прямоугольной области последовательности $\{k_1^{(S)}(u^{(S)})\}$ будет компактна в $C[R_1, R_2]$. Отсюда и из (15), (16) вытекает компактность $\{u^{(S)}(x, y)\}$ в $C^2(\overline{D})$ для прямоугольной области. Переходят в системе (15)–(17) к пределу при $S \to +\infty$, получим, что существует пара функций $\{k_1(u), u(x, y)\}$, удовлетворяющая условиям (26)–(29). Теорема доказана. □

Через $\tilde{f}(x, y)$ обозначим функцию, совпадающую на границах прямоугольной области соответственно с функциями $\varphi_i(x)$, $\phi_i(y)$, $i = 1, 2$, принадлежащую $C^{2+\alpha}(\bar{D})$. Функцию $\tilde{f}(x, y)$ можно определить следующем образом:

$$\tilde{f}(x, y) = \frac{l_1 - x}{l_1}\phi_1(y) + \frac{l_2 - y}{l_2}[\varphi_1(x) - \varphi_1(0) + \frac{x}{l_1}\varphi_1(0)] + \frac{x}{l_1}\left[\phi_2(y) - \phi_2(0) + \frac{y}{l_2}\phi_2(0)\right] +$$

$$+\frac{y}{l_2}\left[\varphi_2(x) - \varphi_2(0) + \frac{x}{l_1}\varphi_2(0)\right] - \frac{xy}{l_1 l_2}\phi_2(l_2).$$

Аналогично можно определить любой из коэффициентов $k_i(u)$, $i = 1, 2, \ldots, n - 1$.

Библиографический список

1. *Искендеров, А.Д.* Обратная задача об определении коэффициентов квазилинейного эллиптического уравнения / А.Д. Искендеров // Изв. АН. Аз.ССР. 1978. № 2. С. 80–85.
2. *Клибанов, М.В.* Единственность в целом обратных задач для одного класса дифференциальных уравнений / М.В. Клибанов // Дифференциальные уравнения. 1984. Т. 20, № 11. С. 1947–1953.
3. *Миранда, К.* Уравнения с частными производными эллиптического типа / К. Миранда. М.: Иностр. лит., 1957. 252 с.

УДК 517.955.8

АСИМПТОТИКА В ОКРЕСТНОСТИ ТОЧКИ ВЫРОЖДЕНИЯ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ С СИЛЬНЫМ ВЫРОЖДЕНИЕМ

А.В. Глушко, А.Д. Баев, Д.С. Шумеева

Воронежский государственный университет,
кафедра математического анализа
E-mail: kuchp2@math.vsu.ru, alexsandrbaev@mail.ru,
kuchp@math.vsu.ru

В работе рассматривается уравнение теплопроводности с сильным вырождением. Известно, что для таких задач не требуется задавать начальные условия при $t = 0$, так как существует лишь единственное гладкое решение такого уравнения. В работе выделяется класс единственности решения и изучается разрешимость уравнения в пространствах непрерывных функций. Построено асимптотическое представление решения в окрестности точки вырождения, то есть выделяется главная часть решения при $t \to +0$ и оцениваются остатки.

Ключевые слова: уравнение теплопроводности, сильное вырождение, асимптотика решения.

Asymptotics Around the Degeneration Spot of Heat Equation Solution with Strong Degeneration

A.V. Glushko, A.D. Baev, D.S. Shumeeva

Voronezh State University,
Chair of Mathematical Analysis
E-mail: kuchp2@math.vsu.ru, alexsandrbaev@mail.ru,
kuchp@math.vsu.ru

The paper deals with heat equation with strong degeneration. It is known that for such problems initial conditions are not stated at $t = 0$ as there exists the only smooth solution of such equation. The paper investigates a class of uniqueness of the solution and studies solvability of the problem in spaces of continuous functions. An asymptotic representation of solution around the degeneration spot is built, i.e. the main part of the solution is defined at $t \to +0$ and residuals are estimated.

Key words: heat equation, strong degeneration, asymptotics of solution.

ВВЕДЕНИЕ

В работе рассматривается уравнение теплопроводности с сильным вырождением:

$$\alpha(t)\frac{\partial v(x, t)}{\partial t} - \Delta v(x,t) = f(x,t), \quad x \in \mathrm{R}^3, \quad t \in (0; d). \tag{1}$$

Условие сильного вырождения налагает следующие ограничения на коэффициент $\alpha(t)$: $\alpha(t) \in C^n([0; d])$, $n \in \mathrm{N}$, $n \geq 2$; при этом предполагается, что $\alpha(0) = \alpha'(0) = \ldots = \alpha^{(n-1)}(0) = 0$,

$\alpha^{(n)}(0) \neq 0$, $n \geq 2$, $\alpha(\tau) > 0$. Задачи такого рода рассматривались многими авторами (см. обзор [1]). Известно, что для таких задач не требуется задавать начальные условия при $t = 0$, так как существует лишь единственное гладкое решение такого уравнения.

В связи с этим возникает вопрос: как ведет себя решение уравнения при $t \to +0$? Это в свою очередь приводит к задаче о построении асимптотики решения уравнения (1) при $t \to +0$.

Задача решена в несколько этапов. Во-первых, при помощи преобразования Фурье уравнение (1) сведено к обыкновенному дифференциальному уравнению с параметром, для которого построено формальное представление решения. Далее выделяется класс единственности решения и изучается разрешимость уравнения в пространствах непрерывных функций. Наконец, на заключительном этапе выделяется главная часть решения при $t \to +0$ и оцениваются остатки.

Введем в рассмотрение пространство С.Л. Соболева $W_1^k(\mathrm{R}^3)$ с нормой

$$||g(x)||_{W_1^k(\mathrm{R}^3)} = \sum_{|\alpha|\leq k} \int\limits_{\mathrm{R}^3} |D_x^\alpha g(x)|\, dx.$$

Перейдем к изложению основных результатов работы.

Теорема 1. *Пусть для функции $f(x,t)$ выполнено условие $\sup\limits_{[0;d]} ||f(\cdot,t)||_{W_1^2(\mathrm{R}^3)} < \infty$. Тогда при каждом $t > 0$ в $S'(\mathrm{R}^3)$ существует регулярное решение уравнения (1) вида*

$$v(x,t) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int\limits_{\mathrm{R}^3} e^{-i(x,s)} \int\limits_0^t \frac{1}{\alpha(\tilde{t})} \hat{f}(s,\tilde{t}) e^{-\int\limits_{\tilde{t}}^{t} \frac{d\tau}{\alpha(\tau)} |s|^2} d\tilde{t}\, ds. \tag{2}$$

Если, кроме того, $f(x,\, t) \in C(\mathrm{R}^3 \times [0;\, d])$ и существуют

$$\sup_{[0;\,d]} ||f(\cdot\,,t)||_{W_1^4(\mathrm{R}^3)} < \infty, \quad \sup_{[0;\,d]} ||x_k f(\cdot\,,t)||_{W_1^2(\mathrm{R}^3)} < \infty, \quad k = 1,2,3,$$

то решение (2) уравнения (1) непрерывно и равномерно по переменным $(x,t) \in \mathrm{R}^3 \times [0;d])$ ограничено вместе со своими производными по переменным x_k, $k = 1,2,3$ до второго порядка включительно. Функция $\alpha(t)\frac{\partial v(x,t)}{\partial t}$ непрерывна и равномерно по переменным $(x,\, t) \in \mathrm{R}^3 \times [0;\, d])$ ограничена. Справедливы оценки

$$\left|\alpha(t)\frac{\partial v(x,t)}{\partial t}\right| + |(1-\Delta_x)v(x,t)| \leq c \sup_{[0;\,d]} ||f(\cdot,t)||_{W_1^4(\mathrm{R}^3)} < \infty,$$

$$|v(x,t)| \leq \frac{c}{1+|x|} \left[\sup_{[0;\,d]} ||f(\cdot\,,t)||_{W_1^4(\mathrm{R}^3)} + \sup_{[0;\,d]} ||x_k f(\cdot\,,t)||_{W_1^2(\mathrm{R}^3)}\right]$$

с постоянной $c > 0$, не зависящей от $(x,\, t) \in \mathrm{R}^3 \times [0;\, d])$.

