УДК 517.977

ОБ ИТЕРАЦИОННОМ МЕТОДЕ ПОСТРОЕНИЯ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННЫМИ СИСТЕМАМИ С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ ПРИ КВАДРАТИЧНЫХ ОГРАНИЧЕНИЯХ

И. В. Гребенникова, А. Г. Кремлев

Уральский федеральный университет, Екатеринбург,
кафедра прикладной математики
E-mail: giv001@usla.ru

Рассматривается задача управления по минимаксному критерию для сингулярно возмущенной системы с запаздыванием при неопределенных начальных условиях и интегральных квадратичных ограничениях на ресурсы управления. Предлагается итерационная процедура построения управляющего воздействия, аппроксимирующего оптимальное решение с заданной степенью точности относительно малого положительного параметра.

Ключевые слова: сингулярно возмущенная система с запаздыванием, оптимальное управление, фундаментальная матрица.

On Iterative Method of Constructing Optimal Control for Singularly Perturbed Systems with Delay with Quadratic Constraints

I. V. Grebennikova, A. G. Kremlev

Ural Federal University, Ekaterinburg,
Chair of Applied Mathematics
E-mail: giv001@usla.ru

The control problem for the singularly perturbed system with delay with indeterminate initial conditions and integral quadratic constraints on the control resources according to the minimax criterion is considered. Iterative procedure of constructing control response that approximates the optimal solution with given accuracy with respect to a small positive parameter is proposed.

Key words: singularly perturbed system with delay, optimal control, fundamental matrix.

ВВЕДЕНИЕ

Математическими моделями многих динамических процессов являются сингулярно возмущенные системы (с малым параметром при части производных) с запаздыванием (по состоянию). Решение задач оптимизации для таких объектов основывается на различных асимптотических представлениях их траекторий. Наиболее часто используемые подходы — декомпозиция краевой задачи (полученной из принципа максимума) на основе метода пограничных функций. В последние годы много работ посвящено проблемам оптимального управления такими системами (см. обзоры [1–3]). Зависимость текущей скорости изменения выходных переменных системы от их значений в предшествующие моменты времени приводит к моделям, которые описываются дифференциальными уравнениями с последействием [4].

В данной работе рассматривается задача управления по минимаксному критерию в постановке [5, 6] для сингулярно возмущенных систем с запаздыванием при неопределенных начальных условиях и интегральных квадратичных ограничениях на управляющие воздействия. Терминальный функционал качества зависит как от быстрых, так и от медленных переменных. В основе предлагаемого метода лежит идея представления фундаментальной матрицы решений, разбитой на блоки в соответствии с размерностями быстрых и медленных пременных, в виде равномерно сходящейся последовательности [7]. При реализации метода используются результаты исследований [5–11], а также аппарат выпуклого анализа [12]. Оптимальное решение аппроксимируется с любой заданной точностью (относительного малого параметра), при этом не требуется чрезмерных условий гладкости (дифференцируемость не выше первого порядка), ограничений на класс допустимых управлений.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассматривается управляемая сингулярно возмущенная система (с малым параметром $\mu > 0$ при части производных) с запаздыванием $h > 0$ (по состоянию):

$$\begin{aligned} &dx(t)/dt = A_{11}(t)x(t) + A_{12}(t)y(t) + G_1(t)x(t-h) + B_1(t,\mu)u(t),\\ &\mu\, dy(t)/dt = A_{21}(t)x(t) + A_{22}(t)y(t) + G_2(t)x(t-h) + B_2(t,\mu)u(t), \end{aligned} \tag{1}$$

где $t \in T = [t_0, t_1]$, $x \in R^n$, $y \in R^m$, A_{ij}, B_i, G_i, $i, j = 1, 2,$ — матрицы соответствующих размеров с непрерывными элементами. Начальное состояние системы $x(t) = \psi(t)$, $t_0 - h \le t < t_0$, $x(t_0) = x_0$,

$y(t_0) = y_0$ точно неизвестно и заданы лишь ограничения $x_0 \in X_0$, $y_0 \in Y_0$, где X_0, Y_0 — выпуклые компакты в соответствующих пространствах, $\psi(t) \in \Psi(t)$, $t_0 - h \le t < t_0$, $\Psi(t)$ — заданное многозначное отображение со значениями в виде выпуклых компактов (в R^n), непрерывное по t в метрике Хаусдорфа. Реализации управления $u(t)$, $t \in T$ — измеримые по Лебегу функции, удовлетворяющие условию $u(\cdot) \in P$, P — слабокомпактное выпуклое множество в $L_2^r(T)$. В данном случае

$$P = \Big\{u(\cdot)\Big| \int\limits_{t_0}^{t_1} u'(t)R(t)u(t)\,dt \le \lambda^2\Big\}, \qquad \lambda = \mathrm{const} > 0,$$

$R(t)$ — симметричная, положительно определенная матрица с непрерывными элементами, штрих — знак транспонирования. Считаем выполненным следующее предположение.

Предположение 1. *Собственные значения $\lambda_s(t)$ матрицы $A_{22}(t)$ удовлетворяют неравенству:* $\mathrm{Re}\,\lambda_s(t) < -2c < 0$ *при* $t \in T$, $c = \mathrm{const} > 0$.

Тогда [13, с. 69] при достаточно малых μ ($0 < \mu \le \mu_0$) фундаментальная матрица решений $Y[t,\tau]$ системы $\mu\, dy/dt = A_{22}(t)y$, $Y[\tau,\tau] = E_m$, E_m — единичная матрица $m \times m$, при $t_0 \le \tau \le t \le t_1$ имеет оценку

$$\|Y[t,\tau]\| \le c_0 \exp\{-c(t-\tau)/\mu\}, \tag{2}$$

$c_0 > 0$ — некоторая постоянная, $\|\cdot\|$ — евклидова норма.

