НАУЧНЫЙ ОТДЕЛ

МЕХАНИКА

УДК 539.375

ВАРИАНТ ОПИСАНИЯ НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ ПЛОСКОСТИ С ПОЛУБЕСКОНЕЧНОЙ ТРЕЩИНОЙ НА ОСНОВЕ КОНЦЕПЦИИ СЛОЯ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ПРИ НОРМАЛЬНОМ ОТРЫВЕ

В.В. Глаголев, Л.В. Глаголев, А.А. Маркин

Тульский государственный университет,
кафедра математического моделирования.
E-mail: markin@tsu.tula.ru, vadim@tsu.tula.ru

Трещина рассматривается как физический разрез, а материал, лежащий на продолжении разреза, формирует слой взаимодействия между его берегами. Данный подход, в отличие от концепции математического разреза, позволяет установить законы изменения напряжений и деформаций в тупиковой области. Это дает возможность определять значения внешних нагрузок, соответствующие переходу слоя в пластическое состояние. На основании постулата о линейном законе распределения поля перемещений по толщине слоя получена система интегродифференциальных уравнений относительно перемещений его границ. Рассмотрен вариант численного решения поставленной задачи, проведено сравнение результатов для частного случая с известным асимптотическим решением.

Ключевые слова: характерный размер, граничное интегральное уравнение, линейная упругость.

Variant of the Description of the Intense-Deformed State of the Plane with the Semi-Infinite Flaw on the Basis of the Concept of the Stratum of Interaction at the Normal Separation

V.V. Glagolev, L.V. Glagolev, A.A. Markin

Tula State University,
Chair of Mathematical Modelling
E-mail: markin@tsu.tula.ru, vadim@tsu.tula.ru

The flaw is considered as a physical slit, and a material lying on continuation of a slit, shapes an interaction stratum between its coast sides. The given approach, unlike the concept of a mathematical slit, allows to establish laws of change of voltages and strains in deadlock field. It gives the chance to specify the values of exterior loadings corresponding to transition of a stratum in a plastic state. On the bases of a postulate on the linear distribution law of a field of travels on a thickness of a stratum the system of the integro-differential equations concerning travels of its boundaries is gained. The variant of the numerical solution of a task in view is viewed, comparison of effects for a special case with the known asymptotic solution is given.

Key words: characteristic size, boundary integrated equation, linear elasticity.

ВВЕДЕНИЕ

Механика квазихрупкого разрушения, базирующаяся на представлениях линейно-упругого тела рассматривает в качестве основной модели трещиноподобного дефекта математический разрез. В этом случае образование новых материальных поверхностей не связывается с разрушением материала в смысле использования критериев прочности. В качестве условия начала продвижения поверхности разрыва принимается критерий Гриффитса в энергетическом или силовом вариантах. Отметим, что данная модель описания трещино-

© В.В. Глаголев, Л.В. Глаголев, А.А. Маркин, 2010

подобного дефекта эффективно работает для хрупкого [1] и квазихрупкого разрушения [2, 3], когда пластическая область в концевой области трещины достаточно мала в том плане, что позволяет вести описание напряженно-деформированного состояния (НДС) концевой области трещины в рамках асимптотических представлений линейной теории упругости. Зарождение пластической зоны в этом случае остается открытым. Отметим, что классическая модель Леонова – Панасюка – Дагдейла [4, 5] предполагает наличие пластической зоны в окрестности трещины при сколь угодно малой внешней нагрузке. Однако определение начала пластического деформирования в концевой области трещины является достаточно актуальным вопросом [6], в частности, при циклическом нагружении поврежденного материала [7].

Одним из подходов, позволяющих строить решения в рамках гипотез сплошной среды, является представление Макклинтока [8]. Следуя [8], в окрестности прохождения трещины выделяется слой некоторой толщины δ_0, механические свойства которого не отличаются от окружающего материала, вплоть до начала разрушения, локализирующегося в данном слое. Предлагаемый подход позволяет установить значение внешних нагрузок, действующих по берегам разреза, при которых начинается пластическое деформирование. В статье [9] была решена задача для случая симметричного нагружения берегов разреза, исходя из постулата однородности НДС по толщине слоя.

В данной работе на основе идей [8] и обобщения [9] рассматривается одно модельное представление трещиноподобного дефекта, берега которого нагружены симметричной системой сил с целью определения начала пластического деформирования в концевой области. Задача сводится к системе интегродифференциальных сингулярных уравнений относительно четырех компонент перемещений границ. Предложен алгоритм приведения исходной системы к бесконечной системе линейных алгебраических уравнений. Для частного случая симметричного нагружения показано хорошее совпадение численного решения с асимптотическим представлением [10]. В отличие от работы [9], особенность разрешающей системы была понижена до логарифмической, что позволило использовать более высокую степень аппроксимации на граничном элементе, данное обстоятельство, в конечном итоге, существенно повысило скорость сходимости численного решения.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим бесконечную линейно-упругую плоскость, ослабленную физическим разрезом, толщиной δ_0, с приложенной к его берегам внешней сосредоточенной нагрузкой, показанной на рисунке. Введенный характерный размер δ_0 считаем минимально допустимым с точки зрения выполнения гипотез механики сплошной среды. Материал, лежащий на мысленном продолжении разреза в плоскость, формирует некоторый материальный слой [11]. Оценки данного масштабного уровня обсуждаются в работах [11, 12].

