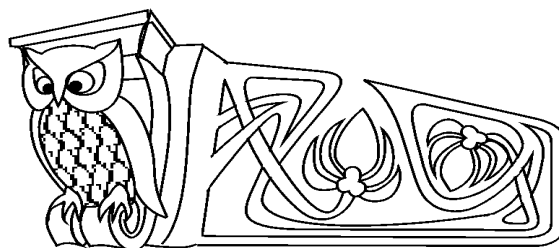




УДК 539.374

# УСТОЙЧИВОСТЬ ВЕРТИКАЛЬНЫХ ГОРНЫХ ВЫРАБОТОК В УПРУГОВЯЗКОПЛАСТИЧЕСКИХ МАССИВАХ С ПОРИСТОЙ СТРУКТУРОЙ



Д.В. Гоцев, А.Н. Стасюк\*

Военный авиационный инженерный университет, Воронеж, кафедра математики

\*Воронежский государственный университет, кафедра теоретической и прикладной механики  
E-mail: rbgotsev@mail.ru

Построена математическая модель основного напряженно-деформированного состояния вертикальной горной выработки, учитывающая упруговязкопластические свойства массива, а также пористую структуру материала. В рамках точных трехмерных уравнений устойчивости исследована устойчивость основного состояния вертикальной выработки в массивах горных пород со сжатыми порами. Дана оценка влияния на величину критического давления параметров горного массива.

**Ключевые слова:** пористые материалы со сложной реологией сжатого скелета, цилиндрические горные выработки, напряженно-деформированное состояние, точные трехмерные уравнения устойчивости, устойчивость основного состояния.

Stability of Vertical Mountain Developments in Elastic-Viscous-Plastic Files with Porous Structure

D.V. Gotsev, A.N. Stasjuk\*

Military Aviation Engineering University, Voronezh, Chair of Mathematics

\*Voronezh State University, Chair of Theoretical and Applied Mechanics  
E-mail: rbgotsev@mail.ru

The mathematical model of the basic intense-deformed condition of the vertical mountain development, considering elastic-viscous-plastic properties of a file, and also porous structure of a material is constructed. Within the limits of the exact three-dimensional stability equations stability of the basic condition of vertical development in files of rocks with the compressed time is investigated. The estimation of influence on size of critical pressure of parametres of hills is given.

**Key words:** porous materials with difficult reology of the compressed skeleton, cylindrical mountain developments, intense-deformed condition, exact three-dimensional the stability equations, stability of the basic condition.

Известно [1], что решение задач горной механики, относящихся к процессу проведения подземных выработок, сводится к постановке и решению задач [2–5] локальной неустойчивости массива возле выработок при неупругих деформациях [6, 7]. Решение такого класса задач состоит из двух этапов. На первом этапе определяется основное напряженно-деформированное состояние массива горных пород вблизи выработки. На втором — решается задача об устойчивости основного состояния в рамках динамического подхода, который, в свою очередь, сводится к определению величины критического давления, равномерно распределенного по контуру выработки.

Большинство грунтов имеет пористую структуру [8], поэтому при решении задач устойчивости горных пород наряду со сложной реологией, необходимо также учитывать пористые свойства материалов. В отличие от [2–5], в настоящей работе на основе точных трехмерных уравнений [9] исследуется локальная неустойчивость пород приствольной зоны вертикальной выработки с учетом пористой структуры материала горного массива.

Рассмотрим пористое упрочняющееся упруговязкопластическое тело, механическая модель которого показана на рис. 1.