Приведем главный, на наш взгляд, результат работы.

Теорема 2. *Пусть функции $f(x,0)$ и $\left.\frac{\partial f(x,t)}{\partial t}\right|_{t=+0}$ принадлежат пространству Соболева $W_1^2(\mathrm{R}^3)$. Пусть также существуют числа $\varepsilon_0 > 0$ и $c_0 = c_0(\varepsilon) > 0$ такие, что равномерно при $0 \leq t \leq \varepsilon_0$ справедливы оценки*

$$\left\|\frac{\partial f(x,t)}{\partial t}\right\|_{W_1^k(\mathrm{R}^3)} \leq c_0 \left\|\frac{\partial f(x,0)}{\partial t}\right\|_{W_1^k(\mathrm{R}^3)}, \qquad k \in \{0;\, 2\}. \tag{3}$$

Тогда для решения (2) уравнения (1) справедливо асимптотическое представление при $t \to +0$:

$$v(x,t) = -\frac{1}{4\pi} \int\limits_{\mathrm{R}^3} \int\limits_{\mathrm{R}^3} \frac{f(x,0)}{|x-y|} dy + R(x,t),$$

где остаточный член $R(x,t)$ удовлетворяет равномерной по $x \in \mathrm{R}^3$ оценке

$$|R(x,t)| \leq ct \left[\|f(\cdot\,,0)\|_{W_1^2(\mathrm{R}^3)} + \left\|\frac{\partial f(\cdot,0)}{\partial t}\right\|_{W_1^2(\mathrm{R}^3)}\right].$$

1. СУЩЕСТВОВАНИЕ И ЕДИНСТВЕННОСТЬ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ С СИЛЬНЫМ ВЫРОЖДЕНИЕМ

Рассмотрим уравнение (1) с сильно вырождающимся коэффициентом $\alpha(t)$.

Доказательство теоремы 1.

Вначале докажем, что функция (2) является (формальным) обобщенным решением уравнения (1). Применим к уравнению (1) преобразование Фурье $F_{x\to s}$ (см. [2]). В результате получим уравнение

$$\alpha(t)\frac{\partial}{\partial t}F_{x\to s}[v(x,\,t)]+|s|^2F_{x\to s}[v(x,\,t)]=F_{x\to s}[f(x,\,t)]. \tag{4}$$

Обозначим $\hat{f}(s,t)=F_{x\to s}[f(x,t)]$. Формально, интегрируя уравнение (4), получим

$$F_{x\to s}[v(x,\,t)]=\int\limits_0^t\frac{1}{\alpha(\tilde{t})}\hat{f}(s,\tilde{t})e^{-\int\limits_{\tilde{t}}^{t}\frac{d\tau}{\alpha(\tau)}|s|^2}d\tilde{t}.$$

В дальнейшем доказательство теоремы 1 существенно опирается на следующие вспомогательные леммы, которые будут сформулированы без доказательства.

Лемма 1. *Решение уравнения* (1) *единственно в классе ограниченных, стремящихся к нулю при* $x\to\infty$ *функций.*

Лемма 2. *Пусть функция* $\psi(x_1,x_2,x_3)\in W_1^9(\mathrm{R}^3)$. *Тогда для любого* $\xi=(\xi_1,\xi_2,\xi_3)\in\mathrm{R}^3$ *справедлива оценка*

$$|F_{x_1\to\xi_1}F_{x_2\to\xi_2}F_{x_3\to\xi_3}\left[\psi\left(x_1,x_2,x_3\right)\right]|\le\frac{2^{12}}{\left(|\xi_1|^3+1\right)\left(|\xi_2|^3+1\right)\left(|\xi_3|^3+1\right)}||\psi||_{W_1^9(\mathrm{R}^3)}.$$

Зафиксируем некоторое $\delta>0$, которое позже будем выбирать достаточно малым, и введем в рассмотрение разбиение единицы

$$1\equiv\eta_1(\xi)+\eta_2(\xi),\qquad \xi\in[0,+\infty)\,,\qquad \eta_k(\xi)\in C^\infty\left([0,+\infty)\right),\quad k=1,2, \tag{5}$$

где $\eta_1(\xi)=\begin{cases}1, & \text{при}\quad 0\le\xi\le\delta,\\ 0, & \text{при}\quad \xi\ge 2\delta,\end{cases}$ $\quad\eta_2(\xi)=\begin{cases}0, & \text{при}\quad 0\le\xi\le\delta,\\ 1, & \text{при}\quad \xi\ge 2\delta,\end{cases}$ причем $0\le\eta_k(\xi)\le 1$.

Представим $v(x,t)$ в виде суммы

$$v(x,t)=v_1(x,t)+v_2(x,t), \tag{6}$$

где

$$v_k(x,t)=\frac{1}{(2\pi)^3}\int\limits_{\mathrm{R}^3}\eta_k\left(|s|^2\right)e^{-i(x,s)}\frac{u(s,t)}{|s|^2}ds,\qquad k=1,2,$$

$$u(s,t)=|s|^2F_{x\to s}[v(x,\,t)]=\int\limits_0^t\frac{|s|^2}{\alpha(\tilde{t})}\hat{f}(s,\tilde{t})e^{-\int\limits_{\tilde{t}}^{t}\frac{d\tau}{\alpha(\tau)}|s|^2}d\tilde{t}.$$

Докажем, что функция $v_1(x,t)$ и ее пространственные производные до второго порядка включительно непрерывны по переменным $x\in\mathrm{R}^3$ и $t\in[0;d]$. На основании представления (5) ($k=1$) получим следующую оценку:

$$|(1-\Delta_x)^pv_1(x,t)|=\left|\frac{1}{(2\pi)^3}\int\limits_{\mathrm{R}^3}\eta_1\left(|s|^2\right)e^{-i(x,s)}(1+|s|^2)^p\frac{u(s,t)}{|s|^2}ds\right|=$$

$$=\frac{1}{(2\pi)^3}\int\limits_{|s|\le 2\delta}(1+|s|^2)^p\int\limits_0^t\frac{\left|\hat{f}(s,\tilde{t})\right|}{|s|^2}e^{-\int\limits_{\tilde{t}}^{t}\frac{d\tau}{\alpha(\tau)}|s|^2}d\left[-\int\limits_{\tilde{t}}^{t}\frac{d\tau}{\alpha(\tau)}\,|s|^2\right]ds\le$$

$$\le\frac{1}{(2\pi)^3}\sup_{[0;\,d]}||f(\cdot\,,t)||_{W_1^{2+2p}(\mathrm{R}^3)}\int\limits_{|s|\le 2\delta}\frac{1}{|s|^2\left(1+|s|^2\right)^{2-p}}ds\le c\sup_{[0;\,d]}||f(\cdot,t)||_{W_1^{2+2p}(\mathrm{R}^3)}<\infty.$$

Здесь $p \in \{0;\,1\}$. Доказательство подобных оценок для функции $v_2(x,t)$ может быть проведено аналогично.