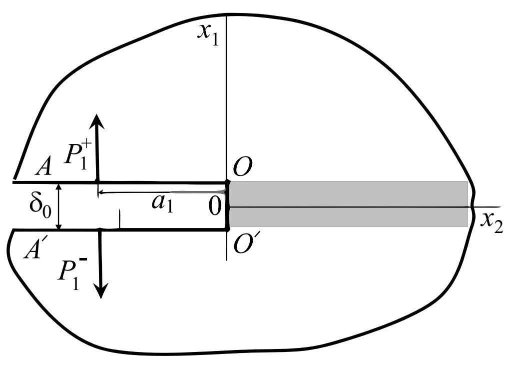

Схема нагружения берегов трещины

Напряженное состояние слоя характеризуется тензором напряжений Коши [13] с компонентами $\sigma_{ij}(x_1, x_2)$, $i, j = 1, 2, 3$. Воспользуемся следующими обозначениями: $\sigma_{12}^+(x_2) = \sigma_{12}(\delta_0/2, x_2)$, $\sigma_{12}^-(x_2) = \sigma_{12}(-\delta_0/2, x_2)$, $\sigma_{11}^+(x_2) = \sigma_{11}(\delta_0/2, x_2)$, $\sigma_{11}^-(x_2) = \sigma_{11}(-\delta_0/2, x_2)$. При дальнейшем изложении положим $x_2 = x$. Нагрузка, приложенная к верхней части слоя, равна $\mathbf{q}^+(x) = (\sigma_{11}^+\mathbf{e}_1 + \sigma_{12}^+\mathbf{e}_2)$, а к нижней $-\ \mathbf{q}^-(x) = \left(\sigma_{11}^-\mathbf{e}_1 + \sigma_{12}^-\mathbf{e}_2\right)$. Отметим, что действие слоя на смежные полуплоскости равно по модулю и противоположно по направлению введенным векторам. Левый торец слоя OO' свободен от внешних нагрузок.

В силу малости толщины слоя будем считать распределение перемещений линейным по координате x_1. Таким образом, вектор перемещения в слое запишем в виде

$$\mathbf{u}(x_1, x) = (u_{01}(x) + u_{11}(x)x_1)\mathbf{e}_1 + (u_{02}(x) + u_{12}(x)x_1)\mathbf{e}_2, \tag{1}$$

где $u_{01}(x) = u_1\ (x_1, x)\big|_{x_1=0}$, $u_{02}(x) = u_2(x)\ (x_1, x)\big|_{x_1=0}$ — соответствующие перемещения срединной поверхности слоя,

$$u_{11}(x) = \left.\frac{\partial u_1(x_1,x)}{\partial x}\right|_{x_1=0}, \qquad u_{12}(x) = \left.\frac{\partial u_2(x_1,x)}{\partial x}\right|_{x_1=0}.$$

Введем обозначения граничных перемещений слоя:

$$\mathbf{u}^+ = u_1^+\mathbf{e}_1 + u_2^+\mathbf{e}_2, \tag{2}$$
$$\mathbf{u}^- = u_1^-\mathbf{e}_1 + u_2^-\mathbf{e}_2. \tag{3}$$

Из (1) с учетом (2) и (3) найдем:

$$u_{01} = 0.5(u_1^+ + u_1^-), \qquad u_{02} = 0.5(u_2^+ + u_2^-), \tag{4}$$
$$u_{11} = \frac{1}{\delta_0}(u_1^+ - u_1^-), \qquad u_{12} = \frac{1}{\delta_0}(u_2^+ - u_2^-). \tag{5}$$

Подставим (4) и (5) в (1), в результате получим:

$$\mathbf{u}(x_1,x) = \left[0.5(u_1^+ + u_1^-) + (u_1^+ - u_1^-)\frac{x_1}{\delta_0}\right]\mathbf{e}_1 + \left[0.5(u_2^+ + u_2^-) + (u_2^+ - u_2^-)\frac{x_1}{\delta_0}\right]\mathbf{e}_2,$$

или

$$\mathbf{u}(x_1,x) = \left[0.5u_1^+\left(1+\frac{2x_1}{\delta_0}\right) + 0.5u_1^-\left(1-\frac{2x_1}{\delta_0}\right)\right]\mathbf{e}_1 + \left[0.5u_2^+\left(1+\frac{2x_1}{\delta_0}\right) + 0.5u_2^-\left(1-\frac{2x_1}{\delta_0}\right)\right]\mathbf{e}_2. \tag{6}$$

Из (6) найдем компоненты тензора деформации:

$$\varepsilon_{11} = \frac{\partial u_1}{\partial x_1} = \frac{(u_1^+ - u_1^-)}{\delta_0}, \tag{7}$$

$$\varepsilon_{12} = \varepsilon_{21} = 0.5\left(\frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1}\right) = 0.5\left[0.5\frac{\partial u_1^+}{\partial x}\left(1+\frac{2x_1}{\delta_0}\right) + 0.5\frac{\partial u_1^-}{\partial x}\left(1-\frac{2x_1}{\delta_0}\right) + \frac{(u_2^+ - u_2^-)}{\delta_0}\right], \tag{8}$$

$$\varepsilon_{22} = \frac{\partial u_2}{\partial x} = 0.5\left[\frac{\partial u_2^+}{\partial x}\left(1+\frac{2x_1}{\delta_0}\right) + \frac{\partial u_2^-}{\partial x}\left(1-\frac{2x_1}{\delta_0}\right)\right]. \tag{9}$$

Вычислим работу напряжений в слое:

$$\delta A^{(i)} = \int_0^\infty \int_{-\delta_0/2}^{\delta_0/2} \sigma_{ij}\delta\varepsilon_{ij}dx_1dx. \tag{10}$$

Рассмотрим в выражении (10) отличные от нуля слагаемые с учетом представлений (7)–(9).

$$\int_0^\infty \int_{-\delta_0/2}^{\delta_0/2} \sigma_{11}\delta\varepsilon_{11}dx_1dx = \int_0^\infty \int_{-\delta_0/2}^{\delta_0/2} \sigma_{11}\frac{(\delta u_1^+ - \delta u_1^-)}{\delta_0}dx_1dx = \int_0^\infty \overline{\sigma}_{11}\left(\delta u_1^+ - \delta u_1^-\right)dx, \tag{11}$$

где $\overline{\sigma}_{11} = \frac{1}{\delta_0}\int\limits_{-\delta_0/2}^{\delta_0/2}\sigma_{11}dx_1$ — среднее напряжение по слою.