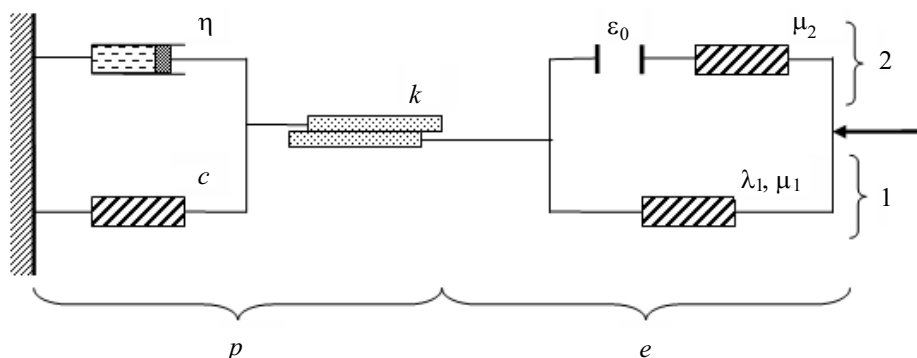


Рис. 1



Модель состоит из двух последовательно соединенных составных частей: пластической — «*p*» и упругой — «*e*». Пластическая часть состоит из пластического элемента (предел текучести  $k$ ), последовательно соединенного с параллельной связкой вязкого элемента (коэффициент вязкости  $\eta$ ) и упругого элемента (коэффициент упрочнения  $c$ ). Упругая часть состоит из упругого сжимаемого элемента 1 (коэффициенты Ляме  $\lambda_1, \mu_1$ ) и параллельно подсоединенной к нему последовательной связки 2 жесткого контакта (начальный раствор пор  $\varepsilon_0$ ) и упругого несжимаемого элемента (коэффициент упругости  $\mu_2$ ).

Определяющее соотношение жесткого контакта согласно [10] имеет вид

$$\tilde{\sigma}_{ij} (\tilde{\varepsilon}_{nn} - \varepsilon_0) = 0, \tag{1}$$

где  $\tilde{\sigma}_{ij}$  — компоненты тензора напряжений,  $\tilde{\varepsilon}_{nn}$  — объемная деформация, причем  $\tilde{\sigma}_{ij} = 0$  до схлопывания пор, и  $\tilde{\varepsilon}_{nn} = \varepsilon_0$  после.

При конструировании связи напряжение-деформация в упруговязкопластическом теле следуем работам [5, 7].

Для последовательного соединения «*p* — *e*» справедливы соотношения

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ij}^p = \sigma_{ij}^e, (s_{ij} = s_{ij}^p = s_{ij}^e), \varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}^p + \varepsilon_{ij}^e, \tag{2}$$

где  $s_{ij} = \sigma_{ij} - \frac{1}{3}\sigma_{nn}\delta_{ij}$  — компоненты девиатора тензора напряжений,  $\delta_{ij}$  — символ Кронекера,  $\varepsilon_{ij}$  — компоненты тензора деформаций.

Для параллельной связки «1 — 2» справедливы соотношения

$$\varepsilon_{ij}^e = (\varepsilon_{ij}^e)_1 = (\varepsilon_{ij}^e)_2, \quad \sigma_{ij} = \sigma_{ij}^e = (\sigma_{ij}^e)_1 + (\sigma_{ij}^e)_2, \quad s_{ij} = s_{ij}^e = (s_{ij}^e)_1 + (s_{ij}^e)_2, \tag{3}$$

где напряжения, соответствующие элементу «1», удовлетворяют закону Гука

$$(\sigma_{ij}^e)_1 = \lambda_1 \varepsilon_{nn}^e \delta_{ij} + 2\mu_1 \varepsilon_{ij}^e, \tag{4}$$

а элементу «2» — соотношению

$$(\sigma_{ij}^e)_2 = \begin{cases} 0, \varepsilon_{nn}^e < \varepsilon_0, \\ 2\mu_2 \left( (\varepsilon_{ij}^e)_2 - \begin{pmatrix} 0 \\ \varepsilon_{ij}^e \\ 0 \end{pmatrix}_2 \right) + \frac{1}{3} (\sigma_{nn}^e)_2 \delta_{ij}, \varepsilon_{nn}^e \geq \varepsilon_0 \end{cases}, \tag{5}$$

$\begin{pmatrix} 0 \\ \varepsilon_{ij}^e \\ 0 \end{pmatrix}_2$  — деформации элемента «2» до момента схлопывания пор, причем  $\begin{pmatrix} 0 \\ \varepsilon_{nn}^e \\ 0 \end{pmatrix}_2 = \varepsilon_0$  — после схлопывания пор.

В теле остаются несхлопнутые поры, пока

$$\varepsilon_{nn}^e < \varepsilon_0. \tag{6}$$

Тело остается упругим, пока

$$s_{ij} s_{ij} < k^2, \tag{7}$$

в этом случае полные напряжения и деформации в теле определяются по формулам (3).

