

# ИНФОРМАТИКА

УДК 519.713, 519.718.7

## АВТОМАТНАЯ ИНТЕРПРЕТАЦИЯ ЦЕЛОЧИСЛЕННЫХ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ

А.С. Епифанов

Саратовский государственный университет,  
кафедра дискретной математики и информационных технологий  
E-mail: epifanovas@list.ru

Преобразование фазовых картин в геометрические образы законов функционирования автоматов, предложенное и разработанное В.А. Твердохлебовым, позволило представлять фазовые картины едиными математическими структурами — ломаными линиями с числовыми координатами точек. В.А.Твердохлебовым показано, что последовательность элементов из конечного множества, совмещенная с линейным порядком на множестве входных слов, определяет законы функционирования дискретной детерминированной динамической системы (автомата). Это позволяет проводить анализ законов функционирования автоматов на основе исследования свойств числовых последовательностей, а также исследовать свойства числовых последовательностей на основе анализа свойств автоматов.

**Ключевые слова:** конечный детерминированный автомат, геометрический образ автомата, целочисленные последовательности.

**The Automata Interpretation of Integer Sequences**

A.S. Epifanov

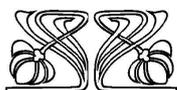
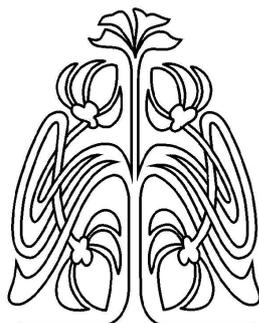
Saratov State University,  
Chair of Discrete Mathematic and Information Technologies  
E-mail: epifanovas@list.ru

Transformation of phase pictures to geometrical images of laws of functioning of state machines, offered and developed by V.A.Tverdokhlebov, has allowed to represent phase pictures by uniform mathematical structures — broken lines with numerical coordinates of points. V.A.Tverdokhlebov shows, that sequence of elements from the finite set, combined with linear order on set of input words, defines laws of functioning of the discrete determined dynamic system (state machine). It allows carry out the analysis of laws of functioning of state machines on the basis of research of properties of numerical sequences, and also it allows to research properties of numerical sequences by the analysis of properties of state machines.

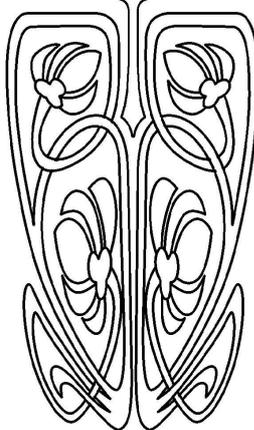
**Key words:** finite state machine, geometrical image of state machine, integer sequences.

### ВВЕДЕНИЕ

Методы решения задач управления, синтеза и анализа дискретных детерминированных динамических систем используют задание законов функционирования систем. В фазовых картинах систематизированы и представлены фазовые траектории, определяющие поведение систем. Большое разнообразие фазовых картин в работе [1] сведено к единой форме — символьным и числовым графикам, точки которых размещаются на геометрических кривых линиях. Это позволяет не только сводить фазовые картины к удобной стандартной форме, но и использовать для постановок и решения задач средства непрерывной математики. Существенной оказывается возможность доопределения фазовых картин, представленных частично заданными геометрическими образами, с использованием классических ме-



НАУЧНЫЙ  
ОТДЕЛ





тодов интерполяции. При задании автомата геометрическим образом соответствующее автоматное отображение преобразуется в точечный числовой график с точками, расположенными на геометрических кривых линиях (см. [1]). При таком задании законов функционирования автомата мощность множества состояний может быть бесконечной или, для удобства математических вычислений, полагаться бесконечной. В данной работе содержатся результаты исследований законов функционирования дискретных детерминированных динамических систем (автоматов), представленных в форме числовых последовательностей (последовательностей вторых координат точек геометрических образов) длиной до 1000000 знаков. Оценка сложности и классификация математических структур в форме последовательностей производится на основе спектра динамических параметров рекуррентного описания последовательностей.