$$\int_0^\infty \int_{-\delta_0/2}^{\delta_0/2} \sigma_{22}\delta\varepsilon_{22}\,dx_1\,dx = 0.5\int_0^\infty \int_{-\delta_0/2}^{\delta_0/2} \sigma_{22}\left[\left(1+\frac{2x_1}{\delta_0}\right)\frac{\partial\delta u_2^+}{\partial x} + \left(1-\frac{2x_1}{\delta_0}\right)\frac{\partial\delta u_2^-}{\partial x}\right]dx_1dx. \tag{12}$$

Введем обозначения для величин средних напряжений и моментов в слое: $\overline{\sigma}_{22} = \frac{1}{\delta_0}\int\limits_{-\delta_0/2}^{\delta_0/2}\sigma_{22}dx_1$, $\overline{m}_{22} = \frac{1}{\delta_0}\int\limits_{-\delta_0/2}^{\delta_0/2}\sigma_{22}x_1dx_1$ и запишем (12) в следующей форме с учетом интегрирования по частям:

$$\int\limits_0^\infty\int\limits_{-\delta_0/2}^{\delta_0/2}\sigma_{22}\delta\varepsilon_{22}dx_1dx = 0.5\overline{\sigma}_{22}\delta_0\left(\delta u_2^+ + \delta u_2^-\right)\Big|_0^\infty - 0.5\delta_0\int\limits_0^\infty\frac{\partial\overline{\sigma}_{22}}{\partial x}\left(\delta u_2^+ + \delta u_2^-\right)dx +$$

$$+\overline{m}_{22}\left(\delta u_2^+ - \delta u_2^-\right)\Big|_0^\infty - \int\limits_0^\infty\frac{\partial\overline{m}_{22}}{\partial x}\left(\delta u_2^+ - \delta u_2^-\right)dx. \tag{13}$$

$$\int\limits_0^\infty\int\limits_{-\delta_0/2}^{\delta_0/2}\sigma_{12}\delta\varepsilon_{12}dx_1dx = \int\limits_0^\infty\int\limits_{-\delta_0/2}^{\delta_0/2}\sigma_{21}\delta\varepsilon_{21}dx_1dx =$$

$$= 0.5\int\limits_0^\infty\int\limits_{-\delta_0/2}^{\delta_0/2}\sigma_{12}\left[0.5\frac{\partial\delta u_1^+}{\partial x}\left(1+\frac{2x_1}{\delta_0}\right) + 0.5\frac{\partial\delta u_1^-}{\partial x}\left(1-\frac{2x_1}{\delta_0}\right) + \frac{\left(\delta u_2^+ - \delta u_2^-\right)}{\delta_0}\right]dx_1\,dx. \tag{14}$$

Используя обозначения $\overline{\sigma}_{12} = \frac{1}{\delta_0}\int\limits_{-\delta_0/2}^{\delta_0/2}\sigma_{12}dx_1$, $\overline{m}_{12} = \frac{1}{\delta_0}\int\limits_{-\delta_0/2}^{\delta_0/2}\sigma_{12}x_1dx_1$, интегрируя по частям, преобразуем (14):

$$2\int\limits_0^\infty\int\limits_{-\delta_0/2}^{\delta_0/2}\sigma_{12}\delta\varepsilon_{12}dx_1dx = \int\limits_0^\infty\overline{\sigma}_{12}\left(\delta u_2^+ - \delta u_2^-\right)dx + 0.5\overline{\sigma}_{12}\delta_0\left(\delta u_1^+ + \delta u_1^-\right)\Big|_0^\infty +$$

$$+\overline{m}_{12}\left(\delta u_1^+ - \delta u_1^-\right)\Big|_0^\infty - \int\limits_0^\infty\frac{\partial\overline{m}_{12}}{\partial x}\left(\delta u_1^+ - \delta u_1^-\right)dx. \tag{15}$$

В силу того что торцевая поверхность слоя не нагружена, а на бесконечности напряжения затухают, имеем:

$$\sigma_{12}(0) = \sigma_{22}(0) = \sigma_{12}(\infty) = \sigma_{22}(\infty) = 0. \tag{16}$$

Перепишем (13) и (15) с учетом (16):

$$\int\limits_0^\infty\int\limits_{-\delta_0/2}^{\delta_0/2}\sigma_{22}\delta\varepsilon_{22}dx_1dx = -0.5\delta_0\int\limits_0^\infty\frac{\partial\overline{\sigma}_{22}}{\partial x}\left(\delta u_2^+ + \delta u_2^-\right)dx - \int\limits_0^\infty\frac{\partial\overline{m}_{22}}{\partial x}\left(\delta u_2^+ - \delta u_2^-\right)dx, \tag{17}$$

$$2\int\limits_0^\infty\int\limits_{-\delta_0/2}^{\delta_0/2}\sigma_{12}\delta\varepsilon_{12}dx_1dx = \int\limits_0^\infty\overline{\sigma}_{12}\left(\delta u_2^+ - \delta u_2^-\right)dx - 0.5\delta_0\int\limits_0^\infty\frac{\partial\overline{\sigma}_{12}}{\partial x}\left(\delta u_1^+ + \delta u_1^-\right)dx -$$

$$-\int\limits_0^\infty\frac{\partial\overline{m}_{12}}{\partial x}\left(\delta u_1^+ - \delta u_1^-\right)dx. \tag{18}$$

Работу внешних сил на виртуальных перемещениях, действующих на слой по замкнутому контуру $\ell : \delta A^{(e)} = \oint\limits_\ell \mathbf{q}\cdot\delta\mathbf{u}d\ell$ с учетом (16), запишем в виде

$$\delta A^{(e)} = \int\limits_0^\infty\left(q_1^+\delta u_1^+ + q_2^+\delta u_2^+ + q_1^-\delta u_1^- + q_2^-\delta u_2^-\right)dx. \tag{19}$$