Если  $s_{ij} s_{ij} \geq k^2$ , то полная деформация удовлетворяет соотношению (2), где  $\varepsilon_{ij}^e = (\varepsilon_{ij}^e)_1 = (\varepsilon_{ij}^e)_2$ . Пластическая составляющая объемной деформации удовлетворяет условию несжимаемости

$$\varepsilon_{nn}^p = 0. \tag{8}$$

Скорости пластической деформации  $\dot{\varepsilon}_{ij}^p = 0$ , если

$$(s_{ij} - c\varepsilon_{ij}^p) (s_{ij} - c\varepsilon_{ij}^p) < k^2. \tag{9}$$

Тензор скоростей пластических деформаций связан с тензором напряжений соотношениями ассоциированного закона пластического течения

$$\dot{\varepsilon}_{ij}^p = \psi (s_{ij} - c\varepsilon_{ij}^p - \eta \dot{\varepsilon}_{ij}^p), \tag{10}$$



если выполняется условие пластического течения [5]

$$(s_{ij} - c\varepsilon_{ij}^p - \eta\varepsilon_{ij}^p) (s_{ij} - c\varepsilon_{ij}^p - \eta\varepsilon_{ij}^p) = k^2. \quad (11)$$

Напряжения, одинаковые для «e» и «p» в части «p», складываются из суммы  $\sigma_{ij} = (\sigma_{ij}^e)_1 + (\sigma_{ij}^e)_2$ . Тело остается упругим при наличии несхлопнутых пор, пока

$$\left(\sigma_{ij} - \frac{1}{3}\delta_{ij}(3\lambda_1 + 2\mu_1)\varepsilon_0\right) \left(\sigma_{ij} - \frac{1}{3}\delta_{ij}(3\lambda_1 + 2\mu_1)\varepsilon_0\right) < k^2. \quad (12)$$

Рассмотрим горный массив с вертикальной круговой выработкой радиуса  $R_0$ , реологические свойства которого определяются согласно описанной выше модели. К внутреннему контуру выработки приложена равномерно распределенная нагрузка  $q_0$ , а на бесконечности напряжения в массиве стремятся к величине  $gh$  ( $g$  — средний объемный вес вышележащих пород,  $h$  — глубина заложения выработки), т. е. начальное напряженное состояние в массиве (до проведения выработки) принимается гидростатическим.

Процесс деформирования пористого материала горного массива вблизи вертикальной выработки можно разделить на два взаимосвязанных этапа. Первый — упругое деформирование сжимаемой пористой среды, второй — неупругое деформирование сжатого скелета с упруговязкопластическими свойствами.

Напряженно-деформированное состояние горного массива на первом этапе, т. е. когда выполняется условие (12), в осесимметричном случае определяется соотношениями

$$u = C_1 r + \frac{C_2}{r}, \quad \varepsilon_r = C_1 - \frac{C_2}{r^2}, \quad \varepsilon_\theta = C_1 + \frac{C_2}{r^2}, \quad (13)$$

$$\sigma_r = 2(\lambda_1 + \mu_1)C_1 - 2\mu_1 \frac{C_2}{r^2}, \quad \sigma_\theta = 2(\lambda_1 + \mu_1)C_1 + 2\mu_1 \frac{C_2}{r^2}, \quad (14)$$

где  $u$  — радиальная составляющая вектора перемещений.

Константы интегрирования  $C_1$  и  $C_2$  найдем из следующих граничных условий:

$$\sigma_r|_{r \rightarrow \infty} = -q_\infty, \quad \sigma_r|_{r=R_0} = -q_0, \quad (15)$$

$$C_1 = \frac{-q_\infty}{2(\lambda_1 + \mu_1)}, \quad C_2 = \frac{q_0 - q_\infty}{2\mu_1} R_0^2. \quad (16)$$

Объемная деформация с учетом (13) и (16) определяется в форме

$$\varepsilon_r + \varepsilon_\theta = 2C_1. \quad (17)$$

Из (17) следует, что объемная деформация не зависит от радиуса, т. е. она одинакова во всем теле, и поэтому схлопывание пор произойдет одновременно во всей среде при достижении объемной деформацией значения, равного начальному удельному объему пор —  $\varepsilon_0$ .