Докажем убывание $v_1(x,t)$ при $|x| \to \infty$. Справедливо представление

$$|x_k v_1(x,t)| = \left| \frac{1}{(2\pi)^3} \int\limits_{\mathrm{R}^3} e^{-i(x,s)} \int\limits_0^t \frac{1}{\alpha(\tilde t)} \frac{\partial}{\partial s_k} \left[\eta_2(|s|)\, \hat f(s,\tilde t)\, e^{-\int\limits_{\tilde t}^{t} \frac{d\tau}{\alpha(\tau)}\,|s|^2} \right] d\tilde t ds \right|, \tag{7}$$

где

$$\frac{\partial}{\partial s_k} \left[\eta_1(|s|)\, \hat f(s,\tilde t) e^{-\int\limits_{\tilde t}^{t} \frac{d\tau}{\alpha(\tau)}\,|s|^2} \right] = \frac{\partial}{\partial s_k} \left[\eta_1(|s|) \right] \hat f(s,\tilde t) e^{-\int\limits_{\tilde t}^{t} \frac{d\tau}{\alpha(\tau)}\,|s|^2} +$$

$$+\eta_1(|s|)\, e^{-\int\limits_{\tilde t}^{t} \frac{d\tau}{\alpha(\tau)}\,|s|^2} \left(-\int\limits_{\tilde t}^{t} \frac{d\tau}{\alpha(\tau)}\, 2s_k \right) \hat f(s,\tilde t) + \eta_1(|s|)\, e^{-\int\limits_{\tilde t}^{t} \frac{d\tau}{\alpha(\tau)}\,|s|^2} \frac{\partial \hat f(s,\tilde t)}{\partial s_k}. \tag{8}$$

Оценку выражения (7) проведем в три приема, оценив отдельно различные слагаемые сомножителя подынтегрального представления, порождаемые представлением (8).

1. Изучим функцию $\frac{\partial}{\partial s_k} \left[\eta_1(|s|) \right] \hat f(s,\tilde t) e^{-\int\limits_{\tilde t}^{t} \frac{d\tau}{\alpha(\tau)}\,|s|^2}$. Данная функция является финитной по переменным $s \in \mathrm{R}^3$: $\operatorname{supp} \frac{\partial}{\partial s_k} \left[\eta_1(|s|) \right] \subset B_{2\delta}(0) \backslash \bar B_\delta(0)$. Поэтому может быть проведена следующая оценка:

$$\left| \int\limits_{\mathrm{R}^3} e^{-i(x,s)} \int\limits_0^t \frac{\partial \eta_1(|s|)}{\partial s_k} \frac{1}{\alpha(\tilde t)} \hat f(s,\tilde t) e^{-\int\limits_{\tilde t}^{t} \frac{d\tau}{\alpha(\tau)}|s|^2} d\tilde t\, ds \right| \le$$

$$\le c_0 \sup_{[0;\,d]} ||f(\cdot\,,t)||_{W_1^4(\mathrm{R}^3)} \int\limits_{B_{2\delta}(0) \backslash B_\delta(0)} \frac{1}{|s|^2 \left(1+|s|^2\right)^2} ds \le c \sup_{[0;\,d]} ||f(\cdot\,,t)||_{W_1^4(\mathrm{R}^3)} < \infty. \tag{9}$$

2. Изучим функцию $\eta_1(|s|)\, e^{-\int\limits_{\tilde t}^{t} \frac{d\tau}{\alpha(\tau)}|s|^2} \left(-\int\limits_{\tilde t}^{t} \frac{d\tau}{\alpha(\tau)}\, 2s_k \right) \hat f(s,\tilde t)$. Справедлива оценка

$$\left| \int\limits_{\mathrm{R}^3} e^{-i(x,s)} \int\limits_0^t \frac{1}{\alpha(\tilde t)} \eta_1(|s|)\, e^{-\int\limits_{\tilde t}^{t} \frac{d\tau}{\alpha(\tau)}\,|s|^2} \left(-\int\limits_{\tilde t}^{t} \frac{d\tau}{\alpha(\tau)}\, 2s_k \right) \hat f(s,\tilde t) d\tilde t ds \right| \le$$

$$\le c_0 \sup_{[0;\,d]} ||f(\cdot\,,t)||_{W_1^4(\mathrm{R}^3)} \int\limits_{B_{2\delta}(0) \backslash B_\delta(0)} \frac{|s_k|}{|s|^2 \left(1+|s|^2\right)^2} ds \le c \sup_{[0;\,d]} ||f(\cdot\,,t)||_{W_1^4(\mathrm{R}^3)} < \infty. \tag{10}$$

3. Наконец, изучим функцию $\eta_1(|s|)\, e^{-\int\limits_{\tilde t}^{t} \frac{d\tau}{\alpha(\tau)}\,|s|^2} \frac{\partial \hat f(s,\tilde t)}{\partial s_k}$.

$$\left| \int\limits_{\mathrm{R}^3} e^{-i(x,s)} \int\limits_0^t \frac{1}{\alpha(\tilde t)} \eta_1(|s|)\, e^{-\int\limits_{\tilde t}^{t} \frac{d\tau}{\alpha(\tau)}\,|s|^2} \frac{\partial \hat f(s,\tilde t)}{\partial s_k} d\tilde t\, ds \right| \le$$

$$\le \sup_{[0;\,d]} ||x_k f(\cdot\,,t)||_{W_1^2(\mathrm{R}^3)} \int\limits_{B_{2\delta}(0)} \frac{1}{|s|^2 \left(1+|s|^2\right)} ds \le c \sup_{[0;\,d]} ||x_k f(\cdot\,,t)||_{W_1^2(\mathrm{R}^3)} < \infty. \tag{11}$$

Итак, из представлений (7) и (8), оценок (9)–(11) имеем

$$|x_k v_1(x,\,t)| \le c \left[\sup_{[0;\,d]} ||f(\cdot\,,t)||_{W_1^4(\mathrm{R}^3)} + \sup_{[0;\,d]} ||x_k f(\cdot\,,t)||_{W_1^2(\mathrm{R}^3)} \right].$$

Заметим также, что, повторяя оценку (11) с формальной заменой множителя $\frac{\partial \hat f(s,\tilde t)}{\partial s_k}$ на $\hat f(s,\tilde t)$, получим неравенство

$$|v_1(x,\,t)| \le c \sup_{[0;\,d]} ||f(\cdot\,,t)||_{W_1^2(\mathrm{R}^3)} \le \sup_{[0;\,d]} ||f(\cdot\,,t)||_{W_1^4(\mathrm{R}^3)}.$$

Из последних двух неравенств вытекает оценка

$$|v_1(x,t)| < \frac{c^*}{1+|x|}\left[\sup_{[0;\,d]}||f(\cdot\,,t)||_{W_1^4(\mathrm{R}^3)} + \sup_{[0;\,d]}||x_k f(\cdot\,,t)||_{W_1^2(\mathrm{R}^3)}\right]. \qquad (12)$$

Получение оценки

$$|v_2(x,t)| < \frac{c^*}{1+|x|}\left[\sup_{[0;\,d]}||f(\cdot\,,t)||_{W_1^4(\mathrm{R}^3)} + \sup_{[0;\,d]}||x_k f(\cdot\,,t)||_{W_1^2(\mathrm{R}^3)}\right] \qquad (13)$$

проводится аналогично (12) и отличается лишь в некоторых технических моментах оценки подынтегральных выражений в окрестности точки $s=0$.