Следуя принципу возможных перемещений $\delta A^{(e)} = \delta A^{(i)}$, приравняв члены при соответствующих вариациях в связях (10) и (19) с учетом (11), (17), (18), приходим к четырем дифференциальным зависимостям между средними напряжениями, моментами в слое и внешней нагрузкой по его границе:

$$q_1^+ = \overline{\sigma}_{11} - 0.5\delta_0 \frac{\partial \overline{\sigma}_{12}}{\partial x} - \frac{\partial \overline{m}_{12}}{\partial x}, \tag{20}$$

$$q_2^+ = \overline{\sigma}_{12} - 0.5\delta_0 \frac{\partial \overline{\sigma}_{22}}{\partial x} - \frac{\partial \overline{m}_{22}}{\partial x}, \tag{21}$$

$$q_1^- = -\overline{\sigma}_{11} - 0.5\delta_0 \frac{\partial \overline{\sigma}_{12}}{\partial x} + \frac{\partial \overline{m}_{12}}{\partial x}, \tag{22}$$

$$q_2^- = -\overline{\sigma}_{12} - 0.5\delta_0 \frac{\partial \overline{\sigma}_{22}}{\partial x} + \frac{\partial \overline{m}_{22}}{\partial x}. \tag{23}$$

Считаем, что связь между напряжениями и деформациями определена законом Гука для случая плоского деформирования:

$$\sigma_{11} = A\varepsilon_{11} + B\varepsilon_{22}, \tag{24}$$

$$\sigma_{22} = A\varepsilon_{22} + B\varepsilon_{11}, \tag{25}$$

$$\sigma_{12} = C\varepsilon_{12}, \tag{26}$$

где $A = \dfrac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)}$; $B = \dfrac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}$; $C = \dfrac{E}{(1+\nu)}$, E — модуль упругости; ν — коэффициент Пуассона.

Из (24)–(26) с учетом (7)–(9) приходим к следующим представлениям средних напряжений, моментов и их производных через перемещения границ слоя:

$$\overline{\sigma}_{11} = \frac{A}{\delta_0}\left(u_1^+ - u_1^-\right) + \frac{B}{2}\left(\frac{\partial u_2^+}{\partial x} + \frac{\partial u_2^-}{\partial x}\right), \tag{27}$$

$$\overline{\sigma}_{22} = \frac{B}{\delta_0}\left(u_1^+ - u_1^-\right) + \frac{A}{2}\left(\frac{\partial u_2^+}{\partial x} + \frac{\partial u_2^-}{\partial x}\right), \quad \frac{\partial \overline{\sigma}_{22}}{\partial x} = \frac{B}{\delta_0}\left(\frac{\partial u_1^+}{\partial x} - \frac{\partial u_1^-}{\partial x}\right) + \frac{A}{2}\left(\frac{\partial^2 u_2^+}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_2^-}{\partial x^2}\right), \tag{28}$$

$$\overline{\sigma}_{12} = \frac{C}{2\delta_0}\left(u_2^+ - u_2^-\right) + \frac{C}{4}\left(\frac{\partial u_1^+}{\partial x} + \frac{\partial u_1^-}{\partial x}\right), \quad \frac{\partial \overline{\sigma}_{12}}{\partial x} = \frac{C}{2\delta_0}\left(\frac{\partial u_2^+}{\partial x} - \frac{\partial u_2^-}{\partial x}\right) + \frac{C}{4}\left(\frac{\partial^2 u_1^+}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_1^-}{\partial x^2}\right), \tag{29}$$

$$\overline{m}_{22} = \frac{A\delta_0}{12}\left(\frac{\partial u_2^+}{\partial x} - \frac{\partial u_2^-}{\partial x}\right); \quad \frac{\partial \overline{m}_{22}}{\partial x} = \frac{A\delta_0}{12}\left(\frac{\partial^2 u_2^+}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u_2^-}{\partial x^2}\right), \tag{30}$$

$$\overline{m}_{12} = \frac{C\delta_0}{24}\left(\frac{\partial u_1^+}{\partial x} - \frac{\partial u_1^-}{\partial x}\right); \quad \frac{\partial \overline{m}_{12}}{\partial x} = \frac{C\delta_0}{24}\left(\frac{\partial^2 u_1^+}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u_1^-}{\partial x^2}\right). \tag{31}$$

Подставив (27)–(31) в (20)–(23) получим выражения напряжений по границам слоя через граничные перемещения:

$$q_1^+ = \frac{A}{\delta_0}u_1^+ - \frac{A}{\delta_0}u_1^- - D1\frac{\partial u_2^+}{\partial x} - D\frac{\partial u_2^-}{\partial x} - \frac{C\delta_0}{6}\frac{\partial^2 u_1^+}{\partial x^2} - \frac{C\delta_0}{12}\frac{\partial^2 u_1^-}{\partial x^2}, \tag{32}$$

$$q_1^- = -\frac{A}{\delta_0}u_1^+ + \frac{A}{\delta_0}u_1^- + D\frac{\partial u_2^+}{\partial x} + D1\frac{\partial u_2^-}{\partial x} - \frac{C\delta_0}{12}\frac{\partial^2 u_1^+}{\partial x^2} - \frac{C\delta_0}{6}\frac{\partial^2 u_1^-}{\partial x^2}, \tag{33}$$

$$q_2^+ = \frac{C}{2\delta_0}u_2^+ - \frac{C}{2\delta_0}u_2^- + D1\frac{\partial u_1^+}{\partial x} - D\frac{\partial u_1^-}{\partial x} - \frac{A\delta_0}{3}\frac{\partial^2 u_2^+}{\partial x^2} - \frac{A\delta_0}{6}\frac{\partial^2 u_2^-}{\partial x^2}, \tag{34}$$

$$q_2^- = -\frac{C}{2\delta_0}u_2^+ + \frac{C}{2\delta_0}u_2^- + D\frac{\partial u_1^+}{\partial x} - D1\frac{\partial u_1^-}{\partial x} - \frac{A\delta_0}{6}\frac{\partial^2 u_2^+}{\partial x^2} - \frac{A\delta_0}{3}\frac{\partial^2 u_2^-}{\partial x^2}, \tag{35}$$

где $D = -\dfrac{E}{4(1+\nu)(1-2\nu)}$, $D1 = \dfrac{E(1-4\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)}$.