Следовательно, полное схлопывание пор при упругом деформировании массива происходит под действием нагрузки, определяемой равенством

$$q_\infty = (\lambda_1 + \mu_1)\varepsilon_0. \quad (18)$$

При этом поля перемещений, деформаций и напряжений находятся по формулам

$$u = -\frac{\varepsilon_0}{2}r + \frac{q_0 - (\lambda_1 + \mu_1)\varepsilon_0}{2\mu_1} \frac{R_0^2}{r},$$

$$\varepsilon_r = -\frac{\varepsilon_0}{2} - \frac{q_0 - (\lambda_1 + \mu_1)\varepsilon_0}{2\mu_1} \frac{R_0^2}{r^2}, \quad \varepsilon_\theta = -\frac{\varepsilon_0}{2} + \frac{q_0 - (\lambda_1 + \mu_1)\varepsilon_0}{2\mu_1} \frac{R_0^2}{r^2}, \quad (19)$$

$$\sigma_r = -(\lambda_1 + \mu_1)\varepsilon_0 - (q_0 - (\lambda_1 + \mu_1)\varepsilon_0) \frac{R_0^2}{r^2}, \quad \sigma_\theta = -(\lambda_1 + \mu_1)\varepsilon_0 + (q_0 - (\lambda_1 + \mu_1)\varepsilon_0) \frac{R_0^2}{r^2}.$$

Таким образом, если  $gh < (\lambda_1 + \mu_1)\varepsilon_0$ , то полного схлопывания пор в горном массиве не происходит, и материал ведет себя как сжимаемая упругая среда с параметрами  $\lambda_1$ ,  $\mu_1$ ,  $\varepsilon_0$ . При этом напряженно-деформированное состояние определяется соотношениями (13), (14), (16).



Если  $gh = (\lambda_1 + \mu_1)\varepsilon_0$  произойдет схлопывание пор (сжатый скелет) и при дальнейшем сжатии возникнет и будет расти около отверстия зона пластического течения, препятствовать развитию которой будут вязкость ( $\eta$ ) и упрочнение ( $c$ ) материала, т. е. сжатый скелет будет деформироваться как несжимаемая упруговязкопластическая среда с параметрами  $\mu = \mu_1 + \mu_2$ ,  $k$ ,  $c$ ,  $\eta$ .

В этом случае сплошная среда разделяется на две зоны – упругую и пластическую, в каждой из которых значения перемещений, деформаций и напряжений в точках среды раскладываются на компоненты:

а) пористого сжатия, определяемыми соотношением (19);

б) упругопластического сжатия (которые для деформаций в пластической зоне, в свою очередь, складываются из упругих и пластических компонент), определяемыми из решения упругопластической задачи с вычетом из внешней нагрузки той ее части, которая идет на полное схлопывание пор, т. е. величины  $(\lambda_1 + \mu_1)\varepsilon_0$ . Поэтому граничные условия для этих компонент запишутся в виде

$$\sigma_r|_{r \rightarrow \infty} = -(gh - (\lambda_1 + \mu_1)\varepsilon_0), \quad \sigma_r|_{r=R_0} = -q_0. \quad (20)$$

Напряженно-деформированное состояние сжатого скелета определяется в виде

– в упругой области ( $\gamma < r < \infty$ )

$$u = \frac{D}{r}, \quad \varepsilon_r = -\varepsilon_\theta = -\frac{D}{r^2},$$

$$\sigma_r = -(gh - (\lambda_1 + \mu_1)\varepsilon_0) - 2\mu \frac{D}{r^2}, \quad \sigma_\theta = -(gh - (\lambda_1 + \mu_1)\varepsilon_0) + 2\mu \frac{D}{r^2}; \quad (21)$$

– в пластической области ( $R_0 < r < \gamma$ )

$$u = \frac{D}{r}, \quad \varepsilon_r = -\varepsilon_\theta = -\frac{D}{r^2}, \quad \varepsilon_r^p = T \left( 1 - \frac{\gamma^2}{r^2} \right), \quad \varepsilon_\theta^p = -\varepsilon_r^p, \quad \varepsilon_r^e = -\varepsilon_\theta^e = \varepsilon_r - \varepsilon_r^p,$$

$$\sigma_r = -q_0 + 2\mu(D - T\gamma^2) \left( \frac{1}{R_0^2} - \frac{1}{r^2} \right) + 4\mu T \ln \frac{r}{R_0}, \quad (22)$$

$$\sigma_\theta = -q_0 + 2\mu(D - T\gamma^2) \left( \frac{1}{R_0^2} + \frac{1}{r^2} \right) + 4\mu T \left( \ln \frac{r}{R_0} + 1 \right),$$