Пусть $Z[t,\tau]$ — фундаментальная матрица решений системы (1) (при $u \equiv 0$), причем $Z[\tau,\tau] = E_{n+m}$. Матрицу $Z[t,\tau]$ представим в следующем блочном виде:

$$Z[t,\tau] = \begin{pmatrix} Z_{11}[t,\tau] & Z_{12}[t,\tau] \\ Z_{21}[t,\tau] & Z_{22}[t,\tau] \end{pmatrix},$$

здесь $Z_{11}[t,\tau]$, $Z_{12}[t,\tau]$, $Z_{21}[t,\tau]$, $Z_{22}[t,\tau]$ — матрицы с размерами соответственно $n \times n$, $n \times m$, $m \times n$, $m \times m$.

Введем следующие обозначения: $z' = (x', y')$, $Z_0 = X_0 \times Y_0$, $Z(t, u(\cdot),\ Z_0,\ \psi(\cdot))$, $t_0 \le t \le t_1$, — множество (ансамбль) траекторий $z(t, u(\cdot), z_0, \psi(\cdot))$ системы (1), исходящих из Z_0, при некотором $\psi(\cdot) \in \Psi(\cdot)$ и фиксированном $u(\cdot) \in P$. Определим функционал $J(\cdot)$:

$$J(u(\cdot)) = \max_{z_0 \in Z_0} \max_{\psi(\cdot)\in\Psi(\cdot)} \varphi(z(t_1; u(\cdot), z_0, \psi(\cdot))),$$

где $\varphi(\cdot) : R^{n+m} \to R$ — заданная выпуклая функция (с конечными значениями).

Задача 1. *Среди управлений $u(\cdot) \in P$ найти оптимальное $u^0 = u^0(\cdot)$, доставляющее минимум функционалу J на множестве $P:\ \varepsilon^0(t_1) = J(u^0) = \min\limits_{u(\cdot)\in P} J(u(\cdot))$.*

Запишем систему (1) в виде

$$dz(t)/dt = A(t,\mu)z(t) + G(t,\mu)z(t-h) + B(t,\mu)u(t),$$

где матрицы $A(t,\mu)$, $B(t,\mu)$, $G(t,\mu)$ имеют следующий блочный вид:

$$A(t,\mu) = \begin{pmatrix} A_{11}(t) & A_{12}(t) \\ A_{21}(t)/\mu & A_{22}(t)/\mu \end{pmatrix}, \qquad B(t,\mu) = \begin{pmatrix} B_1(t,\mu) \\ B_2(t,\mu)/\mu \end{pmatrix}, \qquad G(t,\mu) = \begin{pmatrix} G_1(t) & 0 \\ G_2(t)/\mu & 0 \end{pmatrix}.$$

Решение задачи 1 описывается следующими соотношениями (используя [6]):

$$\varepsilon^0(t_1) = \min_{u(\cdot)\in P} \max_{l\in R^{n+m}} \max_{z_0\in Z_0} \max_{\psi(\cdot)\in\Psi(\cdot)} \{l'\, z(t_1; u(\cdot), z_0, \psi(\cdot)) - \varphi^*(l)\} =$$
$$= \max\{\chi^0(l,\mu) \mid l \in R^{n+m}\} = \chi^0(l^0,\mu), \tag{3}$$

$$\chi^0(l,\mu) = -h^{**}(l) - \rho(-r(\cdot; t_1, l, \mu)|\ P),$$

$$h(l) = \varphi^*(l) - \rho(l'Z[t_1,t_0]|Z_0) - \int\limits_{t_0}^{t_0+h} \rho(((p'Z_{11}[t,\tau] + q'Z_{21}[t,\tau])G_1(\tau) +$$
$$+ (1/\mu)(p'Z_{12}[t,\tau] + q'Z_{22}[t,\tau])G_2(\tau))|\Psi(\tau-h))d\tau,$$
$$r(\tau; t, l, \mu) = (p'Z_{11}[t,\tau] + q'Z_{21}[t,\tau])B_1(\tau,\mu) + (1/\mu)(p'Z_{12}[t,\tau] + q'Z_{22}[t,\tau])B_2(\tau,\mu),$$

где $l' = (p', q')$, $p \in R^n$, $q \in R^m$; $\varphi^*(l)$ — функция, сопряженная к $\varphi(z)$ [12]; $h^{**}(l) = \overline{(co\, h)}(l)$ — замыкание выпуклой оболочки функции $h(l)$ [12]; $\rho(s|X)$ — опорная функция множества X на элементе s. Оптимальное управление $u^0(\cdot, \mu)$ удовлетворяет условию минимума:

$$\min_{u(\cdot)\in P} \int_{t_0}^{t_1} r(\tau; t_1, l^0, \mu) u(\tau)\, d\tau = \int_{t_0}^{t_1} r(\tau; t_1, l^0, \mu) u^0(\tau, \mu)\, d\tau. \tag{4}$$

Полученные $u^0(\cdot, \mu)$, l^0, $\varepsilon^0(t_1)$ зависят от параметра μ. Однако эти величины при $\mu \to +0$ могут не сходиться [9] к соответствующим решениям задачи 1 для вырожденной системы (полученной из исходной при $\mu = 0$). Поэтому важным представляется построить аппроксимацию оптимального управления $u^0(\cdot, \mu)$, доставляющую оптимальное значение $\varepsilon^0(t_1) = J(u^0(\cdot, \mu))$ с заданной точностью (относительно μ). В данной работе в основе предложенного способа определения требуемых приближений лежит возможность представления блоков $Z_{ij}[t, \tau; \mu]$ $(i, j = 1, 2)$ в виде пределов равномерно сходящихся на $[t_0, t_1]$ последовательностей при $(0 < \mu \le \mu_0$, μ_0 достаточно мало) $Z_{ij}^{(k)}[t, \tau; \mu]$, $k = 0, 1, 2, \ldots$