При дальнейшем изложении все величины, имеющие размерность длины, отнесем к толщине слоя δ_0, а напряжений — к параметру $\beta = \dfrac{\pi E}{2(1-\nu^2)}$, получаемого в решении задачи Фламана [13].

Таким образом, выражения (32)–(35) запишем в безразмерном виде

$$q_1^+ = \alpha u_1^+ - \alpha u_1^- - d1\frac{\partial u_2^+}{\partial x} - d\frac{\partial u_2^-}{\partial x} - \frac{c}{6}\frac{\partial^2 u_1^+}{\partial x^2} - \frac{c}{12}\frac{\partial^2 u_1^-}{\partial x^2}, \quad (36)$$

$$q_1^- = -\alpha u_1^+ + \alpha u_1^- + d\frac{\partial u_2^+}{\partial x} + d1\frac{\partial u_2^-}{\partial x} - \frac{c}{12}\frac{\partial^2 u_1^+}{\partial x^2} - \frac{c}{6}\frac{\partial^2 u_1^-}{\partial x^2}, \quad (37)$$

$$q_2^+ = \frac{c}{2}u_2^+ - \frac{c}{2}u_2^- + d1\frac{\partial u_1^+}{\partial x} - d\frac{\partial u_1^-}{\partial x} - \frac{\alpha}{3}\frac{\partial^2 u_2^+}{\partial x^2} - \frac{\alpha}{6}\frac{\partial^2 u_2^-}{\partial x^2}, \quad (38)$$

$$q_2^- = -\frac{c}{2}u_2^+ + \frac{c}{2}u_2^- + d\frac{\partial u_1^+}{\partial x} - d1\frac{\partial u_1^-}{\partial x} - \frac{\alpha}{6}\frac{\partial^2 u_2^+}{\partial x^2} - \frac{\alpha}{3}\frac{\partial^2 u_2^-}{\partial x^2}, \quad (39)$$

где $d = -\dfrac{(1-\nu)}{2\pi(1-2\nu)}$, $d1 = \dfrac{(1-4\nu)(1-\nu)}{2\pi(1-2\nu)}$, $\alpha = \dfrac{2(1-\nu)^2}{\pi(1-2\nu)}$, $c = \dfrac{2(1-\nu)}{\pi}$, $x = x/\delta_0$ — безразмерная координата, $\sigma_{ij} = \sigma_{ij}/\beta$ — безразмерное напряжение, $u_i = u_i/\delta_0$ — безразмерное перемещение.

На основании решения задачи Фламана распределение перемещений точек границы верхней и нижней полуплоскости под действием нагрузок, действующих со стороны слоя, имеет вид

$$u_1^+(x) = -P_1^+ \ln\left(\frac{x+\alpha_1}{L+\alpha_1}\right) + \int\limits_0^{\mathrm{L}} q_1^+(\xi)\ln\frac{|x-\xi|}{L-\xi}d\xi, \quad (40)$$

$$u_2^+(x) = \int\limits_0^{\mathrm{L}} q_2^+(\xi)\ln\frac{|x-\xi|}{L-\xi}d\xi, \quad (41)$$

$$u_1^-(x) = P_1^- \ln\left(\frac{x+\alpha_1}{L+\alpha_1}\right) + \int\limits_0^{\mathrm{L}} q_1^-(\xi)\ln\frac{|x-\xi|}{L-\xi}d\xi, \quad (42)$$

$$u_2^-(x) = \int\limits_0^{\mathrm{L}} q_2^-(\xi)\ln\frac{|x-\xi|}{L-\xi}d\xi, \quad (43)$$

здесь α_1 — расстояние от вершины разреза до точки приложения безразмерной силы $P_1^+ = P_r^+/\delta_0\beta$, $P_1^- = P_r^-/\delta_0\beta$, P_r^+, P_r^- — сила на единицу толщины образца; L — удаленная точка с нулевым перемещением (данную точку будем ассоциировать с бесконечно удаленной точкой), L — расстояние от начала координат до L;

Подставив соответствующие выражения (36)–(39) в (40)–(43), приходим к системе интегро-дифференциальных уравнений относительно перемещений границ слоя.

$$u_1^+(x) = -P_1^+ \ln\left(\frac{x+\alpha_1}{L+\alpha_1}\right) + \int\limits_0^{\mathrm{L}} \left[\alpha u_1^+(\xi) - \alpha u_1^-(\xi) - d1\frac{\partial u_2^+(\xi)}{\partial \xi} - \right.$$
$$\left. -d\frac{\partial u_2^-(\xi)}{\partial \xi} - \frac{c}{6}\frac{\partial^2 u_1^+(\xi)}{\partial \xi^2} - \frac{c}{12}\frac{\partial^2 u_1^-(\xi)}{\partial \xi^2}\right]\ln\frac{|x-\xi|}{L-\xi}d\xi, \quad (44)$$

$$u_2^+(x) = \int\limits_0^{\mathrm{L}} \left[\begin{array}{l} \frac{c}{2}u_2^+(\xi) - \frac{c}{2}u_2^-(\xi) + d1\frac{\partial u_1^+(\xi)}{\partial \xi} - d\frac{\partial u_1^-(\xi)}{\partial \xi} + \\ -\frac{\alpha}{3}\frac{\partial^2 u_2^+(\xi)}{\partial \xi^2} - \frac{\alpha}{6}\frac{\partial^2 u_2^-(\xi)}{\partial \xi^2} \end{array}\right]\ln\frac{|x-\xi|}{L-\xi}d\xi, \quad (45)$$