где  $T = \frac{\chi k}{c+2\mu} \left( 1 - e^{-\frac{c+2\mu}{\eta} t} \right)$ ,  $D = \frac{\eta \chi k}{\mu c+2\mu} \left( 1 - e^{-\frac{c+2\mu}{\eta} t} \right) \gamma \dot{\gamma} + \frac{\chi k}{2\mu} \gamma^2$ ,  $\chi = \text{sign}(q_0 - gh)$ .

Условия совместности напряжений на границе  $\gamma$  раздела зон упругого и пластического деформирования имеют вид

$$[\sigma_r]|_{r=\gamma} = 0. \quad (23)$$

Здесь квадратные скобки обозначают разность значений выражений соответствующих упругой и пластической области на границе  $\gamma$ .

Радиус раздела зон упругого и пластического деформирования с учетом (21) и (22) определим в виде

$$\frac{\chi k}{2\mu} \frac{\gamma^2}{R_0^2} + \frac{\chi k}{c+2\mu} \left( 1 - e^{-\frac{c+2\mu}{\eta} t} \right) \left( 1 + 2 \ln \frac{\gamma}{R_0} - \frac{\gamma^2}{R_0^2} + \frac{\eta \gamma \dot{\gamma}}{\mu R_0^2} \right) + \frac{gh - q_0 - (\lambda_1 + \mu_1)\varepsilon_0}{2\mu} = 0. \quad (24)$$

Для определения основного напряженно-деформированного состояния этой задачи использовались уравнения равновесия, условие пластичности (11), соотношения ассоциированного закона пластического течения (10), соотношения, связывающие полные упругие и пластические деформации (2), связь между напряжениями и деформациями в виде (2), (4), (5), граничные условия (15), (20), а также условия сопряжения решений в упругой и пластической областях (23).

Исследование устойчивости основного состояния (21), (22) горного массива со сжатым скелетом вблизи вертикальной круговой цилиндрической выработки при принятии обобщенной концепции продолжающегося нагружения [9] сводится к решению системы дифференциальных уравнений в вариациях при соответствующих граничных условиях [5].



Уравнения равновесия для областей пластического  $V^p$  и упругого  $V^e$  деформирования массива со сжатым скелетом имеют вид

$$\nabla_i (\sigma_j^i + \sigma_\alpha^{0i} \nabla^\alpha u_j) - \rho s^2 u_j = 0, \quad s = i\omega. \quad (25)$$

Здесь и далее  $\nabla$  — символ ковариантного дифференцирования, кружок сверху соответствует компонентам основного невозмущенного состояния, определенного соотношениями (21)–(22).

Граничные условия на внутренней поверхности выработки и условия затухания возмущений на внешней поверхности  $S_\infty^e$  массива запишем в виде

$$N_i \left( \sigma_j^i + \sigma_\alpha^{0i} \nabla^\alpha u_j \right) = 0, \quad u_j|_{r \rightarrow \infty} \rightarrow 0. \quad (26)$$

Условия непрерывности на упругопластической границе  $\gamma$  имеют вид

$$\left[ N_i \left( \sigma_j^i + \sigma_\alpha^{0i} \nabla^\alpha u_j \right) \right] = 0, \quad [u_j] = 0. \quad (27)$$

Связь между амплитудными значениями напряжений и перемещений для сжатого скелета, обладающего упруговязкопластическими свойствами и свойством дальнейшей несжимаемости в пластической и упругой областях, представима в форме

$$\sigma_j^\beta = p \delta_j^\beta + 2\mu \varepsilon_j^\beta - ab f_j^\beta, \quad (28)$$

где  $a = \frac{4\mu^2}{k^2(2\mu + c + \eta s)}$ ,  $f_j^\beta = s_j^\beta - c \varepsilon_j^\beta$ ,  $b = f_l^k \varepsilon_l^k$ .

В упругой области надо положить  $a = 0$ . В случае однородного докритического состояния эти соотношения совпадают с полученными в [5].