Данная работа является продолжением работ [2–3], в которых осуществлены построение и анализ классов автоматов, законы функционирования которых заданы в форме числовых последовательностей, и содержат результаты более детального исследования 10-ти математических величин:  $\pi$ ,  $e$ ,  $\phi$  (так называемое золотое сечение),  $\sqrt{2}$ ,  $\sqrt[3]{2}$ ,  $\ln(2)$ ,  $\ln(10)$ ,  $\zeta(3)$ , константы Каталана и константы Эйлера. Исследуется зависимость числа состояний у минимального автомата, построенного по последовательности, от мощности входного алфавита автомата и способа доопределения функции переходов автомата.

## 1. ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ОБРАЗЫ ЗАКОНОВ ФУНКЦИОНИРОВАНИЯ АВТОМАТОВ

Преобразование символьной формы автоматной модели в числовую структуру (геометрический образ законов функционирования автомата) включает линейное упорядочивание автоматного отображения  $\rho_s = \bigcup_{p \in X^*} \{(p, \lambda(s, p))\}$  для инициального автомата  $A_s = (S, X, Y, \delta, \lambda, s)$ , где  $S$ ,  $X$  и  $Y$  — соответственно множества состояний, входных и выходных сигналов,  $\delta : S \times X \rightarrow S$  — функция переходов,  $\lambda : S \times X \rightarrow Y$  — функция выходов, а  $s \in S$  — начальное состояние автомата. Автоматное отображение  $\rho_s$  взаимнооднозначно преобразуется в автоматное отображение вида  $\rho'_s = \bigcup_{p \in X^*} \{(p, \lambda'(s, p))\}$ , где  $\lambda'(s, p)$  — последний знак последовательности  $\lambda(s, p)$ . После введения на множестве  $X^*$  линейного порядка  $\omega_1$  множество пар  $\rho_s$  оказывается линейно упорядоченным множеством  $(\rho_s, \omega_1)$ , которое при любом линейном порядке  $\omega_2$  на множестве  $Y$  становится графиком  $\gamma_s = (\rho_s, \omega_1, \omega_2)$  в системе координат с осью абсцисс  $(X^*, \omega_1)$  и осью ординат  $(Y, \omega_2)$ . Для преобразования множества пар  $\rho_s$  и  $\rho'_s$  в графики принципиально важным является задание линейного порядка  $\omega_1$  на множестве  $X^*$  (см., например, [1]).

Правило 1. На множестве  $X$  вводится линейный порядок  $\omega_1 (<_1)$ :  $x_1 <_1 x_2 <_1 \dots <_1 x_k$ .

Правило 2. Порядок  $\omega_1$  на  $X$  распространяется до линейного порядка на множестве  $X^*$ :

– для любых слов  $p_1, p_2 \in X^*$  неодинаковой длины  $|p_1| < |p_2| \rightarrow p_1 <_1 p_2$ ;

– для любых слов  $p_1, p_2 \in X^*$ , для которых  $|p_1| = |p_2|$  и  $p_1 \neq p_2$ , их отношение по порядку  $\omega_1$  повторяет отношение ближайших слева несовпадающих букв в словах  $p_1$  и  $p_2$ .

На множестве  $Y = \{y_1, y_2, \dots, y_l\}$  определяется некоторый линейный порядок  $\omega_2$ . Упорядоченные множества пар  $(\rho_s, \omega_1)$  и  $(\rho'_s, \omega_1)$  дополняются линейными порядками  $\omega_0$  на  $Y^*$  и  $\omega_2$  на  $Y$ . В результате получаем графики  $(\rho_s, \omega_1, \omega_0)$  и  $(\rho'_s, \omega_1, \omega_2)$ . Построенные графики размещены в системе координат с осью абсцисс  $(X^*, \omega_1)$  и осями ординат соответственно  $(Y^*, \omega_0)$  и  $(Y, \omega_2)$ . Замена элементов  $p \in X^*$ ,  $p = x_{i_1} x_{i_2} \dots x_{i_k}$ , и  $y \in Y$  в графике  $\gamma_s = (\rho'_s, \omega_1, \omega_2)$  их номерами  $r_1(p)$  по порядку  $\omega_1$  и  $r_2(y)$  по порядку  $\omega_2$  позволяет преобразовать символьный график  $\gamma_s$  в числовой график в системе координат с осью абсцисс  $N^+$  и осью ординат  $\{1, 2, \dots, l\}$ , где  $|Y| = l$ . Возможны и другие варианты линейных порядков на  $X^*$  (см., например, [1]).