$$u_1^-(x) = P_1^- \ln\left(\frac{x+\alpha_1}{L+\alpha_1}\right) - \int\limits_0^{\mathrm{L}} \left[\alpha u_1^+(\xi) - \alpha u_1^-(\xi) - d\frac{\partial u_2^+(\xi)}{\partial \xi} - \right.$$
$$\left. -d1\frac{\partial u_2^-(\xi)}{\partial \xi} + \frac{c}{12}\frac{\partial^2 u_1^+(\xi)}{\partial \xi^2} + \frac{c}{6}\frac{\partial^2 u_1^-(\xi)}{\partial \xi^2}\right]\ln\frac{|x-\xi|}{L-\xi}d\xi, \quad (46)$$

$$u_2^-(x) = -\int\limits_0^{\mathrm{L}} \left[\begin{array}{l} \frac{c}{2}u_2^+(\xi) - \frac{c}{2}u_2^-(\xi) - d\frac{\partial u_1^+(\xi)}{\partial \xi} + d1\frac{\partial u_1^-(\xi)}{\partial \xi} + \\ +\frac{\alpha}{6}\frac{\partial^2 u_2^+(\xi)}{\partial \xi^2} + \frac{\alpha}{3}\frac{\partial^2 u_2^-(\xi)}{\partial \xi^2} \end{array}\right]\ln\frac{|x-\xi|}{L-\xi}d\xi. \quad (47)$$

2. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ

Рассмотрим численную процедуру решения полученной системы интегродифференциальных уравнений (44)–(47). Область интегрирования представим набором из n единичных элементов, в каждом из которых функция перемещения будет определяться квадратичной зависимостью вида

$$u_j(\xi) = L_{i,j}\xi^2 + M_{i,j}\xi + K_{i,j}, \tag{48}$$

где $j = 1, 2$, $i = 1 \dots n$.

Неизвестными на каждом элементе считаем узловые перемещения, отнесенные к краям и середине элемента. В этом случае имеют место следующие выражения постоянных $L_{i,j}, M_{i,j}, K_{i,j}$ конкретного элемента через узловые перемещения:

$$L_{i,j} = 2\left(u_j^{1,i} - 2u_j^{2,i} + u_j^{3,i}\right), \quad M_{i,j} = 2\left[-u_j^{1,i}(\xi_2+\xi_3) + 2u_j^{2,i}(\xi_1+\xi_3) - u_j^{3,i}(\xi_1+\xi_2)\right],$$
$$K_{i,j} = 2\left(u_j^{1,i}\xi_2\xi_3 - 2u_j^{2,i}\xi_1\xi_3 + u_j^{3,i}\xi_1\xi_2\right),$$

где $u_j^{1,i}$ — перемещение левого края i-го элемента; $u_j^{2,i}$ — перемещение середины i-го элемента; $u_j^{3,i}$ — перемещение правого края i-го элемента; $\xi_1, \xi_2 = \xi_1+0.5, \xi_3+1$ — координаты соответствующих узлов. Для смежных элементов требуем непрерывности поля перемещений в общей точке: $u_j^{3,i} = u_j^{1,i+1}$.

С учетом (48) преобразуем систему интегродифференциальных уравнений (44)–(47):

$$u_1^+(x_s) = -P_1^+ \ln\left(\frac{x_s+\alpha_1}{n+\alpha_1}\right) + \sum_{i=1}^{i=n}\int\limits_{\xi_{i-1}}^{\xi_i}\left[\alpha\left(L_{i,1}^+\xi^2 + M_{i,1}^+\xi + K_{i,1}^+\right) - \alpha\left(L_{i,1}^-\xi^2 + M_{i,1}^-\xi + K_{i,1}^-\right) - \right.$$
$$\left. -d1\left(2L_{i,2}^+\xi + M_{i,2}^+\right) - d\left(2L_{i,2}^-\xi + M_{i,2}^-\right) - \frac{cL_{i,1}^+}{3} - \frac{cL_{i,1}^-}{6}\right]\ln\frac{|x_s-\xi|}{n-\xi}d\xi, \tag{49}$$

$$u_2^+(x_s) = \sum_{i=1}^{i=n}\int\limits_{\xi_{i-1}}^{\xi_i}\left[\frac{c}{2}\left(L_{i,2}^+\xi^2 + M_{i,2}^+\xi + K_{i,2}^+\right) - \frac{c}{2}\left(L_{i,2}^-\xi^2 + M_{i,2}^-\xi + K_{i,2}^-\right) + \right.$$
$$\left. +d1\left(2L_{i,1}^+\xi + M_{i,1}^+\right) - d\left(2L_{i,1}^-\xi + M_{i,1}^-\right) - \frac{2\alpha L_{i,2}^+}{3} - \frac{\alpha L_{i,2}^-}{3}\right]\ln\frac{|x_s-\xi|}{n-\xi}d\xi, \tag{50}$$

$$u_1^-(x_s) = P_1^- \ln\left(\frac{x_s+\alpha_1}{n+\alpha_1}\right) - \sum_{i=1}^{i=n}\int\limits_{\xi_{i-1}}^{\xi_i}\left[\alpha\left(L_{i,1}^+\xi^2 + M_{i,1}^+\xi + K_{i,1}^+\right) - \alpha\left(L_{i,1}^-\xi^2 + M_{i,1}^-\xi + K_{i,1}^-\right) - \right.$$
$$\left. -d\left(2L_{i,2}^+\xi + M_{i,2}^+\right) - d1\left(2L_{i,2}^-\xi + M_{i,2}^-\right) + \frac{cL_{i,1}^+}{6} + \frac{cL_{i,1}^-}{3}\right]\ln\frac{|x_s-\xi|}{n-\xi}d\xi, \tag{51}$$

$$u_2^-(x_s) = -\sum_{i=1}^{i=n}\int\limits_{\xi_{i-1}}^{\xi_i}\left[\frac{c}{2}\left(L_{i,2}^+\xi^2 + M_{i,2}^+\xi + K_{i,2}^+\right) - \frac{c}{2}\left(L_{i,2}^-\xi^2 + M_{i,2}^-\xi + K_{i,2}^-\right) - \right.$$
$$\left. -d\left(2L_{i,1}^+\xi + M_{i,1}^+\right) + d1\left(2L_{i,1}^-\xi + M_{i,1}^-\right) + \frac{\alpha L_{i,2}^+}{3} + \frac{2\alpha L_{i,2}^-}{3}\right]\ln\frac{|x_s-\xi|}{n-\xi}d\xi, \tag{52}$$

где x_s — глобальная узловая координата.