Условие несжимаемости для горного массива со сжатым скелетом представимо в форме

$$\nabla^\alpha u_\alpha = 0. \quad (29)$$

Уравнения (25)–(28) с учетом условия несжимаемости (29) в областях  $V^p$  и  $V^e$  массива представляют собой взаимосвязанную замкнутую систему уравнений для исследования устойчивости основного состояния вертикальной цилиндрической выработки, когда имеется граница областей упругого и пластического поведения материала при нагружении в массиве горных пород со сжатыми порами. Система уравнений (25), (28), (29) представляет собой систему дифференциальных уравнений в частных производных относительно амплитудных значений векторов перемещений  $u$ ,  $v$ ,  $w$  и гидростатического давления  $p$  для пластической и упругой зон массива. Нетривиальное решение этой задачи соответствует потере устойчивости основного состояния. Для нахождения собственных значений перемещения и гидростатические давления в каждой из зон упругого и пластического деформирования горного массива аппроксимируем двойными тригонометрическими рядами

$$\begin{aligned} u &= \sum_n \sum_m A_{nm}(r) \cos(m\theta) \cos(nz), & v &= \sum_n \sum_m B_{nm}(r) \sin(m\theta) \cos(nz), \\ w &= \sum_n \sum_m C_{nm}(r) \cos(m\theta) \sin(nz), & p &= \sum_n \sum_m D_{nm}(r) \cos(m\theta) \cos(nz), \end{aligned} \quad (30)$$

где  $n, m$  — параметры волнообразования.

Подставляя  $u$ ,  $v$ ,  $w$ ,  $p$  в линеаризованные уравнения устойчивости (25) и учитывая (28), после ряда преобразований получим бесконечную систему обыкновенных дифференциальных уравнений относительно функций  $A(r)$ ,  $B(r)$ ,  $C(r)$ ,  $D(r)$

$$\begin{aligned} &A \left( a_{2,r} + \frac{1}{r} \left( r^2 \rho \omega^2 - \sigma_\theta^0 - a_4 \right) - \left( a_5 + \frac{1}{r} \sigma_\theta^0 \right) m^2 - \left( \mu r + r \sigma_z^0 \right) n^2 \right) + \\ &+ A' \left( a_1 + a_2 - a_3 + r a_{1,r} + r \sigma_{r,r}^0 + \sigma_r^0 \right) + A'' \left( r a_1 + r \sigma_r^0 \right) + \\ &+ B \left( -\frac{1}{r} a_4 - a_5 + a_{2,r} - \frac{2}{r} \sigma_\theta^0 \right) m + B' \left( a_2 + r a_5 \right) m + C' r \mu n + D' r = 0, \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
 & -A \left( \frac{1}{r} a_4 + 2a_5 + r a_{5,r} + \frac{2}{r} \sigma_\theta^0 \right) m - A' (a_3 + r a_5) m - \\
 & -B \left( 2a_5 + r a_{5,r} - \frac{1}{r} (r^2 \rho \omega^2 - \sigma_\theta^0) + \frac{1}{r} (a_4 + \sigma_\theta^0) m^2 + r (\mu + \sigma_z^0) n^2 \right) + \\
 & + B' (2r a_5 + r^2 a_{5,r} + r \sigma_{r,r}^0 + \sigma_r^0) + B'' (r^2 a_5 + r \sigma_r^0) + C \mu m n + m D = 0, \\
 & -A \mu n - A' r \mu n - B \mu n m + C \left( r \rho \omega^2 - \frac{1}{r} (\mu + \sigma_\theta^0) m^2 - r (2\mu + \sigma_z^0) n^2 \right) + \\
 & + C' (\mu + r \sigma_{r,r}^0 + \sigma_r^0) + C'' r (\mu + \sigma_r^0) - D r n = 0,
 \end{aligned} \tag{31}$$

где  $a_i$  ( $i=1,2,\dots,5$ ) согласно (28) и (21), (22) определяются соотношениями

$$a_1 = -a f_r^2 + 2\mu, \quad a_2 = -a f_r f_\theta, \quad a_3 = -a f_r f_\theta, \quad a_4 = -(a f_\theta^2 - 2\mu), \quad a_5 = \frac{\mu}{r}.$$

В горном массиве в пластической области —  $V^p$  докритическое состояние определяется по формулам (22), а в упругой области  $V^e$  — по формулам (21). Для упрощения записи здесь в (30) и далее индексы  $n, m$  у величин  $A, B, C, D$  опущены. Отметим, что если устойчивость основного состояния исследовать по предельной [5] системе уравнений, то в соотношениях (21), (22), определяющих докритическое состояние, следует  $t \rightarrow \infty$ .