Из неравенств (12), (13) и представления (6) следует, что при всех $x\in\mathrm{R}^3$, $t\in[0;d]$ для решения $v(x,t)$ уравнения (1) справедлива оценка

$$|v(x,t)| < \frac{c}{1+|x|}\left[\sup_{[0;\,d]}||f(\cdot\,,t)||_{W_1^4(\mathrm{R}^3)} + \sup_{[0;\,d]}||x_k f(\cdot\,,t)||_{W_1^2(\mathrm{R}^3)}\right].$$

Непрерывность и равномерная ограниченность по $(x,t)\in\mathrm{R}^3\times[0;\,d]$ функции $\alpha(t)\frac{\partial v(x,t)}{\partial t}$ вытекает из доказанной ранее непрерывности и равномерной ограниченности по $(x,t)\in\mathrm{R}^3\times[0;\,d]$ функции $\Delta_x v(x,\,t)$, условия теоремы $f(x,\,t)\in C(\mathrm{R}^3\times[0;\,d])$ и уравнения (1). Теорема доказана.

Следствие. *Из теоремы* 1 *и леммы* 1 *следует, что решение* (2) *уравнения* (1) *входит в выделенный в лемме 1 класс единственности.*

2. АСИМПТОТИЧЕСКОЕ ПОВЕДЕНИЕ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ С СИЛЬНЫМ ВЫРОЖДЕНИЕМ ПРИ $t\to+0$

Доказательство теоремы 2. В силу условий на функцию $\alpha(\tau)$, ее можно представить в виде конечного отрезка ряда Тейлора:

$$\alpha(\tau)=\frac{\alpha^{(n)}(0)}{n!}\tau^n+O(\tau^{n+1}),\qquad O(\tau^{n+1})=\frac{\alpha^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\tau^{n+1},\qquad 0\le\xi\le\tau. \qquad (14)$$

Аналогично, для $\hat f(s,\tilde t)$ справедливо представление

$$\hat f(s,\tilde t)=\hat f(s,0)+\frac{\partial\hat f}{\partial\tilde t}(s,z)\tilde t,\qquad 0\le z\le\tilde t.$$

Представим функцию $u(s,t)$, определенную в (11), в виде

$$u(s,t)=u_0(s,t)+u_1(s,t), \qquad (15)$$

где

$$u_0(s,t)=\int\limits_0^t e^{-\int\limits_{\tilde t}^{t}\frac{d\tau}{\alpha(\tau)}|s|^2}\frac{|s|^2}{\alpha(\tilde t)}\hat f(s,0)\,d\tilde t,\qquad u_1(s,t)=\int\limits_0^t e^{-\int\limits_{\tilde t}^{t}\frac{d\tau}{\alpha(\tau)}|s|^2}\frac{|s|^2}{\alpha(\tilde t)}\frac{\partial\hat f(s,z(\tilde t))\tilde t}{\partial\tilde t}d\tilde t. \qquad (16)$$

Оценим $u_1(s,t)$. Считаем, что $t\to+0$ и $0<\tilde t<t$, а также учтем, что при достаточно малых t можно считать на протяжении доказательства всей теоремы, что $0<\tilde t\le\tau\le t<\varepsilon_0<$ <1, из чего (при достаточно малом $\varepsilon_0\in(0;1)$) следует существование оценки $0<\alpha(\tau)=$ $=\frac{\alpha^{(n)}(0)}{n!}\tau^n+O(\tau^{n+1})\le\frac{3}{2}\frac{\alpha^{(n)}(0)}{n!}\tau^n$.

Введем обозначение $\sigma=\frac{\alpha^{(n)}(0)}{n!}$, тогда $\alpha(\tau)\le\frac{3}{2}\sigma\tau^n$, откуда $\frac{1}{\alpha(\tau)}\ge\frac{2}{3\sigma\tau^n}$, и, следовательно, $-\frac{1}{\alpha(\tau)}\le-\frac{2}{3\sigma\tau^n}<0$. Из последнего неравенства вытекает, что имеют место оценки

$$e^{-\int\limits_{\tilde t}^{t}\frac{d\tau}{\alpha(\tau)}|s|^2}\le e^{-\int\limits_{\tilde t}^{t}\frac{2}{3\sigma}\frac{d\tau}{\tau^n}|s|^2}\le e^{-\frac{2|s|^2}{3(n-1)\sigma}\left(\tilde t^{1-n}-t^{1-n}\right)}. \qquad (17)$$

Из (17) получаем оценку функции $u_1(s,\,t)$, введенной в (16).

$$|u_1(s,t)| \le \int\limits_0^t e^{-\frac{2\,|s|^2}{3(n-1)\sigma}\left(\tilde t^{1-n}-t^{1-n}\right)} \frac{2\,|s|^2}{\sigma \tilde t^n} \left|\frac{\partial \hat f(s,z(\tilde t))}{\partial \tilde t}\right| \tilde t\, d\tilde t. \tag{18}$$

Заметим, что благодаря условию (3), можно записать оценку

$$(1+|s|^2)^k \left|\frac{\partial \hat f(s,z(\tilde t))}{\partial \tilde t}\right| \le \left\|\frac{\partial f(x,z(\tilde t))}{\partial \tilde t}\right\|_{W_1^{2k}(\mathrm{R}^3)} \le c_0 \left\|\frac{\partial f(x,0)}{\partial \tilde t}\right\|_{W_1^{2k}(\mathrm{R}^3)}, \qquad k=0,1. \tag{19}$$

Используя замену $y=\tilde t/t$ и оценку (19) при $k=0$, продолжим оценку (18):

$$|u_1(s,t)| \le c_0 \left\|\frac{\partial f(x,0)}{\partial t}\right\|_{W_1^{0}(\mathrm{R}^3)} \frac{2t}{\sigma} \int\limits_0^1 e^{-\frac{2\,|s|^2}{3(n-1)\sigma} t^{1-n}\left(y^{1-n}-1\right)} t^{1-n} \frac{|s|^2}{y^{n-1}} dy.$$

Введем новую замену $\psi = y^{1-n}$ и продолжим оценки

$$|u_1(s,t)| \le c_0 \left\|\frac{\partial f(x,0)}{\partial t}\right\|_{W_1^{0}(\mathrm{R}^3)} \frac{2t\,|s|^2}{\sigma(n-1)} \int\limits_1^{+\infty} e^{-\frac{2\,|s|^2}{3(n-1)\sigma} t^{1-n}(\psi-1)} t^{1-n} \frac{1}{\psi^{\frac{1}{n-1}}} d\psi.$$

Далее проведем замену $\psi=\gamma+1$.