Прежде всего проведем исследование для случая $B_1(t, \mu) = B_1(t)$, $B_2(t, \mu) = \sqrt{\mu} B_2(t)$. Другие варианты обсудим уже на основе полученных результатов. При указанных условиях вырожденная система, полученная из (1), при $\mu = 0$ имеет вид

$$dx(t)/dt = A_0(t)x(t) + G_0(t)x(t-h) + B_1(t)u(t), \tag{5}$$

$$y(t) = -A_{22}^{-1}(t)A_{21}(t)x(t) - A_{22}^{-1}(t)G_2(t)x(t-h), \tag{6}$$

где $t \in T$, $A_0(t) = A_{11}(t) - A_{12}(t)A_{22}^{-1}(t)A_{21}(t)$, $G_0(t) = G_1(t) - A_{12}(t)A_{22}^{-1}(t)G_2(t)$.

Обозначим через $Z_0(t, u(\cdot), X_0, \psi(\cdot))$, $t_0 \le t \le t_1$ — множество (ансамбль) траекторий $z_0(t, u(\cdot), x_0, \psi(\cdot))$ системы (5), (6), исходящих из X_0, при некотором $\psi(\cdot) \in \Psi(\cdot)$ и фиксированном $u(\cdot) \in P$, через $X[t, \tau]$ — фундаментальную матрицу решений системы (5), (при $u \equiv 0$), причем $X[\tau, \tau] = E_n$, $X[t, \tau] = 0$ при $\tau > t$.

В работе [7] приведены оценки для блоков $Z_{ij}[t, \tau]$ $(i, j = 1, 2)$, причем последние могут быть представлены в виде пределов равномерно сходящихся на T последовательностей (при $0 < \mu \le \mu_0$, μ_0 достаточно мало):

$$Z_{11}^{(k+1)}[t, \tau] = X[t, \tau] - \int_{\tau}^{t} (dZ_{12}^{(0)}[t, s]/ds) A_{22}^{-1}(s)(A_{21}(s)Z_{11}^{(k)}[s, \tau] + G_2(s)Z_{11}^{(k)}[s-h, \tau])\, ds,$$

$$Z_{22}^{(k+1)}[t, \tau] = Y[t, \tau] + \int_{\tau}^{t} Z_{21}^{(k)}[t, s]A_{12}(s)Y[s, \tau]\, ds, \qquad Z_{12}^{(k)}[t, \tau] = \int_{\tau}^{t} Z_{11}^{(k)}[t, s]A_{12}(s)Y[s, \tau]\, ds,$$

$$Z_{21}^{(k)}[t, \tau] = (1/\mu)\int_{\tau}^{t} Y[t, s](A_{21}(s)Z_{11}^{(k)}[s, \tau] + G_2(s)Z_{11}^{(k)}[s-h, \tau])\, ds, \qquad k = 0, 1, 2, \ldots$$

причем $Z_{11}^{(0)}[t, \tau] = X[t, \tau]$, $Z_{22}^{(0)}[t, \tau] = Y[t, \tau]$.

Для задачи 1 соотношение (3) можно представить, используя [14], в следующем виде:

$$\varepsilon^0(t_1) = \min_{u(\cdot)\in P} \max_{p,q} \{\rho(p'Z_{11}[t_1, t_0] + q'Z_{21}[t_1, t_0]|X_0) + \rho(p'Z_{12}[t_1, t_0] + q'Z_{22}[t_1, t_0]|Y_0) +$$

$$+ \int_{t_0}^{t_1} [(p'Z_{11}[t_1, \tau] + q'Z_{21}[t_1, \tau])B_0(\tau, \mu) + (1/\mu)q'Y[t_1, \tau]B_2(\tau, \mu) - \xi(\tau, t_1, p, q)A_{22}^{-1}(\tau)B_2(\tau, \mu)]u(\tau)d\tau +$$

$$+ \int_{t_0}^{t_0+h} \rho((p'Z_{11}[t_1, \tau] + q'Z_{21}[t_1, \tau])G_0(\tau) - \tilde{\xi}(\tau, t_1, p, q)A_{22}^{-1}(\tau)G_2(\tau)|\Psi(\tau - h))\, d\tau - \varphi^*(p, q)\}, \tag{7}$$

где $B_0(t,\mu) = B_1(t,\mu) - A_{12}(t)A_{22}^{-1}(t)B_2(t,\mu)$, $\xi(\tau,t_1,p,q) = \dfrac{d}{d\tau}[p'Z_{12}[t_1,\tau] + (1/\mu)\int\limits_{\tau}^{t_1} q'Y[t_1,s]A_{21}(s) \times$ $\times Z_{12}[s,\tau]\,ds]$, $\tilde{\xi}(\tau,t_1,p,q) = \dfrac{d}{d\tau}[p'Z_{12}[t_1,\tau] + (1/\mu)\int\limits_{\tau}^{t_0+h} q'Y[t_1,s]A_{21}(s)Z_{12}[s,\tau]\,ds]$.

