Библиографический список

1. *Гахов Ф.Д.* Краевые задачи. М.: Наука, 1977. 640 с.
2. *Расулов К.М.* Краевые задачи для полианалитических функций и некоторые их приложения. Смоленск: Изд-во СГПУ, 1998. 344 с.
3. *Анищенкова Н.Г.* Трехэлементные краевые задачи типа Римана для бианалитических функций: Дис. . . . канд. физ.-мат. наук. Смоленск, 2002. 120 с.
4. *Анищенкова Н.Г., Зверович Э.И., Расулов К.М.* О решении обобщенной краевой задачи типа Римана для бианалитических функций в круге // Докл. НАН Беларуси. 2002. Т. 45, № 6. С. 22–25.
5. *Медведев Ю.А.* Четырехэлементные краевые задачи типа задачи Римана в классах бианалитических функций: Дис. . . . канд. физ.-мат. наук. Смоленск, 2007. 115 с.
6. *Медведев Ю.А., Расулов К.М.* О решении первой четырехэлементной краевой задачи типа Римана для бианалитических функций в случае окружности // Исследования по краевым задачам комплексного анализа и дифференциальным уравнениям. Смоленск: Изд-во Смоленск. ун-та, 2005. Вып. 6. С. 83–93.
7. *Векуа Н.П.* Системы сингулярных интегральных уравнений. М.: Наука, 1970. 379 с.
8. *Литвинчук Г.С.* Краевые задачи и сингулярные интегральные уравнения со сдвигом. М.: Наука, 1977. 448 с.

УДК 517.5

О НЕСЕПАРАБЕЛЬНЫХ ВСПЛЕСК-ФУНКЦИЯХ ТИПА МЕЙЕРА В ПРОСТРАНСТВАХ БЕСОВА И ЛИЗОРКИНА – ТРИБЕЛЯ

С.А. Гарьковская

Воронежский государственный университет,
кафедра функционального анализа и операторных уравнений
E-mail: GarkovskayaSA@mail.ru

Статья посвящена доказательству возможности использования несепарабельных всплеск-функций типа Мейера в качестве разбиения единицы в определении шкал пространств Бесова и Лизоркина – Трибеля. Этот результат является первым шагом в доказательстве безусловной базисности вышеназванных всплеск-функций в рассматриваемых шкалах.

Ключевые слова: всплеск, несепарабельные всплески, пространства Бесова, пространства Лизоркина – Трибеля, разбиение единицы.

Nonseparable Wavelets of Meyer Type in Besov and Lizorkin – – Triebel Spaces

S.A. Garkovskaya

Voronezh State University,
Chair of Functional Analysis and Operator Equations
E-mail: GarkovskayaSA@mail.ru

It is proved that Fourier transforms of nonseparable wavelets of Meyer type can be used as decomposition of unity in definition of Besov and Lizorkin – Triebel spaces. The result is the first step in the proof of unconditional basisness of above mentioned wavelets in scales under consideration.

Key words: wavelet, nonseparable wavelets, Besov spaces, Lizorkin – Triebel spaces, decomposition of unity.

1. ОСНОВНЫЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ И ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Определение 1 [1, с. 93]. Совокупность замкнутых пространств $V_j \subset L_2(\mathbb{R}^n)$, $j \in \mathbb{Z}$, называется *кратномасштабным анализом* в $L_2(\mathbb{R}^n)$ с матричным коэффициентом расширения M, если выполнены следующие условия (аксиомы):

MR1. $V_j \subset V_{j+1}$ для всех $j \in \mathbb{Z}$;

MR2. $\bigcup\limits_{j\in\mathbb{Z}} V_j$ плотно в $L_2(\mathbb{Z})$;

MR3. $\bigcap\limits_{j\in\mathbb{Z}} V_j = \{0\}$;

MR4. $f \in V_0 \iff f\left(M^j \cdot\right) \in V_j$ для всех $j \in \mathbb{Z}$;

MR5. существует функция $\varphi \in V_0$, такая что последовательность $\{\varphi(\cdot + n)\}_{n\in\mathbb{Z}}$ образует базис Рисса в V_0.

Функция φ называется *масштабирующей*. Если масштабирующая функция некоторого кратномасштабного анализа не является тензорным произведением функций одной переменной, то такой кратномасштабный анализ называют *несепарабельным*.

Построение всплеск-функций, соответствующих кратномасштабному анализу $\{V_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$, подробно описано в работе [1, с. 120]. Всплеск-функции для несепарабельного кратномасштабного анализа в дальнейшем будем называть *несепарабельными всплеск-функциями*.

В данной работе рассматривается семейство несепарабельных всплеск-функций типа Мейера, построенное в работе [2]. Доказана возможность использования преобразований Фурье функций этого семейства в качестве обобщенного разбиения единицы в определении шкал пространств Бесова и Лизоркина – Трибеля. Этот результат является первым шагом в доказательстве безусловной базисности вышеназванных всплесков в рассматриваемых шкалах. На наш взгляд, он имеет и самостоятельный интерес. Базисность сепарабельных всплесков, построенных на основе всплесков Мейера – Давида, изучена в работе [1, с. 498]. Базисность несепарабельных всплесков в шкале пространств Бесова рассмотрена в работе [3]. Базисность несепарабельных всплесков в шкале пространств Лизоркина – Трибеля, насколько известно автору, исследуется впервые.