Таким образом, приходим к системе из $4(2n+1)$ линейных алгебраических уравнений (в общем случае бесконечной $n \to \infty$) относительно $4(2n+1)$ неизвестных узловых перемещений границы слоя $u_1^+(x_s)$, $u_1^-(x_s)$, $u_2^+(x_s)$, $u_2^-(x_s)$.

3. АНАЛИЗ СИСТЕМЫ

Прежде всего отметим, что в полученной системе (49)–(52) имеют место интегралы от сингулярных функций вида $\int\limits_{\xi_{i-1}}^{\xi_i} \xi^2 \ln\frac{|x_s-\xi|}{n-\xi}d\xi$, $\int\limits_{\xi_{i-1}}^{\xi_i} \xi \ln\frac{|x_s-\xi|}{n-\xi}d\xi$, $\int\limits_{\xi_{i-1}}^{\xi_i} \ln\frac{|x_s-\xi|}{n-\xi}d\xi$ для случая, когда узел x_s принадлежит i-му элементу.

Рассмотрим выражения следующих определенных интегралов:

$$\int\limits_{\xi_{i-1}}^{\xi_i} \xi^2 \ln\left(\frac{|x_s-\xi|}{n-\xi}\right) d\xi = 1/3\left[\left(\xi_i^3 - x_s^3\right)\ln\left(|x_s-\xi_i|\right) - \left(\xi_{i-1}^3 - x_s^3\right)\ln\left(|x_s-\xi_{i-1}|\right) + \left(n^3-\xi_i^3\right)\times\right.$$
$$\left.\times\ln\left(n-\xi_i\right) - \left(n^3-\xi_{i-1}^3\right)\ln\left(n-\xi_{i-1}\right) + 0.5\left(n-x_s\right)\left(\xi_i^2-\xi_{i-1}^2\right) + \left(n^2-x_s^2\right)\left(\xi_i-\xi_{i-1}\right)\right], \tag{53}$$

$$\int\limits_{\xi_{i-1}}^{\xi_i} \xi \ln\left(\frac{|x_s-\xi|}{n-\xi}\right) d\xi = 1/2\left[\left(\xi_i^2 - x_s^2\right)\ln\left(|x_s-\xi_i|\right) - \left(\xi_{i-1}^2 - x_s^2\right)\ln\left(|x_s-\xi_{i-1}|\right) +\right.$$
$$\left.+\left(n^2-\xi_i^2\right)\ln\left(n-\xi_i\right) - \left(n^2-\xi_{i-1}^2\right)\ln\left(n-\xi_{i-1}\right) + \left(n-x_s\right)\left(\xi_i-\xi_{i-1}\right)\right], \tag{54}$$

$$\int\limits_{\xi_{i-1}}^{\xi_i} \ln\left(\frac{|x_s-\xi|}{n-\xi}\right) d\xi = \left(\xi_i - x_s\right)\ln\left(|x_s-\xi_i|\right) - \left(\xi_{i-1}-x_s\right)\ln\left(|x_s-\xi_{i-1}|\right) -$$
$$-\left(n-\xi_{i-1}\right)\ln\left(n-\xi_{i-1}\right) + \left(n-\xi_i\right)\ln\left(n-\xi_i\right). \tag{55}$$

Принимая во внимание, что $\lim\limits_{\xi_i\to x_s}\left(x_s-\xi_i\right)\ln\left(|x_s-\xi_i|\right) = 0$, $\lim\limits_{\xi_i\to x_s}\left(x_s^2-\xi_i^2\right)\ln\left(|x_s-\xi_i|\right) = 0$, $\lim\limits_{\xi_i\to x_s}\left(x_s^3-\xi_i^3\right)\ln\left(|x_s-\xi_i|\right) = 0$ интегралы (53)–(55) на сингулярных элементах будем рассматривать в смысле главного значения.

Численный анализ системы (49)–(52) показал хорошую сходимость решения от количества рассматриваемых элементов. Это дает возможность перейти от бесконечной в общем случае системы к рассмотрению конечного числа уравнений при достаточно хорошем согласовании результата. Так при рассмотрении нагружения типа нормального отрыва окрестности трещиноподобного дефекта двумя сосредоточенными силами $P_1^+ = 1$, $P_1^- = 1$ (см. рисунок), приложенными на расстоянии $\alpha_1 = 5$ в таблице приведена зависимость перемещений в первой узловой точке от количества расчетных элементов n при $\nu = 0.2$.

Для остальных узловых точек тенденция, приведенная в таблице, имеет аналогичный характер.

Результаты расчетов

n	50	200	500	700	900	1000
u_1^+	0.3421	0.3556	0.3584	0.3590	0.3593	0.3594
u_1^-	−0.3421	−0.3556	−0.3584	−0.3590	−0.3593	−0.3594
u_2^+	−0.1143	−0.1524	−0.1757	−0.1841	−0.1864	−0.1867
u_2^-	−0.1143	−0.1524	−0.1757	−0.1841	−0.1864	−0.1867
$\overline{\sigma}_{11}^1$	0.0636	0.0907	0.1015	0.1040	0.1063	0.1071

Однако при численном решении системы (49)–(52) возникает вопрос о выборе количества граничных элементов, при котором можно говорить о некотором достоверном результате. В данном случае можно подобрать соответствующий параметр путем сравнения получаемого решения, например, с известным аналитическим решением. В качестве тестовой задачи рассмотрим результаты работы В. М. Ентова и Р. Л. Салганика [10], где упругие полупространства (см. рисунок) скреплены идеально хрупкими связями Л. Прандтля и нагружены симметричной сосредоточенной нагрузкой: $P_1^+ = P_1^-$. Взаимодействие хрупких связей с полуплоскостями эквивалентно нагрузке со стороны слоя взаимодействия с коэффициентом Пуассона $\nu = 0$. При этом в слое взаимодействия $\sigma_{22} = 0$. Выражение для расклинивающего усилия в этом случае может быть получено на основании асимптотического решения работы [10]. Приведем его в безразмерном виде:

$$P^{(\alpha)} = \frac{\sigma_{11}^{(0)}}{2}\sqrt{\pi\alpha}, \tag{56}$$

где $\sigma_{11}^{(0)}$ — безразмерное напряжение в вершине разреза, $\alpha >> 1$.