На основании теоремы А. Лебега [15, с. 259] при $0 < \mu \le \mu_0$, μ_0 достаточно мало, для любых $u(\cdot) \in P(\cdot)$, $p \in R^n$, $q \in R^m$ справедливы оценки

$$\begin{gathered}\left\| \int\limits_{t_0}^{t_0+h} \rho(\tilde{\xi}(\tau,t_1,p,q)A_{22}^{-1}(\tau)G_2(\tau)|\Psi(\tau-h))d\tau \right\| \le \omega(\mu)[\|p\| + N_2\|q\|],\\ \left\| \int\limits_{t_0}^{t_1} \xi(\tau,t_1,p,q)A_{22}^{-1}(\tau)B_2(\tau,\mu)u(\tau)d\tau \right\| \le \omega(\mu)[\|p\| + N_1\|q\|],\end{gathered} \qquad (8)$$

где $\omega(\mu) = o(1)$; $N_1,\ N_2 > 0$ — некоторые постоянные.

2. АППРОКСИМАЦИЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ 1

Используя последовательности $Z_{ij}^{(k)}[t,\tau,\mu]$, $i,j = 1,2$, $k = 0,1,2,\ldots$, можно аппроксимировать решение задачи 1 с любой заданной точностью (относительно μ, $0 < \mu \le \mu_0$). Будем предполагать, что элементы матриц $A_{12}(\tau)$, $A_{22}^{-1}(\tau)$ имеют на T ограниченные производные. Построим управляющее воздействие $u_\mu^{(k)}(\cdot)$, доставляющее оптимальное значение $\varepsilon^0(t_1)$ с точностью $o(\mu^k)$.

Из (7) имеем

$$\begin{gathered}\varepsilon^0(t_1) = \min_{u(\cdot)\in P}\max_{p,q}\{\rho[p'Z_{11}^{(k)}[t_1,t_0] + q'Z_{21}^{(k)}[t_1,t_0] + \xi_1^{(k)}(t_0,t_1,p,q)|X_0] + \rho[p'Z_{12}^{(k)}[t_1,t_0] +\\ + q'Z_{22}^{(k)}[t_1,t_0] + \xi_2^{(k)}(t_0,t_1,p,q)|Y_0] + \int\limits_{t_0}^{t_1} r^{(k)}(\tau,t_1,p,q)u(\tau)d\tau + \int\limits_{t_0}^{t_0+h} \rho(r_h^{(k)}(\tau,t_1,p,q)|\Psi(\tau-h))\,d\tau +\\ + \int\limits_{t_0}^{t_1}[\xi_1^{(k)}(\tau,t_1,p,q)B_0(\tau,\mu) + \xi^{(k)}(\tau,t_1,p,q)A_{22}^{-1}(\tau)B_2(\tau,\mu)]u(\tau)\,d\tau + \int\limits_{t_0}^{t_0+h} \rho(\xi_1^{(k)}(\tau,t_1,p,q)G_0(\tau) +\\ + \tilde{\xi}^{(k)}(\tau,t_1,p,q)A_{22}^{-1}(\tau)G_2(\tau)|\Psi(\tau-h))d\tau - \varphi^*(p,q)\}, \quad p \in R^n,\ q \in R^m,\end{gathered} \qquad (9)$$

где обозначены:

$$\begin{gathered}\xi_i^{(k)}(\tau,t,p,q) = p'(Z_{1i}[t,\tau] - Z_{1i}^{(k)}[t,\tau]) + q'(Z_{2i}[t,\tau] - Z_{2i}^{(k)}[t,\tau]), \qquad i = 1,2,\\ \xi^{(k)}(\tau,t,p,q) = -p'\frac{d}{d\tau}(Z_{12}[t,\tau] - Z_{12}^{(k-1)}[t,\tau]) - \frac{1}{\mu}\int\limits_{\tau}^{t} q'Y[t,s]A_{21}(s)\frac{d}{d\tau}(Z_{12}[s,\tau] - Z_{12}^{(k-1)}[s,\tau])\,ds,\\ \tilde{\xi}^{(k)}(\tau,t,p,q) = -p'\frac{d}{d\tau}(Z_{12}[t,\tau] - Z_{12}^{(k-1)}[t,\tau]) - \frac{1}{\mu}\int\limits_{\tau}^{t_0+h} q'Y[t,s]A_{21}(s)\frac{d}{d\tau}(Z_{12}[s,\tau] - Z_{12}^{(k-1)}[s,\tau])\,ds,\\ r^{(k)}(\tau,t,p,q) = (p'Z_{11}^{(k)}[t,\tau] + q'Z_{21}^{(k)}[t,\tau])B_0(\tau,\mu) + (1/\mu)q'Y[t,\tau]B_2(\tau,\mu) -\\ -\frac{d}{d\tau}[p'Z_{12}^{(k-1)}[t,\tau] + \frac{1}{\mu}\int\limits_{\tau}^{t} q'Y[t,s]A_{21}(s)Z_{12}^{(k-1)}[s,\tau]\,ds]A_{22}^{-1}(\tau)B_2(\tau,\mu),\end{gathered} \qquad (10)$$

$$\begin{gathered}r_h^{(k)}(\tau,t,p,q) = (p'Z_{11}^{(k)}[t,\tau] + q'Z_{21}^{(k)}[t,\tau])G_0(\tau) - \frac{d}{d\tau}(p'Z_{12}^{(k-1)}[t,\tau] +\\ + \frac{1}{\mu}\int\limits_{\tau}^{t_0+h} q'Y[t,s]A_{21}(s)Z_{12}^{(k-1)}[s,\tau]\,ds)A_{22}^{-1}(\tau)G_2(\tau).\end{gathered} \qquad (11)$$

Используя оценку (12) из работы [7] и оценки (8), получим следующий результат.