$$|u_1(s,t)| \le c_0 \left\|\frac{\partial f(x,0)}{\partial t}\right\|_{W_1^{0}(\mathrm{R}^3)} \frac{2t\,|s|^2}{\sigma(n-1)} \int\limits_0^{+\infty} e^{-\frac{2\,|s|^2}{3(n-1)\sigma} t^{1-n}\gamma} t^{1-n} \frac{1}{(1+\gamma)^{\frac{1}{n-1}}} d\gamma \le$$

$$\le c_0 \left|\frac{\partial \hat f(s,0)}{\partial \tilde t}\right| \frac{2t\,|s|^2}{\sigma(n-1)} t^{1-n} \frac{3(n-1)\sigma}{2\,|s|^2\, t^{1-n}} \le 3c_0 \left\|\frac{\partial f(x,0)}{\partial t}\right\|_{W_1^{0}(\mathrm{R}^3)} t. \tag{20}$$

Соответственно представлениям (11) и (15) можем записать равенство

$$v(x,t) = w_0(x,t) + w_1(x,t),$$

где интегралам $w_0(x,t),\ w_1(x,t)$ соответствуют представления

$$w_0(x,t) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int\limits_{\mathrm{R}^3} e^{-i(x,s)} u_0(s,t) \frac{ds}{|s|^2}, \qquad w_1(x,t) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int\limits_{\mathrm{R}^3} e^{-i(x,s)} u_1(s,t) \frac{ds}{|s|^2}\,.$$

Оценим выражение $w_1(x,t)$с использованием оценки (19) при $k=1$.

$$|w_1(x,t)| = \left|\frac{1}{(2\pi)^3} \int\limits_{\mathrm{R}^3} e^{-i(x,s)} u_1(s,t) \frac{ds}{|s|^2}\right| \le \frac{3c_0 t}{(2\pi)^3} \int\limits_{\mathrm{R}^3} \frac{1}{(1+|s|^2)\,|s|^2} ds \left\|\frac{\partial f(x,0)}{\partial t}\right\|_{W_1^{2}(\mathrm{R}^3)}.$$

Итак, нами доказана оценка

$$|w_1(x,\,t)| \le c_1 t \left\|\frac{\partial f(x,0)}{\partial t}\right\|_{W_1^{2}(\mathrm{R}^3)}, \tag{21}$$

Перейдем к изучению $u_0(s,t)$. Представим $u_0(s,t)$ в виде суммы $u_0(s,t) = u_{00}(s,t) + u_{01}(s,t)$, где соответственно представлению (14) функции $\alpha(\tilde t)$ мы обозначили:

$$u_{00}(s,t) = \frac{n!}{\alpha^{(n)}(0)} \int\limits_0^t e^{-\int\limits_{\tilde t}^{t} \frac{d\tau}{\alpha(\tau)}\,|s|^2} |s|^2\, \hat f(s,0) \frac{d\tilde t}{\tilde t^n},$$

$$u_{01}(s,t) = \frac{n!}{\alpha^{(n)}(0)} \int\limits_0^t e^{-\int\limits_{\tilde t}^{t} \frac{d\tau}{\alpha(\tau)}\,|s|^2} \left[1 - \frac{1}{1+O(\tilde t)}\right] |s|^2\, \hat f(s,0) \frac{d\tilde t}{\tilde t^n}.$$

Оценим по модулю $u_{01}(s,t)$. Заметим, что справедливы неравенства

$$\left|1-\frac{1}{1+O(\tilde{t})}\right| \le \frac{|O(\tilde{t})|}{|1+O(\tilde{t})|} \le c\tilde{t}.$$

Как и при оценке функции $u_1(s,t)$, будем использовать неравенство (17). Аналогично оценке (20) имеем оценку

$$|u_{01}(s,t)| \le c'|\hat{f}(s,0)|t \le \frac{c''t}{1+|s|^2}\,\|f(\cdot,0)\|_{W_1^2(\mathrm{R}^3)}\ .$$

Введем обозначение $w_{01}(x,t) = F^{-1}_{s\to x}\left[\frac{u_{01}(s,t)}{|s|^2}\right]$, тогда, как и ранее, при получении оценки (21) можем записать

$$|w_{01}(x,t)| \le c''t\int\limits_{\mathrm{R}^3}\frac{1}{|s|^2\,(1+|s|^2)}ds\,\|f(\cdot\,,0)\|_{W_1^2(\mathrm{R}^3)} = ct\,\|f(\cdot\,,0)\|_{W_1^2(\mathrm{R}^3)}\,. \tag{22}$$

Перейдем к оценке $u_{00}(s,t)$. Для этого рассмотрим интеграл

$$-\int\limits_{\tilde{t}}^{t}\frac{d\tau}{\alpha(\tau)} = -\frac{n!}{\alpha^{(n)}(0)}\int\limits_{\tilde{t}}^{t}\frac{d\tau}{\tau^n}+\frac{n!}{\alpha^{(n)}(0)}\int\limits_{\tilde{t}}^{t}O(\tau^{1-n})d\tau.$$

Поэтому справедливо представление

$$e^{-\int\limits_{\tilde{t}}^{t}\frac{d\tau}{\alpha(\tau)}|s|^2} = e^{-\frac{n!}{\alpha^{(n)}(0)}\int\limits_{\tilde{t}}^{t}\frac{d\tau}{\tau^n}|s|^2}+\left[e^{\left\{-\frac{n!}{\alpha^{(n)}(0)}\int\limits_{\tilde{t}}^{t}\frac{d\tau}{\tau^n}+\frac{n!}{\alpha^{(n)}(0)}\int\limits_{\tilde{t}}^{t}O(\tau^{1-n})d\tau\right\}|s|^2}-e^{-\frac{n!}{\alpha^{(n)}(0)}\int\limits_{\tilde{t}}^{t}\frac{d\tau}{\tau^n}|s|^2}\right].$$

Введем обозначение

$$R(t,\tilde{t}) = e^{-\frac{n!}{\alpha^{(n)}(0)}\int\limits_{\tilde{t}}^{t}\frac{d\tau}{\tau^n}}\left[e^{\int\limits_{\tilde{t}}^{t}O(\tau^{1-n})d\tau|s|^2}-1\right]. \tag{23}$$

Оценим $R(t,\tilde{t})$. Справедливо очевидное интегральное тождество:

$$e^{\int\limits_{\tilde{t}}^{t}O(\tau^{1-n})d\tau|s|^2}-1 = |s|^2\int\limits_{\tilde{t}}^{t}O(\tau^{1-n})d\tau\int\limits_0^1 e^{\int\limits_{\tilde{t}}^{t}O(\tau^{1-n})d\tau|s|^2 z}dz. \tag{24}$$

Ниже рассмотрим два случая степени вырождения функции $\alpha(t)$ в нуле: $n=2$ и $n>2$.