Напомним определение пространств Бесова и Лизоркина – Трибеля [4, с. 57].

Пусть $S(\mathbb{R}^n)$ — пространство Шварца комплекснозначных быстроубывающих бесконечно дифференцируемых функций на $\mathbb{R}^n$, $S'(\mathbb{R}^n)$ — множество всех умеренных распределений на $\mathbb{R}^n$.

Определение 2. Обозначим через $\Sigma(\mathbb{R}^n)$ совокупность всех систем $\sigma=\{\sigma_j(x)\}_{j=0}^{\infty}\subset S(\mathbb{R}^n)$, таких что:

(i) $\operatorname{supp}\sigma_0\subset\{x\in\mathbb{R}^n|\ |x|\leqslant 2\}$, $\quad\operatorname{supp}\sigma_j\subset\{x\in\mathbb{R}^n|\ 2^{j-1}\leqslant|x|\leqslant 2^{j+1}\}$, $\quad j=1,2,3,\ldots$;

(ii) для каждого мультииндекса α существует положительное число c_α, при котором $2^{j|\alpha|}|D^\alpha\sigma_j(x)|\leqslant c_\alpha$ для всех $j=1,2,3,\ldots$ и всех $x\in\mathbb{R}^n$, где $|\alpha|=\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n$;

(iii) $\sum\limits_{j=0}^{\infty}\sigma_j(x)=1$ для каждого $x\in\mathbb{R}^n$.

Определение 3. Пусть $-\infty<s<\infty$, $0<q\leqslant\infty$ и $\sigma=\{\sigma_j(x)\}_{j=0}^{\infty}\in\Sigma(\mathbb{R}^n)$.

(i) Если $0<p\leqslant\infty$, то *пространства Бесова* $B^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)$ определяются следующим образом:

$$B^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)=\Big\{f|\ f\in S'(\mathbb{R}^n),\ \|f|B^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)\|=\|2^{sj}F^{-1}\sigma_jFf|l_q(L_p(\mathbb{R}^n))\|=$$
$$=\Big(\sum_{k=0}^{\infty}\Big(\int\limits_{\mathbb{R}^n}|2^{sj}F^{-1}\sigma_jFf(x)|^p dx\Big)^{\frac{q}{p}}\Big)^{\frac{1}{q}}<\infty\Big\}$$

с естественным видоизменением при $q=\infty$.

(ii) Пусть $0<p<\infty$. *Пространства Лизоркина – Трибеля* $F^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)$ определяются следующим образом:

$$F^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)=\Big\{f|\ f\in S'(\mathbb{R}^n),\ \|f|F^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)\|=\|2^{sj}F^{-1}\sigma_jFf|L_p(\mathbb{R}^n,l_p)\|=$$
$$=\Big(\int\limits_{\mathbb{R}^n}\Big(\sum_{k=0}^{\infty}|2^{sj}F^{-1}\sigma_jFf(x)|^q\Big)^{\frac{p}{q}}dx\Big)^{\frac{1}{p}}<\infty\Big\}.$$

с естественным видоизменением при $q=\infty$.

Доказательство основной теоремы основано на использовании известных результатов о мультипликаторах [1, предлож. 11.4.7; 4, теорема 1.6.3].

Будем использовать обозначение $A(t)\ll B(t)$ в случае, когда $A(t)\leqslant cB(t)$, где c — константа, не зависящая от t.

Предложение 1. *Пусть $0<p<\infty$, $0<q\leqslant\infty$, $\{f_k(x)\}_{k=0}^{\infty}$ — последовательность целых функций экспоненциального типа $\mu_k=(\mu_{k1},\ldots,\mu_{kn})$. Тогда при $\varkappa>\frac{n}{2}+\frac{n}{\min(p,q)}$ для любой системы функций $M_k(\xi)$, $\xi\in\mathbb{R}^n$, $M_k\in H_2^{\varkappa}$, $k=0,1,2,\ldots$,*

$$\|\{F^{-1}(M_kFf_k)\}_{k=0}^{\infty},\ L_p(l_q)\|\ll\|\{M_l(\mu_{l1}\xi_1,\ldots,\mu_{ln}\xi_n)\}_{l=0}^{\infty},\ l_\infty(H_2^{\varkappa})\|\cdot\|\{f_k\}_{k=0}^{\infty},\ L_p(l_q)\|,$$

где $H_2^{\varkappa}$ — пространство бесселевых потенциалов, а константа не зависит от f_k и M_k.

Предложение 2. *Пусть $0<p\leqslant\infty$, $\Omega=B_b=\{y|\ y\leqslant b\}$, $b>0$. Тогда*

$$\|F^{-1}MFf|L_p\|\leqslant c\|M(b\cdot)|H_2^{\varkappa}\|\|f|L_p\|,$$

где c не зависит от b, $f \in L_p^\Omega$, $L_p^\Omega = \{f|\ f \in S'(\mathbb{R}^n),\ \operatorname{supp} fF \subset \Omega,\ \|f|L_p\| < \infty\}$, $M(x) \in H_2^\varkappa$, $\varkappa > \frac{n}{\min(p,1)} - \frac{n}{2}$.