Лемма 1. *Существуют такие достаточно малое число $\mu_0 > 0$ и постоянная $N > 0$, что для любых $t_0 \le \tau \le t \le t_1$, $p \in R^n$, $q \in R^m$, $0 < \mu \le \mu_0$ справедливы неравенства:*

$$left\| \frac{d}{d\tau}(Z_{12}[t,\tau] - Z_{12}^{(k-1)}[t,\tau]) \le \mu^{k+1} N^{k+2}(c_0/c)(1 - e^{-c(t-\tau)/\mu}),$$

$$\left\|\xi_i^{(k)}(\tau,t,p,q)\right\| \le \mu^{k+1} N^{k+2}(\|p\| + \|q\|\,(c_0/c)(1 - e^{-c(t-\tau)/\mu})), \qquad i = 1,2.$$

В (3) имеем

$$\chi^0(l) = -h^{**}(l) - \lambda(\sigma^0(l;\mu))^{1/2}, \tag{12}$$

$$\sigma^0(l,\mu) = \int\limits_{t_0}^{t_1} l' Z[t_1,\tau;\mu] B(\tau,\mu) R^{-1}(\tau) B'(\tau,\mu) Z'[t_1,\tau;\mu] l d\tau.$$

Из (9) получим (с учетом введенных обозначений (10), (11)) следующие представления для $\sigma^0(l;\mu)$ и $h(l)$ в (12):

$$\sigma^0(l;\mu) = \int\limits_{t_0}^{t_1-\alpha_0(\mu)} r^{(k)}(\tau,t_1,p,q;\mu) R^{-1}(\tau) r^{(k)'}(\tau,t_1,p,q;\mu)\, d\tau + \hat{\xi}_1(l,\mu) +$$

$$+\frac{1}{\mu}\left(\int\limits_{0}^{\alpha_0(\mu)/\mu} \hat{r}^{(k)}(s,t_1,p,q;\mu) R^{-1}(t_1 - \mu s) \hat{r}^{(k)'}(s,t_1,p,q;\mu)\, ds + \mu\hat{\xi}_2(l,\mu)\right), \tag{13}$$

где $\alpha_0 = \alpha_0(\mu) \in R$, $\alpha_0 > 0$, $\alpha_0 \to 0$, $\alpha_0/\mu \to +\infty$ при $\mu \to +0$, $h(l) = h_{(k)}(p,q) + \hat{\xi}_3(l,\mu)$,

$$h_{(k)}(p,q) = \varphi^*(p,q) - \rho[p' Z_{11}^{(k)}[t_1,t_0] + q' Z_{21}^{(k)}[t_1,t_0] \mid \mathrm{X}_0] -$$

$$-\rho[p' Z_{12}^{(k)}[t_1,t_0] + q' Z_{22}^{(k)}[t_1,t_0] | Y_0] - \int\limits_{t_0}^{t_0+h} \rho(r_h^{(k)}(\tau,t_1,p,q) | \Psi(\tau - h)) d\tau,$$

где $\hat{r}^{(k)}(s,t_1,p,q;\mu) = \mu r^{(k)}(t_1 - \mu s, t_1, p, q; \mu)$, $0 \le s \le \alpha_0(\mu)/\mu$, $\hat{\xi}_i(l,\mu)$, $i = 1,2,3$, имеют по μ порядок малости $O(\mu^{k+1})$ при $0 < \mu \le \mu_0$.

Так как мы проводим исследование для случая $B_1(t,\mu) = B_1(t), B_2(t,\mu) = \sqrt{\mu} B_2(t)$, то при указанных условиях из (13) получим $\sigma^0(l;\mu) = \sigma_k(p,q) + \hat{\xi}(l;\mu)$, причем $|\hat{\xi}(l,\mu)| \le \|l\| \hat{\omega}(\mu)$, $\hat{\omega}(\mu) = o(\mu^k)$ при $0 < \mu \le \mu_0$,

$$\sigma_k(p,q) = \int\limits_{t_0}^{t_1-\alpha_0(\mu)} r_1^{(k)}(\tau,t_1,p,q;\mu) R^{-1}(\tau) r_1^{(k)'}(\tau,t_1,p,q;\mu)\, d\tau +$$

$$+ \int\limits_{0}^{\alpha_0(\mu)/\mu} r_2^{(k)}(s,t_1,p,q;\mu) R^{-1}(t_1 - \mu s) r_2^{(k)'}(s,t_1,p,q;\mu)\, ds, \tag{14}$$

здесь функции $r_i^{(k)}(\tau,t_1,p,q;\mu)$, $i = 1,2$, суть

$$r_1^{(k)}(\tau,t_1,p,q) = (p' Z_{11}^{(k)}[t_1,\tau] + q' Z_{21}^{(k)}[t_1,\tau]) B_0(\tau,\mu) + \frac{1}{\sqrt{\mu}} q' Y[t_1,\tau] B_2(\tau) -$$

$$-\sqrt{\mu}\frac{d}{d\tau}[p' Z_{12}^{(k-1)}[t_1,\tau] + \frac{1}{\mu}\int\limits_{\tau}^{t_1} q' Y[t_1,\sigma] A_{21}(\sigma) Z_{12}^{(k-1)}[\sigma,\tau] d\sigma] A_{22}^{-1}(\tau) B_2(\tau),$$

$$r_2^{(k)}(s,t_1,p,q) = \sqrt{\mu} r_1^{(k)}(t_1 - \mu s, t_1, p, q), \qquad 0 \le s < \alpha_0(\mu)/\mu,$$

причем $B_0(\tau,\mu) = B_1(\tau) - \sqrt{\mu} A_{12}(\tau) A_{22}^{-1}(\tau) B_2(\tau)$.

Таким образом, из представлений (13), (14) получаем следующий результат.