В данной работе исследование законов функционирования автоматов проводится с использованием порядка  $\omega_1$ . Из геометрического образа  $\gamma_s$  автомата  $A_s$  выделяется последовательность вторых координат точек геометрического образа, которая взаимнооднозначно соответствует полному геометрическому образу (при выбранных множестве входных сигналов  $X$  и линейном порядке  $\omega_1$  на множестве входных слов  $X^*$ ). Произвольная последовательность элементов из конечного множества может рас-



смаивриваться как последовательность вторых координат точек геометрического образа и, следовательно, как задание законов функционирования автомата. Это позволяет некоторые свойства законов функционирования автомата представлять свойствами последовательностей.

## 2. СПЕКТР ДИНАМИЧЕСКИХ ПАРАМЕТРОВ РЕКУРРЕНТНОГО ОПРЕДЕЛЕНИЯ ЧИСЛОВЫХ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ

В работе [1] предложен спектр динамических параметров, характеризующих сложность правил порождения последовательности. Пусть  $U = \{u_1, u_2, \dots, u_k\}$  — конечное множество и  $\xi = \langle u(1), u(2), \dots, u(t), \dots \rangle$  — последовательность элементов из множества  $U$ :  $\xi = \langle u(1), u(2), \dots, u(t), \dots \rangle$ . Спектр  $\Omega = \langle \Omega_0, \Omega_1, \Omega_2, \Omega_3, \Omega_4 \rangle$  вводится как многоуровневая структура, в которой на каждом уровне представлены наборы характеристик использованных рекуррентных форм  $F_i^m(z_1, z_2, \dots, z_m) = z_{m+1}$ , где  $m$  — порядок рекуррентной формы,  $m=1, 2, \dots$ . Каждая рекуррентная форма  $F_i^m$ , с учетом отношения  $\xi \in U^*$ , описывается функцией  $f_i^m : U^* \rightarrow U$  и применяется для определения одного или нескольких отрезков в зависимости от структуры последовательности  $\xi$ . Исследования свойств спектров, соответствующих последовательностям, имеет общее значение для конструктивных объектов.

Определим понятие спектра.

**Определение 1.** Для любой последовательности  $\bar{\xi} \in U^v$  ( $|\bar{\xi}| = v$ ) наименьший порядок рекуррентной формы, определяющей последовательность  $\bar{\xi}$ , будем обозначать  $m_0(\bar{\xi})$ .

**Определение 2.** Для любой последовательности  $\bar{\xi} \in U^v$  и  $m \in N^+$ , где  $1 \leq m \leq m_0(\bar{\xi})$ , наибольшую длину начального отрезка последовательности  $\bar{\xi}$ , определяемого рекуррентной формой порядка  $m$ , будем обозначать  $d^m(\bar{\xi})$ .

**Определение 3.** Для любой последовательности  $\bar{\xi} \in U^v$  и  $m \in N^+$ , где  $1 \leq m \leq m_0(\bar{\xi})$ , число смен рекуррентных форм порядка  $m$ , требующихся при определении последовательности  $\bar{\xi}$ , будем обозначать  $r^m(\bar{\xi})$ .

**Определение 4.** Для любой последовательности  $\bar{\xi} \in U^v$  и  $m \in N^+$ , где  $1 \leq m \leq m_0(\bar{\xi})$  и  $j$ , где  $1 \leq j \leq r^m(\bar{\xi})$ , длину  $j$ -го отрезка в определении последовательности  $\bar{\xi}$  будем обозначать  $d_j^m(\bar{\xi})$ .