Пусть $n>2$. Тогда справедливо неравенство, вытекающее из тождества (24)

$$\left|e^{\int\limits_{\tilde{t}}^{t}O(\tau^{1-n})d\tau|s|^2}-1\right| \le \frac{c\,|s|^2}{n-2}\left(\tilde{t}^{2-n}-t^{2-n}\right)\left|\int\limits_0^1 e^{\int\limits_{\tilde{t}}^{t}O(\tau^{1-n})d\tau|s|^2 z}dz\right|.$$

Так как $e^{-\frac{n!}{\alpha^{(n)}(0)}\int\limits_{\tilde{t}}^{t}\frac{d\tau}{\tau^n}|s|^2} = e^{-\frac{n!}{(n-1)\alpha^{(n)}(0)}\left(\tilde{t}^{1-n}-t^{1-n}\right)|s|^2}$, то

$$R(t,\tilde{t}) \le c'e^{-\frac{n!}{2(n-1)\alpha^{(n)}(0)}t^{1-n}\left(\frac{\tilde{t}^{1-n}}{t^{1-n}}-1\right)|s|^2}\,|s|^2\,t^{2-n}\left(\frac{\tilde{t}^{2-n}}{t^{2-n}}-1\right)\times$$
$$\times e^{-t^{1-n}\left[\frac{n!}{2(n-1)\alpha^{(n)}(0)}\left(\frac{\tilde{t}^{1-n}}{t^{1-n}}-1\right)|s|^2-\frac{c}{n-2}t\left(\frac{\tilde{t}^{2-n}}{t^{2-n}}-1\right)|s|^2\right]}. \tag{25}$$

Так как $0\le\frac{\tilde{t}}{t}\le 1$, то $\left(\frac{\tilde{t}}{t}\right)^{1-n}\ge\left(\frac{\tilde{t}}{t}\right)^{2-n}$. Поэтому

$$\frac{n!}{2(n-1)\alpha^{(n)}(0)}\left(\frac{\tilde{t}^{1-n}}{t^{1-n}}-1\right)-\frac{c}{n-2}t\left(\frac{\tilde{t}^{2-n}}{t^{2-n}}-1\right)\ge\left[\left(\frac{\tilde{t}}{t}\right)^{2-n}-1\right]\left[\frac{n!}{2(n-1)\alpha^{(n)}(0)}-\frac{c}{n-2}t\right]\ge 0,$$

так как $t > 0$ мало, следовательно,

$$e^{-t^{1-n}\left[\frac{n!}{2(n-1)\alpha^{(n)}(0)}\left(\frac{\tilde{t}^{1-n}}{t^{1-n}}-1\right)|s|^2-\frac{c}{n-2}t\left(\frac{\tilde{t}^{2-n}}{t^{2-n}}-1\right)|s|^2\right]} \le e^0 = 1. \tag{26}$$

Из неравенств (25) и (26) вытекает оценка

$$\left|R(t,\tilde{t})\right| \le c' e^{-\frac{n!}{2(n-1)\alpha^{(n)}(0)}t^{1-n}\left(\frac{\tilde{t}^{1-n}}{t^{1-n}}-1\right)|s|^2} |s|^2\, t^{2-n}\left(\frac{\tilde{t}^{2-n}}{t^{2-n}}-1\right). \tag{27}$$

Благодаря неравенству (27), можем записать представление

$$u_{00}(s,t) = u_{00}^0(s,t) + u_{00}^1(s,t),$$

где

$$u_{00}^0(s,t) = \frac{n!}{\alpha^{(n)}(0)}\int\limits_0^t e^{-\frac{n!}{\alpha^{(n)}(0)}\int\limits_{\tilde{t}}^{t}\frac{d\tau}{\tau^n}}\frac{d\tilde{t}}{\tilde{t}^n}\hat{f}(s,0)\,|s|^2\,, \tag{28}$$

$$u_{00}^1(s,t) = \frac{n!}{\alpha^{(n)}(0)}\int\limits_0^t e^{-\frac{n!}{2(n-1)\alpha^{(n)}(0)}t^{1-n}\left(\frac{\tilde{t}^{1-n}}{t^{1-n}}-1\right)|s|^2} t^{2-n}\left(\frac{\tilde{t}^{2-n}}{t^{2-n}}-1\right)\hat{f}(s,0)\,|s|^2\,d\tilde{t}.$$

Проведем оценку интеграла $u_{00}^1(s,t)$:

$$\left|u_{00}^1(s,t)\right| \le ct^{2-n}\left|\hat{f}(s,0)\right||s|^2\int\limits_0^t e^{-\frac{n!}{2(n-1)\alpha^{(n)}(0)}t^{1-n}\left(\frac{\tilde{t}^{1-n}}{t^{1-n}}-1\right)|s|^2}\left(\frac{\tilde{t}^{2-n}}{t^{2-n}}-1\right)d\tilde{t}.$$

Введем замену $\xi = \frac{\tilde{t}}{t}$. Продолжим оценку

$$\left|u_{00}^1(s,t)\right| \le ct^{2-n}\left|\hat{f}(s,0)\right||s|^2\int\limits_0^t e^{-\frac{n!}{2(n-1)\alpha^{(n)}(0)}t^{1-n}\left(\xi^{1-n}-1\right)|s|^2}\left(\xi^{2-n}-1\right)td\xi.$$

Затем, заменим $z = \xi^{1-n}$:

$$\left|u_{00}^1(s,t)\right| \le ct^{3-n}\left|\hat{f}(s,0)\right||s|^2\,\frac{1}{n-1}\int\limits_1^{+\infty} e^{-\frac{n!}{2(n-1)\alpha^{(n)}(0)}t^{1-n}(z-1)|s|^2}\left(z^{-\frac{n-2}{n-1}-\frac{n}{n-1}}-z^{-\frac{n}{n-1}}\right)dz.$$

Заметим, что $z^{-\frac{n-2}{n-1}-\frac{n}{n-1}} - z^{-\frac{n}{n-1}} = z^{-2} - z^{-\frac{n-1+1}{n-1}} = z^{-2} - z^{-1-\frac{1}{n-1}}$.

Проведем еще одну замену $y = z-1$, тогда

$$\left|u_{00}^1(s,t)\right| \le ct^{3-n}\left|\hat{f}(s,0)\right||s|^2\,\frac{1}{n-1}\int\limits_0^{+\infty} e^{-\frac{n!}{2(n-1)\alpha^{(n)}(0)}t^{1-n}y|s|^2}\left((y+1)^{-2}-(y+1)^{-1-\frac{1}{n-1}}\right)dy.$$

Так как при $n > 2$, $y > 0$, справедлива оценка $\left|(y+1)^{-2}-(y+1)^{-1-\frac{1}{n-1}}\right| \le 1+1 = 2$, то верно неравенство

$$\left|u_{00}^1(s,t)\right| \le \frac{c\,|s|^2}{t^{n-3}}\left|\hat{f}(s,0)\right|\frac{4\alpha^{(n)}(0)}{n!t^{1-n}\,|s|^2} = c_3t^2\left|\hat{f}(s,0)\right| \le \frac{c_3t^2}{(1+|s|^2)}\left\|f(\cdot,0)\right\|_{W_1^2(\mathrm{R}^3)}. \tag{29}$$

Введем обозначение

$$w_{00}^1(x,t) = F_{s\to x}^{-1}\left[u_{00}^1(s,t)\,|s|^{-2}\right]. \tag{30}$$

На основании неравенства (29) можем оценить функцию (30) следующим образом:

$$\left|w_{00}^1(x,t)\right| \le c_3't^2\int\limits_{\mathrm{R}^3}\frac{1}{|s|^2\,(1+|s|^2)}ds\,\|f(\cdot,0)\|_{W_1^2(\mathrm{R}^3)} = c''t^2\,\|f(\cdot,0)\|_{W_1^2(\mathrm{R}^3)}. \tag{31}$$