Теорема 1. *При* $0 < \mu \le \mu_0$, μ_0 *достаточно мало, для любых* $p \in R^n$, $q \in R^m$ *выполняются соотношения:*

$$\chi^0(p,q) = \chi^{(k)}(p,q) + \widehat{\xi}_k(p,q),$$

причем $\left|\widehat{\xi}_k(p,q)\right| \le \|l\|\,\widehat{\omega}_k(\mu)$, $\widehat{\omega}_k(\mu) = O(\mu^{k+1})$,

$$\varepsilon^0(t_1) = \varepsilon^{(k)}(t_1) + O(\mu^{k+1}), \tag{15}$$

$$\chi^{(k)}(p,q) = -h^{**}_{(k)}(p,q) - \lambda(\sigma_k(p^{(k)},q^{(k)}))^{1/2},$$

$$\varepsilon^{(k)}(t_1) = \max\{\chi^{(k)}(p,q) | p \in R^n,\ q \in R^m\} = \chi^{(k)}(p^{(k)},q^{(k)}). \tag{16}$$

Предположение 2. *(i) Система* (5) *относительно управляема* [16] *на* T.

(ii) Для любого $t \in T$ $\operatorname{rank}\{B_2(t_1), A_{22}(t_1)B_2(t_1), \ldots, A_{22}^{m-1}(t_1)B_2(t_1)\} = m$.

(iii) Максимум в (16) *достигается на векторе* $(l^{(k)})' = (p^{(k)'}, q^{(k)'})$ *таком, что* $r_1^{(k)}(\tau, t_1, p^{(k)}, q^{(k)}) \ne 0$, $q^{(k)} \ne 0$.

Следует заметить, что в условиях предположения 2 задача 1 разрешима [5, с. 110; 6, с. 76], т. е. существует управление $u^0(\cdot) \in P(\cdot)$, удовлетворяющее (4) при $0 < \mu \le \mu_0$, причем вектор $(l^0)' = (p^{0'}, q^{0'})$, максимизирующий (3), отличен от нулевого.

Теорема 2. *Пусть выполнено предположение* 2. *Тогда при* $0 < \mu \le \mu_0$, μ_0 *достаточно мало, управляющее воздействие*

$$u_\mu^{(k)}(\tau) = \begin{cases} u^{(k)}(\tau), & t_0 \le \tau \le t_1 - \alpha_0(\mu), \\ (1/\sqrt{\mu})v^{(k)}((t_1-\tau)/\mu), & t_1 - \alpha_0(\mu) < \tau \le t_1, \end{cases}$$

доставляет оценку $\varepsilon^0(t_1)$ *с точностью* $O(\mu^{k+1})$:

$$\varepsilon^0(t_1) = J(u^0(\cdot)) = J(u_\mu^{(k)}(\cdot)) + O(\mu^{k+1}), \tag{17}$$

причем $u^{(k)}(\cdot)$, $v^{(k)}(\cdot)$ *определяются условиями:*

$$u^{(k)}(\tau) = -\lambda R^{-1}(\tau) r_1^{(k)}(\tau, t_1, p^{(k)}, q^{(k)})(\sigma_k(p^{(k)},q^{(k)}))^{-1/2}, \qquad \tau \in [t_0, t_1 - \alpha_0(\mu)],$$
$$v^{(k)}(s) = -\lambda R^{-1}(t_1 - \mu s) r_2^{(k)}(s, t_1, p^{(k)}, q^{(k)})(\sigma_k(p^{(k)},q^{(k)}))^{-1/2}, \qquad s \in [0, \alpha_0(\mu)/\mu].$$

Доказательство. Утверждение вытекает из свойств функции

$$L_{(k)}(p,q;u(\cdot),v(\cdot)) = -h^{**}_{(k)}(p,q) + \int\limits_{t_0}^{t_1-\alpha_0(\mu)} r_1^{(k)}(\tau,t_1,p,q;\mu)u(\tau)d\tau + \int\limits_0^{\alpha_0(\mu)/\mu} r_2^{(k)}(s,t_1,p,q;\mu)v(s)ds,$$

при $(u(\cdot),v(\cdot)) \in P^{(k)}$, где $P^{(k)}$ определяется условием

$$\int\limits_{t_0}^{t_1-\alpha_0(\mu)} u'(\tau)R(\tau)u(\tau)d\tau + \int\limits_0^{\alpha_0(\mu)/\mu} v'(s)R(t_1-\mu s)v(s)ds \le \lambda^2,$$

а именно элементы $p^{(k)}$, $q^{(k)}$, $u^{(k)}(\cdot)$, $v^{(k)}(\cdot)$ определяют седловую точку $L_{(k)}(p,q;u(\cdot),v(\cdot))$, т. е. для $p \in R^n$, $q \in R^m$, $u \in P(\cdot)$, $v \in V(\cdot)$:

$$L_{(k)}(p,q;u^{(k)}(\cdot),v^{(k)}(\cdot)) \le L_{(k)}(p^{(k)},q^{(k)};u^{(k)}(\cdot),v^{(k)}(\cdot)) \le L_{(k)}(p^{(k)},q^{(k)};u(\cdot),v(\cdot)),$$

причем (пользуясь (16))

$$\varepsilon^{(k)}(t_1) = \min_{u(\cdot),v(\cdot)} \max_{p,q} L_{(k)}(p,q;u(\cdot),v(\cdot)) = \max_{p,q} \min_{u(\cdot),v(\cdot)} L_{(k)}(p,q;u(\cdot),v(\cdot) =$$
$$= L_{(k)}(p^{(k)},q^{(k)};u^{(k)}(\cdot),v^{(k)}(\cdot)), \qquad p \in R^n,\ q \in R^m,\ u \in P(\cdot),\ v \in V(\cdot).$$