Используя введенные обозначения, определим спектр параметров, характеризующих последовательность, как следующую структуру:  $\Omega_0(\bar{\xi}) = \langle m_0(\bar{\xi}) \rangle$ ,  $\Omega_1(\bar{\xi}) = \langle d^1(\bar{\xi}), d^2(\bar{\xi}), \dots, d^\alpha(\bar{\xi}) \rangle$ ,  $\Omega_2(\bar{\xi}) = \langle r^1(\bar{\xi}), r^2(\bar{\xi}), \dots, r^\alpha(\bar{\xi}) \rangle$ ,  $\Omega_3(\bar{\xi}) = \langle \Omega_3^1(\bar{\xi}), \Omega_3^2(\bar{\xi}), \dots, \Omega_3^\alpha(\bar{\xi}) \rangle$ , где  $\alpha = m_0(\bar{\xi})$  и  $\Omega_3^m(\bar{\xi}) = \langle d_1^m(\bar{\xi}), d_2^m(\bar{\xi}), \dots, d_{n_m}^m(\bar{\xi}) \rangle$  ( $n_m$  — номер последнего отрезка в определении последовательности  $\bar{\xi}$  как последовательности отрезков, определяемых отдельными рекуррентными формами порядка  $m$ ). Формально  $\Omega_4(\bar{\xi}) = \Theta(\Omega_3(\bar{\xi}))$ , где  $\Theta$  — оператор замены в  $\Omega_3(\bar{\xi})$  величин длин отрезков весами использованных рекуррентных форм для определения отрезков. В качестве примера в табл. 1 приведены числовые показатели на уровнях  $\Omega_0$ – $\Omega_3$  спектра  $\Omega$  для последовательности  $\xi = \langle 3, 1, 4, 1, 5, 9, 2, 6, 5, 3, 5, 8, 9, 7, 9, 3, 2, 3, 8, 4, 6, 2, 6, 4, 3, 3, 8, 3, 2, 7, 9, 5, 0, 2, 8, 8, 4, 1, 9, 7, 1, 6, 9, 3, 9, 9, 3, 7, 5, 1 \rangle$  длины 50-ти знаков, задающей приближение числа  $\pi$ .

Таблица 1

Числовые показатели на уровнях  $\Omega_0$ – $\Omega_3$  спектра  $\Omega$  для последовательности длины 50-ти знаков, задающей приближение числа  $\pi$

Уровни спектра	Числовые показатели спектра
$\Omega_0$	$\langle m_0(\xi) = 3 \rangle$
$\Omega_1$	$\langle d^1(\xi) = 4, d^2(\xi) = 23, d^3(\xi) = 50 \rangle$
$\Omega_2$	$\langle r^1(\xi) = 14, r^2(\xi) = 3, r^3(\xi) = 1 \rangle$
$\Omega_3$	$\langle \Omega_3^1(\xi) = \langle d_1^1(\xi) = 3, d_2^1(\xi) = 5, d_3^1(\xi) = 2, d_4^1(\xi) = 4, d_5^1(\xi) = 3, d_6^1(\xi) = 5, d_7^1(\xi) = 3, d_8^1(\xi) = 2, d_9^1(\xi) = 6, d_{10}^1(\xi) = 2, d_{11}^1(\xi) = 5, d_{12}^1(\xi) = 4, d_{13}^1(\xi) = 1, d_{14}^1(\xi) = 4 \rangle, \Omega_3^2(\xi) = \langle d_1^2(\xi) = 21, d_2^2(\xi) = 24, d_3^2(\xi) = 3 \rangle, \Omega_3^3(\xi) = \langle d_1^3(\xi) = 47 \rangle \rangle$



### 3. ПОСТРОЕНИЕ И АНАЛИЗ КЛАССОВ $(H, M, D(H))$ -АВТОМАТОВ

В работе [1] предложены и разработаны методы синтеза автомата по последовательностям и геометрическим кривым. Последовательность элементов из конечного множества, совмещенная с линейным порядком на множестве входных слов, определяет законы функционирования дискретной детерминированной динамической системы (автомата). В.А. Твердохлебовым предложен новый тип автомата —  $(H, m, d(H))$ -автомат. Законы функционирования данного типа автомата задаются числовой последовательностью  $H$ , которая полагается последовательностью вторых координат точек геометрического образа. Рассматривается начальный отрезок длины  $d(H)$  последовательности  $H$ . Величина  $m$  — мощность входного алфавита автомата, количество выходных сигналов определяется спецификой начального отрезка последовательности  $H$  длины  $d(H)$  (число различных значений элементов в начальном отрезке длины  $d(H)$ ).