Граничные условия (26) на внутренней поверхности выработки при  $r = R_0$  с учетом (28) и (30) принимают вид

$$\begin{aligned}
 & A^p a_2 + A'^p R_0 \left( a_1^p + \sigma_r^p \right) + B^p m a_2^p + D^p R_0 = 0, \\
 & A^p m + B^p - B'^p \left( R_0 + \frac{\sigma_r^p}{a_\theta^p} \right) = 0, A^p n \mu - C'^p (\mu + \sigma_r^p) = 0.
 \end{aligned} \tag{32}$$

Условие несжимаемости (29) при учете (28), (30) запишется в форме

$$A + A' r + B m + C n r = 0. \tag{33}$$

Аналогичным образом могут быть выписаны в терминах функций  $A(r), B(r), C(r), D(r)$  и условия непрерывности (27) на поверхности, разделяющей зоны упругого и пластического деформирования.

Из условия локальности возмущений  $u_j \rightarrow 0$  при  $r \rightarrow \infty$  ( $j=1, 2, 3$ ) с учетом (30) получим

$$(A')^e = 0, \quad (B')^e = 0, \quad (C')^e = 0. \tag{34}$$

Найти точное аналитическое решение краевой задачи (31)–(34) с учетом (27) не представляется возможным. Будем искать приближенное решение методом конечных разностей. В результате получим бесконечную систему однородных алгебраических уравнений, линейных относительно параметров  $A_{nm}, B_{nm}, C_{nm}, D_{nm}$ . Следовательно, определение величины критической нагрузки  $q_0$ , соответствующей локальной потере устойчивости круговой вертикальной выработки в горных массивах со схлопнутыми порами, сводится к разрешимости матричного уравнения. При вычислении определителя, наряду с нахождением основного напряженно-деформированного состояния для каждой области  $V^p, V^e$  массива (22), (21), необходимо учитывать уравнение (23), определяющие положение упругопластической границы  $\gamma$  — в горном массиве. Минимизация должна производиться по шагу разностной сетки, параметрам волнообразования по контуру  $m$  и образующей  $n$ , параметрам материала и конструкции  $\lambda_j$ . Таким образом, получаем задачу многомерной оптимизации величины  $q_0$  в зависимости от  $m, n$  при условии равенства нулю определителя полученной алгебраической системы:  $\det(q_0, m, n, \lambda_j) = 0$ .

На рис. 2 и 3 представлена зависимость критического давления на контуре выработки от величины гидростатического давления  $gh$ . При этом  $R_0 = 0.4, \mu_1 = 1, \mu_2 = 0.6, c = 0.3, \lambda_1 = 0.1, \eta = 0.01$  им



соответствуют значения параметров волнообразования  $n = m = 2$ . На рис. 2 кривые 1, 2, 3 соответствуют  $\varepsilon_0 \cdot 10^{-3} = 0.2, 0.5, 0.7$ . При этом  $\lambda_1 = 0.1$ . На рис. 3 кривые 1, 2, 3 соответствуют  $\lambda_1 = 0.1, 0.2, 0.3$ . При этом  $\varepsilon_0 \cdot 10^{-3} = 0.1$ .