Пусть $n = 2$, $M := \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$. Рассмотрим семейство несепарабельных всплеск-функций типа Мейера, соответствующих матрице M. Построение этого семейства всплеск-функций описано в работе [2]. Согласно [2], несепарабельные всплеск-функции типа Мейера могут быть построены для любой матрицы размерности 2×2 с определителем, равным ± 2. Для удобства читателя напомним основные этапы построения.

Полагаем $g:\ \mathbb{R} \to [0,\infty)$ — бесконечно дифференцируемая функция, такая что $\operatorname{supp} g := \{\eta \in \mathbb{R} : g(\eta) \neq 0\} = (-\infty, 1/4)$, $\nu_1 = (\frac{3}{8}, \frac{1}{2})$, $\nu_2 = (\frac{3}{8}, -\frac{1}{2})$, $\nu_3 = (-\frac{3}{8}, \frac{1}{2})$, $\nu_4 = (-\frac{3}{8}, -\frac{1}{2})$. Определим бесконечно дифференцируемую функцию $h : \mathbb{R}^2 \to [0,\infty)$ формулой $h(\xi) := \prod\limits_{j=1}^{4} g(\langle \xi, \nu_j \rangle)$, где $\xi = (\xi_1, \xi_2) \in \mathbb{R}^2$.

Обозначим через $\operatorname{conv} X$ выпуклую линейную оболочку множества $X \subset \mathbb{R}^2$ и через X^o — внутренность множества X. Очевидно, $\operatorname{supp} h = (\operatorname{conv}\{(\pm 2/3, 0), (0, \pm 1/2)\})^o$.

Пусть f — $\mathbb{Z}^2$-периодическая функция, задаваемая выражением $f(\xi) := \sum\limits_{k \in \mathbb{Z}^2} h(\xi + k)$ для $\xi \in \mathbb{R}^2$.

Маска (определение маски см. [1, с. 94]) задается формулой

$$m_0(\xi) := \sqrt{f(\xi)/(f(\xi) + f(\xi + (1/2, 1/2)))}.$$

Заметим, что $m_0 \in C^\infty$ — $\mathbb{Z}^2$-периодическая функция, удовлетворяющая условиям $|m_0(\xi)|^2 + |m_0(\xi + (1/2, 1/2))|^2 = 1$, для всех $\xi \in \mathbb{R}^2$, $m_0(0) = 1$.

Полагаем $\widehat{\varphi}(\xi) := \prod\limits_{j=0}^{\infty} m_0((M^*)^{-j}\xi)$, где M^* — матрица, сопряженная с матрицей M. Тогда функция φ является масштабирующей функцией для кратномасштабного анализа $\{V_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$, соответствующего матрице M.

Преобразование Фурье всплеск-функции типа Мейера определяется формулой

$$\widehat{\psi}(\xi) := m_0((M^*)^{-1}\xi + (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}))e^{\pi i(\xi_1+\xi_2)}\widehat{\varphi}((M^*)^{-1}\xi) \quad \text{для} \quad \xi = (\xi_1, \xi_2) \in \mathbb{R}^2.$$

Функции $\widehat{\varphi}$ и $\widehat{\psi}$ имеют компактные носители. Из построения следует, что $\operatorname{supp}\widehat{\varphi} \subset [-1;1]^2$, $\operatorname{supp}\widehat{\psi} \subset \left[-\frac{3}{2}; \frac{3}{2}\right]^2$, $\operatorname{supp}\widehat{\psi}((M^*)^{-(j-1)}\cdot) \subset \left[-3 \cdot 2^{\frac{j+1}{2}}; 3 \cdot 2^{\frac{j+1}{2}}\right]^2$.

2. ОСНОВНОЙ РЕЗУЛЬТАТ

Теорема 1. *Полагаем* $\varphi,\ \psi \in L_2(\mathbb{R}^2)$ *— масштабирующая функция типа Мейера и всплеск-функция типа Мейера, соответствующие матрице* $M = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, $\nu = \{\nu_j(\xi)\}_{j=0}^\infty$, $\nu_0(\xi) = \widehat{\varphi}(\xi)$, $\nu_j(\xi) = \widehat{\psi}((M^*)^{-(j-1)}\xi)$ *при* $j = 1, 2, 3, \ldots$

(i). Пусть $-\infty < s < \infty$, $1 < q \leqslant \infty$, $1 < p \leqslant \infty$. *Тогда* $\|f|B_{p,q}^s(\mathbb{R}^2)\|^\nu = \|2^{sj}F^{-1}\nu_j Ff|l_q(L_p(\mathbb{R}^2))\|$ *является эквивалентной нормой в* $B_{p,q}^s(\mathbb{R}^2)$.

(ii). Пусть $-\infty < s < \infty$, $1 < q \leqslant \infty$, $1 < p < \infty$. *Тогда* $\|f|F_{p,q}^s(\mathbb{R}^2)\|^\nu = \|2^{sj}F^{-1}\nu_j Ff|L_p(l_q, \mathbb{R}^2)\|$ *является эквивалентной нормой в* $F_{p,q}^s(\mathbb{R}^2)$.