В данной работе содержатся результаты по построению и анализу конечных детерминированных автоматов, законы функционирования которых определены начальными отрезками геометрических образов и выбором числа входных сигналов автомата. Для этого из банка последовательностей [5] извлечены 12 последовательностей длины 1000000 знаков, задающих приближения следующих математических величин:  $\pi$ ,  $e$ ,  $\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$  (так называемое золотое сечение),  $\sqrt{2}$ ,  $\sqrt[3]{2}$ ,  $\ln(2)$ ,  $\ln(10)$ ,  $\zeta(3) = \sum_{x=1}^{\infty} (\frac{1}{x^3})$ , константы Каталана  $C = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^2}$ , константы Эйлера  $\gamma = \lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} - \log(n))$ ,  $\chi_F$  (характеристическая последовательность для чисел Фибоначчи) и  $\chi_P$  (характеристическая последовательность для простых чисел). Каждая последовательность представлена набором начальных отрезков, имеющих длины  $d_k$  знаков, где  $d_k = 10000 \cdot k$ ,  $k = 1, 2, \dots, 100$ . Полученное множество из 1200 последовательностей рассматривается как множество начальных отрезков последовательностей вторых координат точек геометрических образов законов функционирования автоматов. Соответствующие последовательности первых координат точек геометрического образа определялись вариантами выбора числа входных сигналов автомата и линейным порядком  $\omega_1$  на множестве входных последовательностей. Рассматриваются множества входных сигналов, содержащие 2, 5, 10, 20, 50, 100, 200, 500, 1000 и 2000 элементов. Подробное описание метода синтеза автомата по последовательности, а также метода проверки эквивалентности состояний автомата по геометрическому образу содержится в монографии [1]. Отметим принципиальные моменты метода синтеза автомата по последовательности. Если в качестве задания законов функционирования автомата рассматривается последовательность  $\xi = \langle u(1), u(2), \dots, u(t), \dots \rangle$ , то в ее интерпретацию включается разбиение последовательности  $\xi$  на отрезки длины  $m$ , где  $m = |X|$ . Каждый отрезок при таком разбиении определяет функционирование автомата для конкретного состояния памяти. Если множеством состояний автомата полагать множество  $S = \{s_p\}_{p \in X^*}$ , а функцию переходов  $\delta$  определить правилами  $s_0 = s_\varepsilon$  и  $\delta(s_p, x) = s_{px}$ , то функция  $\delta$  оказывается стандартной для всех автоматов с множеством входных сигналов  $X$ . Специфика автоматов проявляется в том, что на бесконечном (счетном) множестве состояний для каждого автомата выделяются классы эквивалентных состояний. Существенным при синтезе законов функционирования автомата является способ доопределения функции переходов  $\delta$  автомата. Возможно циклическое доопределение, доопределение в начальное состояние, генерация состояния псевдослучайным образом (из множества возможных состояний). В случае, когда  $\frac{d(H)}{|X|} \neq \lfloor \frac{d(H)}{|X|} \rfloor$ , где  $|X|$  — мощность входного алфавита автомата, а  $d(H)$  — длина начального отрезка последовательности  $H$  (по которой строятся законы функционирования автомата), доопределение требуется и для функции выходов  $\lambda$ .

В данной работе доопределение функции переходов осуществляется всеми указанными способами, а значение мощности входного алфавита и длины начальных отрезков последовательностей выбраны таким образом, что  $\frac{d(H)}{|X|} = \lfloor \frac{d(H)}{|X|} \rfloor$ , поэтому доопределение функции  $\lambda$  не требуется. Рассматриваемое множество из 1200 последовательностей при десяти различных значениях мощности входного алфавита и трех способах доопределения функции переходов сопоставляется с классом автоматов, состоящем из 36000 элементов. Далее осуществляется минимизация автоматов из построенного класса и разбиение на подклассы автоматов по числу состояний в автоматах после минимизации. Для построения семейства автоматов по заданной последовательности при различных значениях мощности входного алфавита, минимизации построенных автоматов по числу состояний на основе уже существующих