Нам осталось получить точную асимптотику при $t \to +0$ функции $u_{00}^0(s,t)$. Имеет место вытекающее из (28) представление

$$u_{00}^0(s,t) = \frac{n!}{\alpha^{(n)}(0)} \int\limits_0^t e^{-\frac{n!}{(n-1)\alpha^{(n)}(0)} t^{1-n}\left(\frac{\tilde{t}^{1-n}}{t^{1-n}}-1\right)|s|^2} t^{-n+1} \left(\frac{\tilde{t}}{t}\right)^{-n} \hat{f}(s,0)\,|s|^2\, \frac{d\tilde{t}}{t} \quad . \qquad (32)$$

Произведем в (32) замену $\xi = \frac{\hat{t}}{t}$. Получим

$$u_{00}^0(s,t) = \frac{n!}{\alpha^{(n)}(0)} \int\limits_0^t e^{-\frac{n!}{(n-1)\alpha^{(n)}(0)} t^{1-n}\left(\xi^{-n+1}-1\right)|s|^2} t^{-n+1} \xi^{-n} \hat{f}(s,0)\,|s|^2\, d\xi.$$

Далее, введем замену $z = \xi^{-n+1}$, тогда

$$u_{00}^0(s,t) = \frac{n!}{(n-1)\alpha^{(n)}(0)} \int\limits_1^{+\infty} e^{-\frac{n!}{(n-1)\alpha^{(n)}(0)} t^{1-n}(z-1)|s|^2} t^{-n+1} \hat{f}(s,0)\,|s|^2\, dz.$$

Затем следует замена $y = z - 1$.

$$u_{00}^0(s,t) = \frac{n! t^{-n+1} \hat{f}(s,0)\,|s|^2}{(n-1)\alpha^{(n)}(0)} \frac{(n-1)\alpha^{(n)}(0)}{n! t^{1-n}\,|s|^2} = \hat{f}(s,0).$$

Далее, для $w_{00}^0(x,t) = F_{s\to x}^{-1}\left[\frac{u_{00}^0(s,t)}{|s|^2}\right]$ получим

$$w_{00}^0(x,t) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int\limits_{\mathrm{R}^3} e^{-i(x,s)} \frac{\hat{f}(s,0)}{|s|^2} ds = -\frac{1}{4\pi} \int\limits_{\mathrm{R}^3} \frac{f(x,0)}{|x-y|} dy. \qquad (33)$$

Из (21), (22), (31) и (33) получаем, что для решения уравнения (1)

$$v(x,t) = w_1(x,t) + w_{01}(x,\, t) + w_{00}^1(x,\, t) + w_{00}^0(x,\, t)$$

справедливо асимптотическое представление:

$$v(x,t) = -\frac{1}{4\pi} \int\limits_{\mathrm{R}^3}\int\limits_{\mathrm{R}^3} \frac{f(x,0)}{|x-y|} dy + R(x,t),$$

где $|R(x,t)| \le ct\left[\|f(\cdot\,,0)\|_{W_1^2(\mathrm{R}^3)} + \left\|\frac{\partial f(\cdot\,,0)}{\partial t}\right\|_{W_1^2(\mathrm{R}^3)}\right]$. Таким образом, в случае $n > 2$ утверждение теоремы доказано полностью.

Рассмотрим случай $n = 2$. В этом случае изменения коснутся лишь исследования функции $u_{00}(s,\, t)$ и построенной на основе ее прообраза Фурье функции $F_{s\to x}^{-1}\left[\frac{u_{00}(s,\,t)}{|s|^2}\right]$. Именно в момент рассмотрения этой функции мы разделили доказательство на два различных случая. Оценим выражение

$$\left| e^{\int\limits_{\tilde{t}}^{t} O(\tau^{-1})\,d\tau\,|s|^2} - 1 \right| \le |s|^2 c \int\limits_{\tilde{t}}^{t} \tau^{-1} d\tau \left| \int\limits_0^1 e^{\int\limits_{\tilde{t}}^{t} O(\tau^{-1})\,d\tau\,|s|^2 z} dz \right| = |s|^2 c \ln\frac{t}{\tilde{t}} \left| \int\limits_0^1 e^{\int\limits_{\tilde{t}}^{t} O(\tau^{-1})\,d\tau\,|s|^2 z} dz \right|.$$

Так как $e^{-\frac{2}{\alpha''(0)}\int\limits_{\tilde{t}}^{t}\frac{d\tau}{\tau^2}|s|^2} = e^{-\frac{2}{\alpha''(0)}|s|^2\left(\frac{1}{\tilde{t}}-\frac{1}{t}\right)}$, то для величины $R(t,\tilde{t})$, введенной в (23), справедлива следующая оценка:

$$\left|R(t,\tilde{t})\right| \le c e^{-\frac{1}{\alpha''(0)}|s|^2 t^{-1}\left(\frac{t}{\tilde{t}}-1\right)} |s|^2 \ln\frac{t}{\tilde{t}} \left| \int\limits_0^1 e^{c_0|s|^2\left[-t^{-1}\left(\frac{t}{\tilde{t}}-1\right)+c'\ln\frac{t}{\tilde{t}}z\right]} dz \right|.$$

Введем в рассмотрение вспомогательную функцию $f(\xi) = \frac{1}{\xi} + c' \ln \xi\, z$, причем будем считать, что $\xi > 0$ — достаточно мало. Тогда $f'(\xi) = -\frac{1}{\xi^2} + c'\frac{1}{\xi} z = \frac{-1+c'\xi z}{\xi^2}$. Так как $\xi > 0$ мало, то будем считать, что $\xi < \frac{1}{c'}$, тогда для $0 \le z \le 1$: $-1 + c'\xi z < 0$, тогда $f(\xi)$ — монотонно убывающая функция. Рассмотрим выражение

$$-t^{-1}\left(\frac{t}{\tilde{t}} - 1\right) + c' \ln \frac{t}{\tilde{t}} z = \left(\frac{1}{t} + c' z \ln t\right) - \left(\frac{1}{\tilde{t}} + c' z \ln \tilde{t}\right) = f(t) - f(\tilde{t}).$$

Так как $t > \tilde{t}$, то $f(t) < f(\tilde{t})$, следовательно, $-t^{-1}\left(\frac{t}{\tilde{t}} - 1\right) + c' \ln \frac{t}{\tilde{t}} z \le 0$. Отсюда имеем $e^{c_0 |s|^2 \left[-t^{-1}\left(\frac{t}{\tilde{t}}-1\right) + c' \ln \frac{t}{\tilde{t}} z\right]} \le 1$. С учетом последнего неравенства продолжим оценку $\left|R(t,\tilde{t})\right|$. Получим аналог оценки (27).

$$\left|R(t,\tilde{t})\right| \le c e^{-\frac{1}{\alpha''(0)} |s|^2 t^{-1}\left(\frac{t}{\tilde{t}}-1\right)} |s|^2 \ln t/\tilde{t}.$$