Доказательство. *Шаг 1.* Вначале докажем, что систему функций $\{|\nu_j(\xi)|\}_{j=0}^\infty$, где $\nu_0(\xi) = \widehat{\varphi}(\xi)$, $\nu_j(\xi) = \widehat{\psi}((M^*)^{-(j-1)}\xi)$ при $j = 1, 2, 3, \ldots$ можно использовать в качестве обобщенного разбиения единицы в определении шкал пространств Бесова и Лизоркина – Трибеля.

Отметим следующий факт. По построению функция $|\widehat{\varphi}|$ является бесконечно дифференцируемой и $0 \leqslant |\widehat{\varphi}(\xi)| \leqslant 1$. Поскольку функция $|\widehat{\psi}(\xi)| = m_0\Big((M^*)^{-1}\xi + \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)\Big)\widehat{\varphi}((M^*)^{-1}\xi)$ является бесконечно дифференцируемой и $\operatorname{supp}\widehat{\psi} \in [-\frac{3}{2}; \frac{3}{2}]^2$, то для $|\widehat{\psi}(\xi)|$ и всех ее производных $D^\alpha\widehat{\psi} = \frac{\partial^{|\alpha|}\widehat{\psi}}{\partial\xi_1^{\alpha_1}\partial\xi_2^{\alpha_2}}$ выполнено следующее свойство: для любого мультииндекса α существует положительное число c_α, при котором для всех $\xi \in \mathbb{R}^2$ выполнено неравенство $|D^\alpha\widehat{\psi}| \leqslant c_\alpha$.

Рассмотрим функции $|\nu_j(\xi)| = |\widehat{\psi}((M^*)^{-(j-1)}\xi)|$ при $j = 1, 2, 3, \dots$ Если обозначить

$$M^{j-1} := \begin{pmatrix} m_{11}(j-1) & m_{12}(j-1) \\ m_{21}(j-1) & m_{22}(j-1) \end{pmatrix},$$

то матрицу $(M^*)^{-(j-1)}$ можно найти по формуле

$$(M^*)^{-(j-1)} := \frac{1}{2^{j-1}} \begin{pmatrix} m_{22}(j-1) & -m_{21}(j-1) \\ -m_{12}(j-1) & m_{11}(j-1) \end{pmatrix}.$$

Для коэффициентов матрицы M^{j-1} справедлива оценка $|m_{ik}(j-1)| \leqslant 2^{\frac{j+1}{2}}$, которая легко доказывается по индукции.

Обозначим

$$\eta_{j-1}(\xi) = \begin{pmatrix} \eta_{j-1,1}(\xi_1, \xi_2) \\ \eta_{j-1,2}(\xi_1, \xi_2) \end{pmatrix} := M^{*-(j-1)}\xi = \frac{1}{2^{j-1}} \begin{pmatrix} m_{22}(j-1)\xi_1 - m_{21}(j-1)\xi_2 \\ -m_{12}(j-1)\xi_1 + m_{11}(j-1)\xi_2 \end{pmatrix}.$$

Заметим, что $|\frac{\partial \eta_{j-1,k}}{\partial \xi_m}(\xi_1, \xi_2)| \leqslant 2^{-\frac{j+1}{2}}$ для $k, m = 1, 2$. Тогда, используя доказанные ранее неравенства для производных функции $\widehat{\psi}(\xi)$, получим

$$|D^\alpha |\nu_j(\xi)|| = |D^\alpha |\widehat{\psi}(M^{*-(j-1)}\xi)|| = |D^\alpha |\widehat{\psi}(\eta_{j-1,1}(\xi_1, \xi_2), \eta_{j-1,2}(\xi_1, \xi_2))| \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{\beta: |\beta| = |\alpha|} \left| \frac{\partial^{|\beta|}\widehat{\psi}}{\partial \eta_{j-1,1}^{\beta_1} \partial \eta_{j-1,2}^{\beta_2}}(\xi_1, \xi_2) \right| 2^{-\frac{j+1}{2}|\beta|} \leqslant c_\alpha 2^{-\frac{j}{2}|\alpha|}.$$

Таким образом доказано, что функции $|\nu_j(\xi)|$ удовлетворяют условию: для каждого мультииндекса α существует положительное число c_α, при котором для всех $j = 0, 1, 2, \dots$ и всех $x \in \mathbb{R}^2$ выполнено неравенство $2^{\frac{j}{2}|\alpha|}|D^\alpha |\nu_j(x)|| \leqslant c_\alpha$.