методов разработаны соответствующие алгоритмы, составлены и отлажены программы, реализующие данные алгоритмы. В результате получен программный комплекс, позволяющий по заданному в файле массиву последовательностей осуществлять построение семейств автоматов, минимизацию автоматов по числу состояний и классификацию по сложности на основе числа состояний в минимальном автомате, построенном по последовательности. В программном комплексе реализовано три указанных выше способа доопределения функции переходов автомата. В качестве примера в табл. 2 приведены табличные задания функций переходов и выходов автомата, построенного по начальному отрезку длины 60 числа  $\pi$ . В данном примере использовано циклическое доопределение функции переходов автомата, а значение мощности входного алфавита равно 5. В результате анализа класса  $\pi$ -автоматов, т. е. класса автоматов, построенных по последовательностям, задающим приближение фундаментальной математической величины  $\pi$  длины  $d_k$  знаков, где  $d_k = 10000 \cdot k$ ,  $k=1,2, \dots, 100$ , при рассмотрении различных вариантов мощности входного алфавита ( $|X| = 2, 5, 10, 20, 50, 100, 200, 500, 1000, 2000$ ) отмечено, что при некоторых из указанных способах доопределения функции переходов уменьшается число состояний у автоматов после минимизации.

Таблица 2

Табличное задание функций переходов  $\delta$  и выходов  $\lambda$  ( $\pi, 5, 60$ )-автомата

$\delta$	$s_0$	$s_1$	$s_2$	$s_3$	$s_4$	$s_5$	$s_6$	$s_7$	$s_8$	$s_9$	$s_{10}$	$s_{11}$
$x_1$	$s_1$	$s_6$	$s_{11}$	$s_4$	$s_9$	$s_2$	$s_7$	$s_0$	$s_5$	$s_{10}$	$s_3$	$s_8$
$x_2$	$s_2$	$s_7$	$s_0$	$s_5$	$s_{10}$	$s_3$	$s_8$	$s_1$	$s_6$	$s_{11}$	$s_4$	$s_9$
$x_3$	$s_3$	$s_8$	$s_1$	$s_6$	$s_{11}$	$s_4$	$s_9$	$s_2$	$s_7$	$s_0$	$s_5$	$s_{10}$
$x_4$	$s_4$	$s_9$	$s_2$	$s_7$	$s_0$	$s_5$	$s_{10}$	$s_3$	$s_8$	$s_1$	$s_6$	$s_{11}$
$x_5$	$s_5$	$s_{10}$	$s_3$	$s_8$	$s_1$	$s_6$	$s_{11}$	$s_4$	$s_9$	$s_2$	$s_7$	$s_0$

$\lambda$	$s_0$	$s_1$	$s_2$	$s_3$	$s_4$	$s_5$	$s_6$	$s_7$	$s_8$	$s_9$	$s_{10}$	$s_{11}$
$x_1$	$y_3$	$y_9$	$y_5$	$y_3$	$y_6$	$y_3$	$y_9$	$y_8$	$y_1$	$y_9$	$y_0$	$y_9$
$x_2$	$y_1$	$y_2$	$y_8$	$y_2$	$y_2$	$y_8$	$y_5$	$y_4$	$y_6$	$y_3$	$y_5$	$y_7$
$x_3$	$y_4$	$y_6$	$y_9$	$y_3$	$y_6$	$y_3$	$y_0$	$y_1$	$y_9$	$y_7$	$y_8$	$y_4$
$x_4$	$y_1$	$y_5$	$y_7$	$y_8$	$y_4$	$y_2$	$y_2$	$y_9$	$y_3$	$y_5$	$y_2$	$y_9$
$x_5$	$y_5$	$y_3$	$y_9$	$y_4$	$y_3$	$y_7$	$y_8$	$y_7$	$y_9$	$y_1$	$y_0$	$y_4$