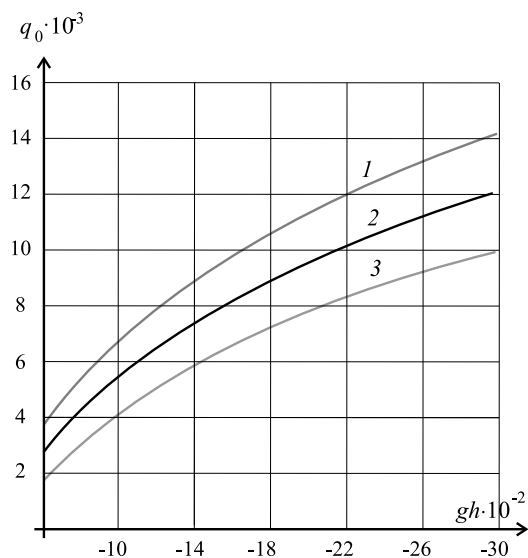


Рис. 2

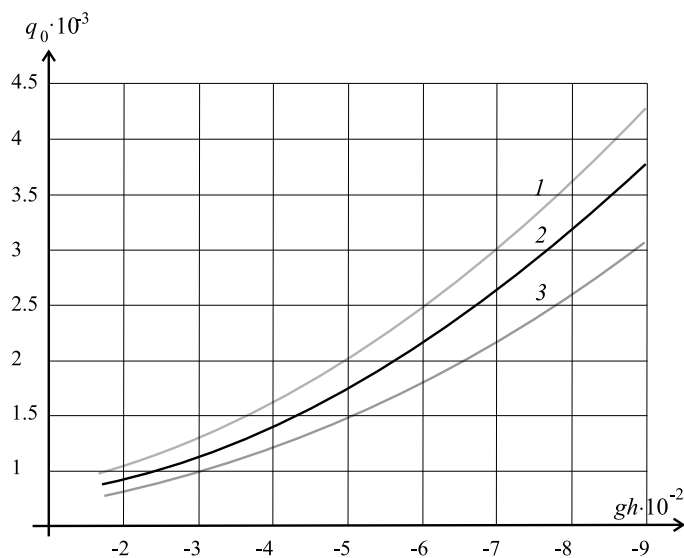


Рис. 3

Анализ численного эксперимента показал, что при увеличении глубины заложения выработки величина критического давления на контуре выработки увеличивается (см. рис. 2, 3); с ростом коэффициента Ламе  $\lambda_1$  область устойчивости увеличивается (см. рис. 3). Критическая нагрузка на контуре выработки при увеличении величины начального удельного объема пор уменьшается (см. рис. 2).

Если в соотношениях (21), (22) положить  $\varepsilon_0 = 0$ , то придем к результатам работы [5] для случая круговой цилиндрической выработки без учета начальной пористости материала.

### Библиографический список

1. Ершов, Л. В. О проявлении горного давления в горизонтальных выработках / Л. В. Ершов // Докл. АН СССР. – 1962. – Т. 145, № 2. – С. 298–300.
2. Гоцев, Д. В. Локальная неустойчивость горизонтальных выработок с многослойной крепью в упруго-пластических массивах / Д. В. Гоцев, А. Н. Спорыхин // Изв. РАН. МТТ. – 2004. – № 1. – С. 158–166.
3. Гоцев, Д. В. Локальная неустойчивость горизонтальных выработок многоугольной формы в упруговязко-пластических массивах / Д. В. Гоцев, И. А. Ененко, А. Н. Спорыхин // СО РАН. ПМТФ. – 2005. – Т. 46, № 2. – С. 141–150.
4. Гоцев, Д. В. Локальная неустойчивость горизонтальных выработок эллиптической формы в упруговязко-пластических массивах / Д. В. Гоцев, И. А. Ененко, А. Н. Спорыхин // Изв. РАН. МТТ. – 2007. – № 2. – С. 183–192.
5. Спорыхин, А. Н. Устойчивость равновесия пространственных тел и задачи механики горных пород / А. Н. Спорыхин, А. И. Шашкин. – М.: Физматлит, 2004. – 232 с.
6. Быковцев, Г. И. Теория пластичности / Г. И. Быковцев, Д. Д. Ивлев. – Владивосток: Дальнаука, 1998. – 528 с.
7. Ишлинский, А. Ю. Математическая теория пластичности / А. Ю. Ишлинский, Д. Д. Ивлев. – М.: Физматлит, 2001. – 701 с.
8. Цытович, Н. А. Механика грунтов / Н. А. Цытович. – М.: Высшая школа, 1983. – 320 с.
9. Гузь, А. Н. Основы теории устойчивости горных выработок / А. Н. Гузь. – Киев: Наук. думка, 1977. – 204 с.
10. Садовская, О. В. Модели реологически сложных сред, по-разному сопротивляющихся растяжению и сжатию / О. В. Садовская, В. М. Садовский // Математические модели и методы механики сплошных сред: Сб. науч. тр. к 60-летию А. А. Буренина. – Владивосток: ИАПУ ДВО РАН, 2007. – С. 224–238.