Шаг 2. Докажем утверждение (ii) теоремы. Вначале покажем, что

$$\|f|F^s_{p,q}(\mathbb{R}^2)\|^{|\nu|} = \|2^{sj}F^{-1}|\nu_j|Ff|L_p(l_q, \mathbb{R}^2)\| \leqslant \|f|F^s_{p,q}(\mathbb{R}^2)\|.$$

Поскольку функции $|\nu_j|$ имеют компактные носители, то, полагая $\sigma_{-3}(\xi) \equiv 0$, $\sigma_{-2}(\xi) \equiv 0$, $\sigma_{-1}(\xi) \equiv 0$, можно переписать функции $|\nu_j|$ в виде

$$|\nu_j(\xi)| = |\nu_j(\xi)| \sum_{r=-3}^{5} \sigma_{[\frac{j}{2}]+r}(\xi),$$

где $[\frac{j}{2}]$ обозначает целую часть числа $[\frac{j}{2}]$. Тогда

$$\|F^{-1}|\nu_j|Ff|L_p(l_q, \mathbb{R}^2)\| \leqslant \sum_{r=-3}^{5} \|F^{-1}|\nu_j|FF^{-1}\sigma_{[\frac{j}{2}]+r}Ff|L_p(l_q, \mathbb{R}^2)\|.$$

Применим предложение 1, в котором заменим $M_j(\xi)$ и $f_j(x)$ на $|\nu_j(\xi)|$, и $F\sigma_{[\frac{j}{2}]+r}Ff(x)$ соответственно. Функции $F^{-1}\sigma_{[\frac{j}{2}]+r}Ff$ являются целыми функциями экспоненциального типа $\mu_j = (2^{[\frac{j}{2}]+r+1}, 2^{[\frac{j}{2}]+r+1})$. Так как $H_2^\varkappa = W_2^\varkappa$ при $\varkappa = 1, 2, 3, \dots$ и для любого $j = 0, 1, 2, \dots$

$$\|\nu_j|W_2^\varkappa\| = \sum_{|\alpha| \leqslant \varkappa} \|D^\alpha |\nu_j(\xi_1, \xi_2)||L_2(\mathbb{R}^2)\| \leqslant \sum_{|\alpha| \leqslant \varkappa} \Big(\int_{\mathbb{R}^2} |D^{|\alpha|}|\nu_j|(\xi)|^2 d\xi \Big)^{\frac{1}{2}} \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{|\alpha| \leqslant \varkappa} \Big(\int_{\operatorname{supp} \nu_j} c_\alpha^2 2^{-j|\alpha|} d\xi \Big)^{\frac{1}{2}} \leqslant \sum_{|\alpha| \leqslant \varkappa} c_\alpha 2^{-\frac{j}{2}|\alpha|} 6 \cdot 2^{\frac{j+1}{2}} \leqslant c \leqslant \infty,$$

т. е. $|\nu_j(\xi)| \in H_2^\varkappa$ для любого $j = 1, 2, \dots$ и для любого $\varkappa$.

В соответствии с предложением 1 при $\varkappa > 1 + \frac{2}{\min(p,q)}$ получим

$$\|F^{-1}|\nu_j|F^{-1}F\sigma_{[\frac{j}{2}]+r}Ff|L_p(l_q,\mathbb{R}^2)\| \ll \|\{|\nu_j|(\mu_{j1}\xi_1,\mu_{j2}\xi_2)\}_{j=0}^{\infty},\ l_\infty(H_2^{\varkappa})\|\|F^{-1}\sigma_{[\frac{j}{2}]+r}Ff,\ L_p(l_q,\mathbb{R}^2)\|.$$

Согласно оценкам, доказанным для производных функций $|\nu_j(\xi)|$,

$$\|\nu_j(\mu_{j1}\xi_1,\mu_{j2}\xi_2)|W_2^{\varkappa}\| = \sum_{|\alpha|\leqslant\varkappa}\|D^\alpha|\nu_j(2^{[\frac{j}{2}]+r+1}\xi_1,2^{[\frac{j}{2}]+r+1}\xi_2)||L_2(\mathbb{R}^2)\| \leqslant \sum_{|\alpha|\leqslant\varkappa} c_\alpha 2^{-\frac{j}{2}|\alpha|}2^{([\frac{j}{2}]+r+1)|\alpha|} \leqslant c$$

для любого $j = 0,1,2,\ldots$ Следовательно, существует постоянная c, такая что

$$\|\{|\nu_j|(\mu_{j1}\xi_1,\mu_{j2}\xi_2)\}_{j=0}^{\infty}, l_\infty(H_2^{\varkappa})\| < c < \infty,$$

$$\|F^{-1}|\nu_j|Ff|L_p(l_q,\mathbb{R}^2)\| \leqslant c\|F^{-1}\sigma_{[\frac{j}{2}]+r}Ff,\ L_p(l_q,\mathbb{R}^2)\|.$$

Таким образом, доказано, что величину $\|f|F_{p,q}^s(\mathbb{R}^2)\|^{|\nu|}$ можно оценить сверху через $c\|f|F_{p,q}^s(\mathbb{R}^2)\|$.