При доопределении в начальное состояние из 3000 построенных  $\pi$ -автоматов менее чем у 100 автоматов после минимизации число состояний уменьшилось. Например, у ( $\pi, 2, 10000$ )-автомата, ( $\pi, 2, 50000$ )-автомата и ( $\pi, 2, 100000$ )-автомата число состояний после минимизации сокращается почти в 2 раза. У всех построенных  $\pi$ -автоматов при доопределении функции переходов на основе использования генератора случайных чисел (состояний выбирается из множества возможных состояний случайным образом) число классов эквивалентности совпадает с числом состояний, т. е. автоматы являются минимальными по числу состояний. Используемый аппарат геометрических образов автоматов позволяет рассматривать с автоматной интерпретацией как сами классические последовательности чисел Фибоначчи (и другие так называемые возвратные последовательности) и простых чисел, так и их характеристические последовательности. Автором статьи на основе автоматной интерпретации проведен анализ как самих классических последовательностей чисел Фибоначчи и простых чисел, так и их характеристических последовательностей. При построении автоматов по самим классическим последовательностям отмечено, что такие автоматы являются минимальными по числу состояний (при анализируемых значениях мощности входного алфавита и рассмотренных начальных отрезках таких последовательностей). Кроме того, характеристики данных последовательностей по спектру  $\Omega$  (на рассмотренных в работе первых четырех уровнях  $\Omega_0 - \Omega_3$ ) также являются «тривиальными» (так как формально для определения рекуррентной формой последовательности, в которой все элементы различны (например, последовательности простых чисел), достаточно порядка рекуррентной формы, равного единице, а характеристики на первом, втором и третьем уровнях спектра «вырождаются» из наборов чисел в одно число на каждом уровне). Ввиду ограничений на объем статьи приводятся результаты исследования не самих классических последовательностей, а только характеристических последовательностей (как более интересных, по мнению автора, с точки зрения полученных результа-



тов их анализа). Проведенный анализ класса  $(\chi_F, m, d(\chi_F))$ -автоматов, где  $\chi_F$  — характеристическая последовательность чисел Фибоначчи, показал, что и при циклическом доопределении функции переходов, и при доопределении в начальное состояние, а также и при доопределении функции переходов на основе использования генератора случайных чисел возможно уменьшение числа состояний у автомата после минимизации. Например, при доопределении в начальное состояние у  $(\chi_F, 2, 10000)$ ,  $(\chi_F, 2, 20000)$ ,  $(\chi_F, 2, 30000)$ ,  $(\chi_F, 2, 40000)$ ,  $(\chi_F, 2, 50000)$  и  $(\chi_F, 2, 100000)$ -автоматов после минимизации число состояний уменьшается более чем в 60 раз. Кроме того, проведено дополнительное исследование автоматов из класса  $(\chi_P, m, d(\chi_P))$ -автоматов, где  $\chi_P$  — характеристическая последовательность простых чисел при значениях  $d(\chi_P) \leq 100$  и циклическом доопределении функции переходов.

Отмечены следующие свойства:  $(\chi_P, 2, 60)$ -автомат после минимизации имеет 19 состояний (число состояний до минимизации 30),  $(\chi_P, 2, 70)$ -автомат после минимизации имеет 35 состояний (число состояний не уменьшилось после минимизации),  $(\chi_P, 2, 80)$ -автомат после минимизации имеет 31 состояние (число состояний до минимизации 40),  $(\chi_P, 2, 90)$ -автомат после минимизации имеет 45 состояний (число состояний не уменьшилось после минимизации),  $(\chi_P, 2, 100)$ -автомат после минимизации имеет 38 состояний (число состояний до минимизации 50). Аналогичное свойство отмечено при построении автоматов (при циклическом доопределении функции переходов) по характеристической последовательности чисел Фибоначчи при  $d(\chi_F) \leq 100$ . На основе этих данных выдвигается гипотеза, что в случаях  $d(\chi_P) \leq 100$ , когда при построении автомата используется циклическое доопределение функции переходов и величина  $\frac{d(\chi_P)}{m}$  является четным числом, после минимизации число состояний у автомата уменьшается, если же  $\frac{d(\chi_P)}{m}$  является нечетным числом, то число состояний после минимизации не уменьшается.

#### 4. ОЦЕНКА СЛОЖНОСТИ И КЛАССИФИКАЦИЯ ЗАКОНОВ ФУНКЦИОНИРОВАНИЯ $(H, M, D(H))$ -АВТОМАТОВ

В данной работе на основе использования аппарата геометрических образов автоматов и спектра динамических параметров, предложенных и разработанных В.А. Твердохлебовым [1], осуществляется оценка сложности и классификация законов функционирования дискретных детерминированных динамических систем (автоматов). Сравнение по сложности таких автоматов может быть сделано на основе сравнения математических структур, представляющих специфику законов функционирования автомата. В качестве таких структур могут быть использованы геометрические образы законов функционирования автоматов. Геометрический образ построен на основе, во-первых, линейного упорядочивания элементов автоматного отображения, а во-вторых, извлечения из линейно упорядоченного автоматного отображения последовательности вторых координат точек [1]. Сравнение по сложности законов функционирования автоматов производится на основе сравнения спектров последовательностей. На основании того, что на структуру характеристических последовательностей ограничения не накладываются и она может быть любой последовательностью элементов из конечного множества, метод сравнения моделей по сложности допускает интерпретацию на любых, в частности, числовых последовательностях. Уровни спектра построены иерархически по добавлению в спектр новых параметров. В связи с этим эквивалентность последовательностей представляется через  $t$ -эквивалентности, определяемые уровнем  $\Omega_t, 0 \leq t \leq 3$ .