Тогда получим

$$J(u_\mu^{(k)}(\cdot)) = \max_{p \in R^n, q \in R^m} \{L_{(k)}(p,q;u^{(k)}(\cdot),v^{(k)}(\cdot)) + \hat{\xi}_k(p,q;\mu)\}, \tag{18}$$

где $\hat{\xi}_k(p,q;\mu)$ имеет такой же порядок малости по μ $(0<\mu\le\mu_0)$, как в (15), и максимум в (18) достигается на некотором векторе $\hat{l}\in co\,M^{(k)}$, здесь $M^{(k)}=\{l\in R^{n+m}|l\in\partial\varphi(z),\ z\in Z(t_1;u_\mu^{(k)}(\cdot),Z_0),\ \varphi(z)=J(u_\mu^{(k)}(\cdot))\}$, $\partial\varphi(z)$ — субдифференциал функции φ в точке z [12], $co\,M^{(k)}$ — выпуклая оболочка $M^{(k)}$ (в данном случае $M^{(k)}$ компакт в R^{n+m}). Таким образом, имеем

$$J(u_\mu^{(k)}(\cdot))=\varepsilon^{(k)}(t_1)+O(\mu^{k+1})$$

при $(0<\mu\le\mu_0)$, и, следовательно, справедливо равенство (17). Теорема доказана.

Обсудим теперь другие возможные варианты разложений (по параметру μ) коэффициентов системы (1).

1. Рассмотрим случай $B_1(t,\mu)=B_1(t)$, $B_2(t,\mu)=\sigma(\mu)B_2(t)$, $\sigma(\mu)=o(1)$, $\sigma(\mu)/\sqrt{\mu}\to+\infty$. Здесь уже могут нарушаться условия регулярности [6], поскольку имеется «излишек» ресурсов управления по быстрой переменной. В этом случае вектор $\|q^0\|=o(\sqrt{\mu}/\sigma(\mu))$, $0<\mu\le\mu_0$. Тогда из (13) получим $\sigma^0(l;\mu)=\sigma_k(p,q;\mu)+\hat{\xi}(l;\mu)$, где $\sigma_k(p,q;\mu)$ представимо в виде (14), причем

$$\begin{gathered}B_0(\tau,\mu)=B_1(\tau)-\sigma(\mu)A_{12}(\tau)A_{22}^{-1}(\tau)B_2(\tau),\\ r_1^{(k)}(\tau,t_1,p,q)=(p'Z_{11}^{(k)}[t_1,\tau]+\frac{\sqrt{\mu}}{\sigma(\mu)}\hat{q}'Z_{21}^{(k)}[t_1,\tau])B_0(\tau,\mu)+\frac{1}{\sqrt{\mu}}\hat{q}'Y[t_1,\tau]B_2(\tau)-\\ -\frac{d}{d\tau}[\sigma(\mu)p'Z_{12}^{(k-1)}[t_1,\tau]+\frac{1}{\sqrt{\mu}}\int\limits_\tau^{t_1}\hat{q}'Y[t_1,\sigma]A_{21}(\sigma)Z_{12}^{(k-1)}[\sigma,\tau]\,d\sigma]A_{22}^{-1}(\tau)B_2(\tau),\\ r_2^{(k)}(s,t_1,p,q)=\sqrt{\mu}r_1^{(k)}(t_1-\mu s,t_1,p,q),\qquad 0\le s<\alpha_0(\mu)/\mu,\end{gathered}\tag{19}$$

$\hat{\xi}(l;\mu)$ имеет по μ порядок малости $\mathrm{O}(\mu^{k+1})$ при $0<\mu\le\mu_0$; здесь q ищем в виде $q=(\sqrt{\mu}/\sigma(\mu))\hat{q}$. Тогда справедлива теорема 2 с $r_i^{(k)}(\tau,t_1,p,q;\mu)$, $i=1,2$, определяемыми (19).

2. Рассмотрим случай $B_1(t,\mu)=B_1(t),B_2(t,\mu)=B_2(t)$. Данный случай аналогичен случаю 1, отмеченные особенности остаются в силе (причем в (14) $B_0(\tau,\mu)=B_1(\tau)-A_{12}(\tau)A_{22}^{-1}(\tau)B_2(\tau)$). В этом случае в (19) нужно положить $\sigma(\mu)=1$, $q=\sqrt{\mu}\hat{q}$.

Библиографический список

1. *Дмитриев М. Г., Курина Г. А.* Сингулярные возмущения в задачах управления // Автоматика и телемеханика. 2006. № 1. С. 3–51.

2. *Kokotovic P. V., Khalil H. K., O'Reilly J.* Singular Perturbation Methods in Control: Analysis and Design. Philadelphia: SIAM, 1999. 200 с.

3. *Калинин А. И.* Асимптотические методы оптимизации возмущенных динамических систем. Минск.: Экоперспектива, 2000. 294 с.

4. *Колмановский В. Б., Носов В. Р.* Устойчивость и периодические режимы регулируемых систем с последействием. М.: Наука, 1981. 100 с.

5. *Красовский Н. Н.* Теория управления движением. М.: Наука, 1968. 475 с.

6. *Куржанский А. Б.* Управление и наблюдение в условиях неопределенности. М.: Наука, 1977. 392 с.

7. *Гребенникова И. В.* Об итерационном методе построения оптимального управления сингулярно возмущенными системами с запаздыванием // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. 2009. Т. 9. Сер. Математика. Механика. Информатика, вып. 3. С. 14–22.

8. *Кремлёв А. Г.* Асимптотические свойства ансамбля траекторий сингулярно возмущенной системы в задаче оптимального управления // Автоматика и телемеханика. 1993. № 9. С. 61–78.