Шаг 3. Докажем обратное неравенство: $\|f|F_{p,q}^s(\mathbb{R}^2)\| \leqslant \|f|F_{p,q}^s(\mathbb{R}^2)\|^{|\nu|}$. Поскольку для функций $\widehat{\varphi}$ и $\widehat{\psi}$ выполняется условие $|\widehat{\psi}(M^*\xi)|^2 = |\widehat{\varphi}(\xi)|^2 - |\widehat{\varphi}(M^*\xi)|^2$, то

$$\sum_{j=0}^{\infty}\nu_j^2(\xi) = \lim_{k\to\infty}(|\widehat{\varphi}(\xi)|^2 + \sum_{j=1}^{k}|\widehat{\psi}((M^*)^{-(j-1)}\xi)|) = \lim_{k\to\infty}|\widehat{\varphi}((M^*)^{-k}\xi)|^2 = 1.$$

Так как функции $|\nu_j|$ финитны, то ряд $\sum\limits_{j=0}^{\infty}\nu_j^2(\xi)$ в каждой точке $\xi\in\mathbb{R}^2$ содержит конечное число слагаемых. Тогда справедливо неравенство

$$\Big(\sum_{j=0}^{\infty}|\nu_j(\xi)|\Big)^2 \geqslant \sum_{j=0}^{\infty}\nu_j^2(\xi) = 1.$$

Таким образом, доказано, что $\sum\limits_{j=0}^{\infty}|\nu_j(\xi)| \geqslant 1$ для любого $\xi\in\mathbb{R}^2$.

Поскольку функции σ_j по условию имеют компактные носители, то, полагая $\nu_{-3}(\xi)\equiv 0$, $\nu_{-2}(\xi)\equiv 0$, $\nu_{-1}(\xi)\equiv 0$, можно переписать функции σ_j в виде

$$\sigma_j(\xi) = \frac{\sigma_j(\xi)}{\sum\limits_{k=0}^{\infty}|\nu_k(\xi)|}\sum_{r=-3}^{8}|\nu_{2j+r}(\xi)|.$$

Далее, получим

$$\|F^{-1}\sigma_jFf|L_p(l_q,\mathbb{R}^2)\| \leqslant \sum_{r=-3}^{8}\left\|F^{-1}\frac{\sigma_j}{\sum\limits_{k=0}^{\infty}|\nu_k|}F^{-1}F|\nu_{2j+r}|Ff|L_p(l_q,\mathbb{R}^2)\right\|.$$

Учитывая, что $\left|D^\alpha\Big(\frac{\sigma_j(\xi)}{\sum\limits_{k=0}^{\infty}|\nu_k(\xi)|}\Big)\right| \leqslant c_\alpha 2^{-j|\alpha|}$, несложно проверить, что $\frac{\sigma_j(\xi)}{\sum\limits_{k=0}^{\infty}|\nu_k(\xi)|}\in H_2^{\varkappa}$. Функции $F^{-1}|\nu_{2j+r}|Ff$ являются целыми функциями экспоненциального типа $\mu_j = (3\cdot 2^{j+\frac{r+1}{2}}, 3\cdot 2^{j+\frac{r+1}{2}})$. Применим предложение 1 о мультипликаторах. Получим

$$\left\|F^{-1}\frac{\sigma_j}{\sum\limits_{k=0}^{\infty}|\nu_k|}F^{-1}F|\nu_{2j+r}|Ff|L_p(l_q,\mathbb{R}^2)\right\| \ll$$

$$\ll \left\|\left\{\frac{\sigma_j}{\sum\limits_{k=0}^{\infty}|\nu_k|}(3\cdot 2^{j+\frac{r+1}{2}}\xi_1, 3\cdot 2^{j+\frac{r+1}{2}}\xi_2)\right\}_{j=0}^{\infty}, l_\infty(H_2^{\varkappa})\right\|\left\|F^{-1}|\nu_{2j+r}|Ff, L_p(l_q)\right\|.$$

С помощью оценок для производных функций $\frac{\sigma_j(\xi)}{\sum\limits_{k=0}^{\infty}|\nu_k(\xi)|}$, полученных ранее, доказано, что

$$\left\| \left\{ \frac{\sigma_j}{\sum\limits_{k=0}^{\infty}|\nu_k|}(3\cdot 2^{j+\frac{r+1}{2}}\xi_1, 3\cdot 2^{j+\frac{r+1}{2}}\xi_2) \right\}_{j=0}^{\infty},\ l_\infty(H_2^\varkappa) \right\| \leqslant c.$$

Таким образом, величину $\|f|F^s_{p,q}(\mathbb{R}^2)\|$ можно оценить сверху через $c\|f|F^s_{p,q}(\mathbb{R}^2)\|^{|\nu|}$. Следовательно, $\|f|F^s_{p,q}(\mathbb{R}^2)\|^{|\nu|}$ является эквивалентной нормой в пространстве $F^s_{p,q}(\mathbb{R}^2)$.

Шаг 4. Заметим теперь, что по определению $\widehat{\varphi}$ — вещественная неотрицательная функция, $|\widehat{\varphi}(\xi)| = \widehat{\varphi}(\xi)$. Для преобразования Фурье всплеск-функции справедливо равенство

$$\widehat{\psi}(\xi) = e^{\pi i(\xi_1+\xi_2)}|\widehat{\psi}(\xi)|.$$

Определим систему функций $\{g_j(\xi)\}_{j=0}^{\infty} \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$ следующим образом: $g_0(\xi)$ — финитная функция, равная 1 на $\operatorname{supp}\widehat{\varphi}$; $g_1(\xi)$ — финитная функция, $g_1(\xi) = e^{\pi i(\xi_1+\xi_2)}$ на $\operatorname{supp}\widehat{\psi}$; $g_j(\xi) = g_1((M^*)^{-(j-1)}\xi)$ для $j = 2,3,\ldots$ Тогда $\nu_j(\xi) = g_j(\xi)|\nu_j(\xi)|$ и выражение для нормы примет следующий вид:

$$\|F^{-1}\nu_j Ff|L_p(l_q,\mathbb{R}^2)\| = \|F^{-1}g_j|\nu_j|Ff|L_p(l_q,\mathbb{R}^2)\| = \|F^{-1}g_jFF^{-1}|\nu_j|Ff|L_p(l_q,\mathbb{R}^2)\|.$$