В результате вычисления и анализа спектров для рассматриваемых математических последовательностей построены классы эквивалентных по сложности последовательностей и соответствующие им классы эквивалентных по сложности законов функционирования автоматов. Например, среди классов  $(\pi, m, 1000)$ -автоматов,  $(e, m, 1000)$ -автоматов,  $(\chi_P, m, 1000)$ -автоматов и  $(\chi_F, m, 1000)$ -автоматов с точки зрения используемого спектра  $\Omega$  самым сложным оказался класс  $(\chi_F, m, 1000)$ -автоматов, а самым простым класс  $(\pi, m, 1000)$ -автоматов. При этом на нулевом уровне  $\Omega_0$  спектра  $\Omega$  отмечена следующая специфика: в классе  $(\pi, m, 1000)$ -автоматов значение  $\Omega_0 = \langle 6 \rangle$ , в классе  $(e, m, 1000)$ -автоматов  $\Omega_0 = \langle 7 \rangle$ , в классе  $(\chi_P, m, 1000)$ -автоматов  $\Omega_0 = \langle 60 \rangle$ , а в классе  $(\chi_F, m, 1000)$ -автоматов  $\Omega_0 = \langle 377 \rangle$ . Также отмечено, что при увеличении параметра  $d(H)$  в классах  $(\pi, m, d(\pi))$ -автоматов и  $(e, m, d(e))$ -автоматов от 1000 до 10000 сложность с точки зрения спектра динамических параметров существенно не увеличивается, кроме того, и в классе  $(\pi, m, 10000)$ -автоматов  $\Omega_0 = \langle 8 \rangle$ , и в классе  $(e, m, 10000)$ -автоматов  $\Omega_0 = \langle 8 \rangle$ , т. е. при таком значении величины  $d(H)$  данные клас-



сы автоматов имеют одинаковую сложность. Подробное описание проведенного исследования всех 150000 целочисленных последовательностей из банка [5] содержится в монографии [2].

## ВЫВОДЫ

Использование геометрических образов позволяет сопоставлять последовательности (а соответственно и той величине, приближение которой она задает) дискретную детерминированную динамическую систему (автомат) и изучать свойства последовательностей, а также объектов, процессов и явлений, представленных в виде последовательностей, на основе анализа свойств автоматов.

В работе построены и проанализированы классы автоматов, законы функционирования которых представлены в форме последовательностей из банка целочисленных последовательностей [5]. Проведена оценка сложности последовательностей на основе числа состояний в минимальном автомате, построенном по последовательности. Для рассматриваемых последовательностей построены и проанализированы спектры числовых показателей. На основе совпадения показателей на соответствующих уровнях спектра проведена оценка сложности и классификация последовательностей (и соответствующих им законов функционирования автоматов).

## Библиографический список

1. Твердохлебов, В.А. Геометрические образы законов функционирования автоматов / В.А. Твердохлебов. – Саратов, 2008. – 183 с.
2. Епифанов, А.С. Анализ фазовых картин дискретных динамических систем / А.С. Епифанов. – Саратов, 2008. – 156 с.
3. Епифанов, А.С. Анализ геометрических образов законов функционирования автоматов / А.С. Епифанов // Управление большими системами. – 2009. – Вып. 24. – С. 81–98.
4. Епифанов, А.С. Построение и анализ классов  $(H, m, d(H))$ -автоматов / А.С. Епифанов // Управление большими системами: V Всерос. школа-семинар молодых ученых. – Липецк, 2008. – С. 23–30.
5. The On-Line Encyclopedia of Integer Sequences [Электронный ресурс]. URL: [www.research.att.com](http://www.research.att.com) (дата обращения: 11.09.2010).