Как и для случая $n > 2$ функцию $u_{00}(s,t)$ представим в виде суммы

$$u_{00}(s,t) = u_{00}^0(s,t) + u_{00}^1(s,t),$$

где

$$u_{00}^0(s,t) = \frac{2}{\alpha''(0)} \int\limits_0^t e^{-\frac{2}{\alpha''(0)} \int\limits_{\tilde{t}}^{t} \frac{d\tau}{\tau^2} |s|^2} \frac{d\tilde{t}}{\tilde{t}^2} \hat{f}(s,0)\, |s|^2, \tag{34}$$

$$u_{00}^1(s,t) = \frac{2}{\alpha''(0)} \int\limits_0^t e^{-\frac{1}{\alpha''(0)} t^{-1}\left[\frac{t}{\tilde{t}}-1\right] |s|^2} \ln \frac{t}{\tilde{t}} \hat{f}(s,0)\, |s|^2\, d\tilde{t}. \tag{35}$$

Совершив в (35) замену $\xi = \frac{\tilde{t}}{t}$, оценим $u_{00}^1(s,t)$:

$$\left|u_{00}^1(s,t)\right| \le \frac{2\hat{f}(s,0)\, |s|^2}{\alpha''(0)} \int\limits_0^1 e^{-\frac{1}{\alpha''(0)} t^{-1}\left[\xi^{-1}-1\right] |s|^2} (-\ln \xi)\, t\, d\xi.$$

Далее проведем замену $z = \frac{1}{\xi}$, тогда

$$\left|u_{00}^1(s,t)\right| \le \frac{2t\hat{f}(s,0)\, |s|^2}{\alpha''(0)} \int\limits_1^{+\infty} e^{-\frac{1}{\alpha''(0)} t^{-1}[z-1] |s|^2} \ln z \frac{dz}{z^2}.$$

Затем следует замена $y = z - 1$. Получаем неравенство

$$\left|u_{00}^1(s,t)\right| \le \frac{2t\hat{f}(s,0)\, |s|^2}{\alpha''(0)} \int\limits_0^{+\infty} e^{-\frac{1}{\alpha''(0)} t^{-1} y |s|^2} \ln(y+1) \frac{dy}{(y+1)^2}. \tag{36}$$

Рассмотрим вспомогательную функцию $f(y) = \frac{\ln(y+1)}{(y+1)^2}, \quad y \in [0, +\infty)$. Функция $f(y)$ непрерывна и $f(y) \to +0$, при $y \to +\infty$. Поэтому $f(y)$ ограничена, то есть существует $k > 0$ такое, что справедлива оценка $|f(y)| \le \frac{k}{2}\alpha''(0)$. Продолжим оценку (36):

$$\left|u_{00}^1(s,t)\right| \le k t \hat{f}(s,0)\, |s|^2 \int\limits_0^{+\infty} e^{-\frac{1}{\alpha''(0)} t^{-1} y |s|^2} dy \le k_2 t^2 \hat{f}(s,0). \tag{37}$$

На основании оценки (37) для функции $v_{00}^1(x,t) = F_{s\to x}^{-1}\left[\frac{u_{00}^1(s,t)}{|s|^2}\right]$, как и в случае $n > 2$, получаем неравенство

$$\left|v_{00}^1(x,t)\right| \le k_3 t^2 \int\limits_{\mathrm{R}^3} \frac{1}{|s|^2 (1+|s|^2)} ds \, \|f(\cdot,0)\|_{W_1^2(\mathrm{R}^3)} = k_4 t^2 \, \|f(\cdot,0)\|_{W_1^2(\mathrm{R}^3)}\,. \tag{38}$$

Получим, наконец, точную асимптотику при $t \to +0$ функции $u_{00}^0(s,t)$. Имеем из (34)

$$u_{00}^0(s,t) = \frac{2}{\alpha''(0)} \int\limits_0^t e^{-\frac{2|s|^2}{\alpha''(0)\,t}\left(\frac{t}{\tilde{t}}-1\right)} t^{-1} \left(\frac{\tilde{t}}{t}\right)^{-2} d\left(\frac{\tilde{t}}{t}\right) \hat{f}(s,0)\,|s|^2.$$

Далее проводим те же замены, что и в предыдущей оценке.

$$u_{00}^0(s,t) = \frac{2}{\alpha''(0)t} \int\limits_0^1 e^{-\frac{2|s|^2}{\alpha''(0)\,t}\left(z^{-1}-1\right)} z^{-2} dz\, \hat{f}(s,0)\,|s|^2 = \frac{2\hat{f}(s,0)}{\alpha''(0)t}\,|s|^2\,\frac{\alpha''(0)\,t}{2\,|s|^2} = \hat{f}(s,0). \qquad (39)$$

Из (39) для функции $v_{00}^0(x,t) = F_{s\to x}^{-1}\left[\frac{u_{00}^0(s,t)}{|s|^2}\right]$ следует представление

$$v_{00}^0(x,t) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int\limits_{\mathrm{R}^3} e^{-i(x,s)} \frac{\hat{f}(s,0)}{|s|^2} ds = -\frac{1}{4\pi} \int\limits_{\mathrm{R}^3} \frac{f(x,0)}{|x-y|} dy. \qquad (40)$$

Представление (40), оценка (38) завершают необходимые в случае $n = 2$ выкладки, отличающие этот случай от случая $n > 2$. Теорема доказана.

Библиографический список

1. *Глушко, В.П.* Вырождающиеся эллиптические уравнения высокого порядка: пространства, операторы, граничные задачи / В.П. Глушко, Ю.Б. Савченко // Итоги науки и техн. Сер. Мат. анализ. 1985. Т. 23. С. 125–218.
2. *Владимиров, В.С.* Уравнения математической физики / В.С. Владимиров. М.: Наука, 1976. 527 с.

УДК 501.1

ОБ ОПЕРАТОРЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ДЛЯ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ ДИРАКА С СУММИРУЕМЫМИ ПОТЕНЦИАЛАМИ

И.М. Гусейнов[1], **А.Р. Лятифова**[2]

[1] Бакинский государственный университет,
кафедра прикладной математики;
[2] Институт математики и механики НАН Азербайджана, Баку,
отдел функционального анализа
E-mail: hmhuseynov@gmail.com, latifovaaygun@gmail.com

В работе доказано существование оператора преобразования для оператора Дирака с суммируемыми потенциалами и найдена связь потенциала и ядра оператора преобразования в данном случае.

Ключевые слова: оператор преобразования, оператор Дирака.

On Transformation Operator for the System of Dirac Equations with Summable Potentials

H.M. Huseynov[1], **A.R. Latifova**[2]

[1] Baku State University,
Chair of Applied Mathematics;
[2] Institute of Mathematics and Mechanics of NAS of Azerbaijan, Baku,
Functional Analysis Department
E-mail: hmhuseynov@gmail.com, latifovaaygun@gmail.com

The paper proves the existence of the transformation operator for summable functions and finds the analogy of the formula for the potential with the transformation operator in the given case.

Key words: transformation operator, Dirac operator.

ВВЕДЕНИЕ

Рассмотрим граничную задачу, порожденную системой уравнений Дирака

$$B\frac{dy}{dx} + Q(x)y = \lambda y,\ x \in (0,1)\,, \qquad (1)$$

и граничными условиями

$$y_1\,(0) = y_1\,(1) = 0. \qquad (2)$$

Здесь λ — спектральный параметр, $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, $Q(x) = \begin{pmatrix} p(x) & q(x) \\ q(x) & -p(x) \end{pmatrix}$, $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$, $p(x)$ и $q(x)$ — вещественно значные функции.