Применим предложение 1. Функции $F^{-1}|\nu_j|Ff$ являются целыми функциями экспоненциального типа $\mu_j = (3\cdot 2^{\frac{j+1}{2}}, 3\cdot 2^{\frac{j+1}{2}})$. Поскольку

$$|D^\alpha g_j(\xi)| = \frac{\pi^{|\alpha|}}{2^{(j-1)|\alpha|}}|m_{22}(j-1) - m_{12}(j-1)|^{\alpha_1}|m_{11}(j-1) - m_{21}(j-1)|^{\alpha_2} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{\pi^{|\alpha|}}{2^{(j-1)|\alpha|}}(2\cdot 2^{\frac{j-1}{2}+1})^{|\alpha|} = 4^{|\alpha|}\pi^{|\alpha|}2^{-\frac{j-1}{2}|\alpha|},$$

и носители функций g_j компактны, то

$$\|g_j|W_2^\varkappa\| = \sum_{|\alpha|\leqslant\varkappa}\|D^\alpha g_j|L_2(\mathbb{R}^2)\| = \sum_{|\alpha|\leqslant\varkappa}\Big(\int\limits_{\mathbb{R}^2}|D^\alpha g_j(\xi)|^2 d\xi\Big)^{\frac{1}{2}} \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{|\alpha|\leqslant\varkappa}\Big(\int\limits_{\operatorname{supp}\, g_j} 4^{2|\alpha|}\pi^{2|\alpha|}2^{-\frac{j-1}{2}2|\alpha|}d\xi\Big)^{\frac{1}{2}} \leqslant c\cdot 4^\varkappa\pi^\varkappa 2^{-\frac{j-1}{2}\varkappa}6\cdot 2^{\frac{j+1}{2}} < \infty.$$

Таким образом, $g_j(\xi) \in H_2^\varkappa$ для любого $j = 1,2,\ldots$ и для любого $\varkappa$. Тогда

$$\|F^{-1}\nu_jFf|L_p(l_q,\mathbb{R}^2)\| \ll \left\|\{g_j(3\cdot 2^{\frac{j+1}{2}}\xi_1, 3\cdot 2^{\frac{j+1}{2}}\xi_2)\}_{j=0}^{\infty},\ l_\infty(H_2^\varkappa)\right\| \left\|\{F^{-1}|\nu_j|Ff\}_{k=0}^{\infty},\ L_p(l_q)\right\|.$$

Пользуясь оценкой для производных функций $g_j(\xi)$ получим, что

$$|D^\alpha g_j(3\cdot 2^{\frac{j+1}{2}}\xi_1, 3\cdot 2^{\frac{j+1}{2}}\xi_2)| \leqslant 4^{|\alpha|}\pi^{|\alpha|}2^{-\frac{j-1}{2}|\alpha|}\Big(3\cdot 2^{\frac{j+1}{2}}\Big)^{|\alpha|} = 12^{|\alpha|}\pi^{|\alpha|}.$$

Заметим, что $\operatorname{supp} g_j(3\cdot 2^{\frac{j+1}{2}}\cdot, 3\cdot 2^{\frac{j+1}{2}}\cdot) \subset [-1;1]^2$ для всех $j = 0,1,2,\ldots$. Тогда,

$$\|g_j(3\cdot 2^{\frac{j+1}{2}}\xi_1, 3\cdot 2^{\frac{j+1}{2}}\xi_2),\ W_2^\varkappa\| = \sum_{|\alpha|\leqslant\varkappa}\Big(\int\limits_{\mathbb{R}^2}|D^\alpha g_j(3\cdot 2^{\frac{j+1}{2}}\xi_1, 3\cdot 2^{\frac{j+1}{2}}\xi_2)|^2 d\xi\Big)^{\frac{1}{2}} \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{|\alpha|\leqslant\varkappa}12^{|\alpha|}\pi^{|\alpha|}4 \leqslant c\cdot 12^\varkappa\pi^\varkappa \quad \text{для любого} \quad j = 0,1,2,\ldots$$

Следовательно, $\|\{g_j(3\cdot 2^{\frac{j+1}{2}}\xi_1, 3\cdot 2^{\frac{j+1}{2}}\xi_2)\}_{j=0}^{\infty},\ l_\infty(H_2^\varkappa)\| \leqslant c < \infty$. Таким образом, доказано, что величину $\|f|F^s_{p,q}(\mathbb{R}^2)\|^\nu$ можно оценить сверху через $c\|f|F^s_{p,q}(\mathbb{R}^2)\|^{|\nu|}$.