9. *Кремлёв А. Г.* Об оптимальном управлении ансамблем траекторий сингулярно возмущенной квазилинейной системы // Дифференциальные уравнения. 1994. Т. 30, № 11. С. 1892–1904.

10. *Кремлёв А. Г., Гребенникова И. В.* Об асимптотике оптимального управления сингулярно возмущенной системой с запаздыванием // Математика. Информационные технологии. Образование: материалы науч.-практ. конф. Оренбург, 2006. Ч. 1. С. 36–38.

11. *Гребенникова И. В., Кремлёв А. Г.* О начальной аппроксимации минимаксной задачи управления сингулярно возмущенной системой с запаздыванием // Качество науки — качество жизни: материалы науч.-практ. конф. Тамбов, 2007. С. 89–92.

12. *Рокафеллар Р.* Выпуклый анализ. М.: Мир, 1973. 492 с.

13. *Васильева А. Б., Бутузов В. Ф.* Асимптотические разложения решений сингулярно возмущенных уравнений. М.: Наука, 1973. 192 с.

14. *Кремлёв А. Г., Гребенникова И. В.* Об асимптотике ансамбля траекторий управляемой сингулярно возмущенной системы с запаздыванием // Новости научной

мысли 2006: материалы науч.-практ. конф. Днепропетровск, 2006. Т. 4. С. 65–69.

15. *Натансон И. П.* Теория функций вещественной переменной М.: Наука, 1974. 468 с.

16. *Кириллова Ф. М., Чуракова С. В.* Относительная управляемость линейных динамических систем с запаздыванием // Докл. АН СССР. 1967. Т. 174, № 6. С. 1260–1263.

УДК 517.51

ПРИБЛИЖЕНИЕ ФУНКЦИЙ СРЕДНИМИ БОРЕЛЯ РЯДОВ ФУРЬЕ ПО МУЛЬТИПЛИКАТИВНЫМ СИСТЕМАМ

Т. В. Иофина

Саратовский государственный университет,
кафедра теории функций и приближений
E-mail: iofinat@mail.ru

В настоящей статье мы рассматриваем средние Бореля по системам Виленкина с ограниченной образующей последовательностью и получаем некоторые оценки приближений этими средними по норме L^p, а также в равномерной норме и норме типа Гёльдера в классах функций с заданной мажорантой наилучших приближений или модуля непрерывности. В тригонометрическом случае близкие результаты получены П. Чандрой, Л. Ремпульской и К. Томчаком.

Ключевые слова: системы Виленкина с ограниченной образующей последовательностью, средние Бореля, метрика типа Гёльдера, L^p-норма, равномерная норма.

Approximation of Functions by Borel Means of Fourier Series with Respect to Multiplicative Systems

T. V. Iofina

Saratov State University,
Chair of Theory of Functions and Approximations
E-mail: iofinat@mail.ru

In the present paper we consider Borel means of Fourier series with respect to Vilenkin systems with bounded generating sequence and obtain some estimates of approximation by this means in L^p, uniform and Hölder type norm in classes of functions with given majorant of best approximation or modulus of continuity. In the trigonometric case similar results were established by P.Chandra, L.Rempulska and K.Tomczak.

Key words: Vilenkin systems with bounded generating sequence, Borel means, Hölder type metric, L^p-norm, uniform norm.

ВВЕДЕНИЕ

Пусть 2π-периодическая функция $f \in L[0,2\pi]$, $S_n(f)$ — частичные суммы ее ряда Фурье. Тогда величина $B_r = e^{-r}\sum\limits_{n=0}^{\infty} r^n S_n(f)/n!$ называется *средними Бореля* функции f. Метод суммирования по Борелю является регулярным [1, §4.12].

Обозначим через H_p^ω пространство Гёльдера, т. е. множество функций $f \in L^p[0,2\pi]$, для которых выполнено неравенство $\|f(\cdot+h)-f(\cdot)\|_p \le \omega(h)$, где $\omega(h)$ — некоторый модуль непрерывности. Норму в этих пространствах определим равенством $\|f\|_{\omega,p} = \|f\|_p + \sup\limits_{h\in(0,\pi]} \dfrac{\|f(\cdot+h)-f(\cdot)\|_p}{\omega(h)}$. Приближение функций в метрике Гёльдера первым начал изучать З. Прёсдорф [2]. В работах [3–5] изучались оценки приближений средними Бореля в метрике Гёльдера. Так, в работе [3] была доказана следующая теорема.

Теорема А. *Пусть $f \in Lip^\beta[0,2\pi]$, т. е. $f \in H_\infty^{\omega_\beta}$, где $\omega_\beta(h) = h^\beta$, $0 \le \alpha < \beta \le 1$. Тогда*

$$\|B_r(f) - f\|_{\omega_\alpha,\infty} = O(r^{\alpha-\beta}\log r).$$

Л. Ремпульска и К. Томчак [5] обобщили результаты, полученные Чандрой, для случая $f \in L^p[0,2\pi]$, $1 \le p \le \infty$, и получили оценки приближений функций средними Бореля через модули непрерывности различных порядков. Ими были доказаны следующие теоремы.

Теорема В. *Для фиксированного $1 \le p \le \infty$ и $q \in \mathbb{N}$ существует константа $C = C(p,q)$, что для любой функции $f \in L^p[0,2\pi]$ справедлива оценка*

$$\|B_r(f) - f\|_p \le CA_{r,p}\omega_q(1/r, f, p),$$

где $\omega_q(1/r; f, p)$ — модуль непрерывности порядка q и $A_{r,p} = \begin{cases} 1, & 1 < p < \infty; \\ \ln(r+2), & p = 1, \infty. \end{cases}$