Так, для единичной силы и $\alpha = 100$ из формулы (56) получаем $\sigma_{11}^{(0)} = 0.1128$. В таблице представлено значение среднего напряжения в первом узле $\overline{\sigma}_{11}^1$ в зависимости от количества расчетных элементов при $P_1^+ = P_1^- = 1$, $\alpha = 100$, $\nu = 0$. Из представленных результатов видно, что при анализе концевой области достаточно с хорошей степенью точности ограничится 1000 элементами. В дальнейшем все результаты будут приведены для $n = 1000$.

Напряженное состояние слоя в каждом из его элементов можно характеризовать средним напряжением и деформациями, определяемыми по формулам:

$$\hat{\sigma}_{ij}^k = \int\limits_{\xi}^{\xi+1} \overline{\sigma}_{ij}^k dx, \qquad \hat{\varepsilon}_{ij}^k = \int\limits_{-1/2}^{1/2} \int\limits_{\xi}^{\xi+1} \varepsilon_{ij}^k dx_1 dx, \tag{57}$$

где $\xi, \xi+1$ — координаты k-го единичного элемента; $\overline{\sigma}_{ij}^k$ — среднее напряжение по толщине слоя; ε_{ij}^k — деформация слоя в пределах k-го элемента. Следуя дискретной модели [14], переход из упругого состояния в пластическое [15] или в состояние разрушения будем рассматривать относительно неделимого элементарного объекта — квадрата со стороной δ_0. Соответствующие критерии в данном случае будем относить к средним характеристикам в смысле (57).

Отметим, что аналогичным образом можно определять начало процесса хрупкого разрушения, рассматривая в качестве критерия, например деформационный [16, 17], либо критерий максимального главного растягивающего напряжения [18].

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (*проект 10-01-97500*) *и Федеральной целевой программы «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России»* (*контракт П1125*).

Библиографический список

1. *Черепанов, Г. П.* Механика хрупкого разрушения / Г. П. Черепанов. – М.: Наука, 1974. – 640 с.

2. *Панасюк, В. В.* Механика квазихрупкого разрушения материалов / В. В. Панасюк. – Киев: Наук. думка, 1991. – 416 с.

3. *Черных, К. Ф.* Введение в физически и геометрически нелинейную теорию трещин / К. Ф. Черных. – М.: Наука, 1996. – 288 с.

4. *Dugdale, D. S.* Yielding of steel sheets containing slits / D. S. Dugdale // J. Mech. and Phys. Solids. – 1960. – V. 8, № 2. – P. 100–108.

5. *Леонов, М. Я.* Развитие мельчайших трещин в твердом теле / М. Я. Леонов, В. В. Панасюк // Прикладная механика. – 1959. – Т. 5, № 4. – С. 391–401.

6. *Клевцов, Г. В.* Микро- и макрозона пластической деформации как критерии предельного состояния материала при разрушении / Г. В. Клевцов, Л. Р. Ботвина // Проблемы прочности. – 1984. – № 4. – С. 24–28.

7. *Новожилов, В. В.* О перспективах построения критерия прочности при сложном нагружении / В. В. Новожилов, О. В. Рыбакина // Прочность при малом числе циклов нагружения. – М.: Наука, 1969. – С. 71–80.

8. *Макклинток, Ф.* Пластические аспекты разрушения / Ф. Макклинток // Разрушение. – М.: Мир, 1975. – Т. 3. – С. 67–262.

9. *Глаголев, В. В.* Дискретно-континуальная модель процесса симметричного разделения / В. В. Глаголев, А. А. Маркин, Т. А. Мерцалова // Прикладная механика и техническая физика. – 2009. – Т. 50, № 1. – С. 134–140.

10. *Ентов, В. М.* К модели хрупкого разрушения Прандтля / В. М. Ентов , Р. Л. Салганик // Изв. АН СССР. Механика твердого тела. – 1968. – № 6. – С. 87–99.

11. *Глаголев, В. В.* Определение термомеханических характеристик процесса разделения /В. В. Глаголев, А. А. Маркин // Изв. РАН. Механика твердого тела. – 2007. – № 6. – С. 101–112.

12. *Глаголев, В. В.* Оценка толщины слоя взаимодействия как универсального параметра материала /В. В. Глаголев, А. А. Маркин // Изв. РАН. Механика твердого тела. – 2006. – № 5. – С. 194–203.

13. *Лурье, А. И.* Теория упругости / А. И. Лурье. – М.: Наука, 1970. – 939 с.

14. *Новожилов, В. В.* О необходимом и достаточном критерии хрупкой прочности / В. В. Новожилов // ПММ. – 1969. – № 2. – С. 212–222.

15. *Ильюшин, А.А.* Пластичность. Основы общей математической теории / А.А. Ильюшин. – М.: Изд-во АН СССР, 1963. – 272 с.

16. *Дегтярев, В. П.* Деформации и разрушение в высоконапряженных конструкциях / В. П. Дегтярев. – М.: Машиностроение, 1987. – 105 с.

17. *Махутов, Н. А.* Деформационные критерии разрушения и расчет элементов конструкций на прочность / Н. А. Махутов. – М.: Машиностроение, 1981. – 270 с.

18. *Weighard, K.* Uber Spalter und Zerressen elastischer Korger / K. Weighard // Zeitsehr. Fur Math. Und Phys. – 1907. – Bd. 55, № 1/2. – S. 60–103.