Доказательство обратного неравенства проводится аналогично с помощью системы функций $\{h_j(\xi)\}_{j=0}^{\infty}$, таких что $h_j(\xi) \in C^{\infty}(\mathbb{R}^2)$, $h_0(\xi)$ — финитная функция, равная 1 на $\operatorname{supp}\widehat{\varphi}$; $h_1(\xi)$ — финитная функция, $h_1(\xi) = e^{-\pi i(\xi_1+\xi_2)}$ на $\operatorname{supp}\widehat{\psi}$; $h_j(\xi) = h_1((M^*)^{-(j-1)}\xi)$ для $j = 2, 3, \ldots$

Таким образом, будет доказано, что $\|f|F^s_{p,q}(\mathbb{R}^2)\|^{\nu}$ является нормой в пространстве $F^s_{p,q}(\mathbb{R}^2)$.

Шаг 5. Аналогичные рассуждения с использованием скалярного варианта теоремы о мультипликаторах приводят к доказательству эквивалентности норм для пространств Бесова. Как и для пространств Лизоркина – Трибеля, вначале доказывается, что

$$\|f|B^s_{p,q}(\mathbb{R}^2)\|^{|\nu|} = \|2^{sj}F^{-1}|\nu_j|Ff|l_q(L_p(\mathbb{R}^2))\|$$

является эквивалентной нормой в $B^s_{p,q}(\mathbb{R}^2)$. Для этого, как и на шаге 2 доказательства, используется представление функций $|\nu_j(\xi)|$ в виде

$$|\nu_j(\xi)| = |\nu_j(\xi)| \sum_{r=-3}^{5} \sigma_{[\frac{j}{2}]+r}(\xi)$$

и применяется предложение 2 о мультипликаторах. При $\varkappa > 1 + \frac{2}{\min(p,q)}$ имеем

$$\|F^{-1}|\nu_j|F^{-1}F\sigma_{[\frac{j}{2}]+r}Ff|L_p(\mathbb{R}^2)\| \ll \||\nu_j(2^{[\frac{j}{2}]+r+1}\xi_1, 2^{[\frac{j}{2}]+r+1}\xi_2)|H_2^{\varkappa}\|\,\|F^{-1}\sigma_{[\frac{j}{2}]+r}Ff,\ L_p\|.$$

Согласно полученным ранее оценкам $\|F^{-1}|\nu_j|Ff|L_p(\mathbb{R}^2)\| \leqslant c\|F^{-1}\sigma_{[\frac{j}{2}]+r}Ff,\ L_p(\mathbb{R}^2)\|$.

Затем, аналогично шагу 3 доказательства, представим функции $\sigma_j(\xi)$ в виде

$$\sigma_j(\xi) = \frac{\sigma_j(\xi)}{\sum\limits_{k=0}^{\infty}|\nu_k(\xi)|} \sum_{r=-3}^{8} |\nu_{2j+r}(\xi)|.$$

Применяя предложение 2, получим:

$$\left\|F^{-1}\frac{\sigma_j}{\sum\limits_{k=0}^{\infty}|\nu_k|}F^{-1}F|\nu_{2j+r}|Ff|L_p(\mathbb{R}^2)\right\| \ll \left\|\frac{\sigma_j}{\sum\limits_{k=0}^{\infty}|\nu_k|}(3{\cdot}2^{j+\frac{r+1}{2}}\xi_1, 3{\cdot}2^{j+\frac{r+1}{2}}\xi_2), H_2^{\varkappa}\right\| \left\|F^{-1}|\nu_{2j+r}|Ff, L_p(\mathbb{R}^2)\right\|.$$

На шаге 3, в частности, было доказано, что

$$\left\|\frac{\sigma_j}{\sum\limits_{k=0}^{\infty}|\nu_k|}(3\cdot 2^{j+\frac{r+1}{2}}\xi_1, 3\cdot 2^{j+\frac{r+1}{2}}\xi_2), H_2^{\varkappa}\right\| \leqslant c$$

для любого $j = 0, 1, 2, \ldots$ Следовательно, величина $\|f|B^s_{p,q}(\mathbb{R}^2)\|^{|\nu|}$ является эквивалентной нормой в $B^s_{p,q}(\mathbb{R}^2)$.

Доказательство эквивалентности нормы $\|f|B^s_{p,q}(\mathbb{R}^2)\|^{\nu}$ проводится аналогично шагу 4. Таким образом, теорема полностью доказана.

Автор выражает благодарность проф. И.Я. Новикову за постановку задачи и полезные обсуждения.

Библиографический список

1. *Новиков И.Я., Протасов В.Ю., Скопина М.А.* Теория всплесков. М.: Физматлит, 2005. 616 с.
2. *Bownik M., Speegle D.* Meyer Type Wavelet Bases in $\mathbb{R}^2$ // J. of Approx. Theory. 2002. V. 116. P. 49–75.
3. *Lindemann M.* Approximation Properties of Non-Separable Wavelet Bases with Isotropic Scaling Matrices and their Relations to Besov Spaces / University Bremen. Bremen, 2005. 126 p.
4. *Трибель Х.* Теория функциональных пространств. М.: Мир, 1986. 448 с.