key words: orthogonal bases, Haar wavelets, multiresolution analysis.

ВВЕДЕНИЕ

В настоящее время очень актуальным стало использование несепарабельных всплесков Хаара для сжатия неподвижных изображений. В связи с этим возникает необходимость иметь удобную параметризацию всех несепарабельных всплесков Хаара, так как это даст возможность для каждого изображения адаптивно быстро находить оптимальный всплеск (дающий максимально возможный коэффициент сжатия).

ОСНОВНАЯ ЧАСТЬ

Пусть M — фиксированная целочисленная матрица размера $d \times d$, все собственные числа которой по модулю больше единицы.

Определение 1 [1, с. 94]. Совокупность замкнутых подпространств $V_j \subset L_2(\mathbb{R}^d)$, $j \in \mathbb{Z}$ называется *кратномасштабным анализом* (КМА) в $L_2(\mathbb{R}^d)$ с матричным коэффициентом расширения M, если выполнены следующие условия: 1) $V_j \subset V_{j+1}$ для всех $j \in \mathbb{Z}$; 2) $\bigcup_{j\in\mathbb{Z}} V_j$ плотно в $L_2(\mathbb{R}^d)$; 3) $\bigcap_{j\in\mathbb{Z}} V_j = \{0\}$; 4) $f \in V_0 \Leftrightarrow f(M^j\cdot) \in V_j$ для всех $j \in \mathbb{Z}$; 5) существует функция $\varphi \in V_0$ такая, что последовательность $\{\varphi(\cdot+n)\}_{n\in\mathbb{Z}^d}$ образует базис Рисса в V_0. Функцию φ называют масштабирующей.