УДК 517.958:531.72, 517.958:539.3(4)

О ДИФФУЗИИ И МЕДЛЕННОЙ КОНВЕКЦИИ ПРИМЕСИ В СЛАБОСЖИМАЕМОЙ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ

Св.А. Гриценко

Белгородский государственный университет,
кафедра прикладной математики и механики
E-mail: sgritsenko@bsu.edu.ru

В работе изучается диффузия и медленная конвекция примеси в слабосжимаемой вязкой жидкости, описываемой системой уравнений Стокса, в которой вязкость жидкости зависит от концентрации примеси. Система Стокса дополняется уравнением диффузии с конвективным слагаемым. Для указанной системы уравнений доказывается корректность начально-краевой задачи в ограниченной области с однородными условиями Дирихле для скорости жидкости и однородным условием Неймана для концентрации примеси на границе области течения.

Ключевые слова: медленная конвекция, диффузия, система уравнений Стокса.

On the Diffusion and Slow Convection in Slightly Compressible Viscous Fluid

Sv.A. Gritsenko

Belgorod State University,
Chair of Applied Mathematics and Mechanics
E-mail: sgritsenko@bsu.edu.ru

We consider diffusion and slow convection of admixture in slightly compressible viscous fluid, described by the Stokes system, where viscous of fluid depends on the concentration of admixture. The Stokes system supplied by the diffusion equation with the convective term. We prove for this system the correctness of the initial-boundary problem in the limited domain with the homogeneous Dirichlet conditions for the fluid velocity and the homogeneous Neuman condition for the concentration of admixture on the boundary of domain.

Key words: diffusion convection, slow convection, convective term, Stokes system.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

В ограниченной области $\Omega \in \mathbb{R}^3$ с липшицевой границей S рассматривается система уравнений

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = \operatorname{div}(\mu(c)\nabla \mathbf{v}) - \nabla p + \mathbf{F}, \tag{1.1}$$

$$\frac{\partial p}{\partial t} + \lambda \operatorname{div} \mathbf{v} = 0 \tag{1.2}$$

для скорости жидкости $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$, дополненная уравнением диффузии

$$\frac{\partial c}{\partial t} + \mathbf{v}\nabla c = D\,\Delta c \tag{1.3}$$

для концентрации примеси $c(\mathbf{x}, t)$.

Здесь D — коэффициент диффузии, λ — константа, связанная о скоростью звука в жидкости, $\mu(c)$ — безразмерная вязкость.

Задача замыкается однородными краевыми условиями

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}, t) = 0, \qquad \frac{\partial c(\mathbf{x}, t)}{\partial \nu} = 0 \quad \text{при} \quad \mathbf{x} \in S, \tag{1.4}$$

где ν — единичный вектор внешней нормали к S, и начальными условиями

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}, 0) = \mathbf{v}_0(\mathbf{x}), \qquad c(\mathbf{x}, 0) = c_0(\mathbf{x}). \tag{1.5}$$

2. ОСНОВНОЙ РЕЗУЛЬТАТ

Основным результатом статьи является корректность задачи (1.1)–(1.5) в соответствующим образом выбранном функциональном пространстве. Мы придерживаемся обозначений функциональных пространств и норм в этих пространствах, принятых в [1].

Определение 1. Функции $\mathbf{v}(\mathbf{x},t)$, $p(\mathbf{x},t)$ и $c(\mathbf{x},t)$ называются *обобщенным решением* задачи (1.1)–(1.5) в области $\Omega_T = \Omega \times (0,T)$, если:

1) $\partial p/\partial t \in \mathbb{L}^2(\Omega_T)$, $\quad \mathbf{v} \in \mathbb{W}_2^{1,0}(\Omega_T)$, $\quad c \in \mathbb{L}^\infty(\Omega_T) \bigcap \mathbb{W}_2^{1,0}(\Omega_T)$;

2) почти всюду в области Ω_T выполнено уравнение неразрывности

$$\frac{\partial p}{\partial t} + \lambda \operatorname{div} \mathbf{v} = 0; \tag{2.1}$$

3) функции $\mathbf{v}$, p и c удовлетворяют интегральным тождествам:

$$\int_{\Omega_T} \left(\mathbf{v}\, \frac{\partial \varphi}{\partial t} - \mu(c) \nabla \mathbf{v} : \nabla \varphi + p \operatorname{div} \varphi + \mathbf{F} \cdot \varphi \right) d\mathbf{x}\, dt = -\int_\Omega \mathbf{v}_0(\mathbf{x}) \cdot \varphi(\mathbf{x},0)\, d\mathbf{x}, \tag{2.2}$$

$$\int_{\Omega_T} \left(c\, \frac{\partial \psi}{\partial t} - \mathbf{v} \cdot \nabla c\ \psi - D\ \nabla c \cdot \nabla \psi \right) d\mathbf{x}\, dt = -\int_\Omega c_0(\mathbf{x}) \psi(\mathbf{x},0)\, d\mathbf{x} \tag{2.3}$$

для произвольной гладкой вектор-функции $\varphi(\mathbf{x},t)$, равной нулю на границе S и при $t = T$, и для произвольной гладкой функции $\psi(\mathbf{x},t)$, также равной нулю на границе S и при $t = T$.

Здесь используется обозначение $A : B \equiv tr(AB^T)$, где A и B — квадратные матрицы.

Теорема 1. *Пусть граница S ограниченной связной области $\Omega \in \mathbb{R}^3$ является липшицевой поверхностью, функция $\mathbf{F}$ ограничена в $L^2(\Omega_T)$, функция $\mathbf{v}_0$ ограничена в $L^2(\Omega)$:*

$$\|\mathbf{F}\|_{2,\Omega_T} \equiv F < \infty, \quad \|\mathbf{v}_0\|_{2,\Omega} \equiv V < \infty,$$

а начальное распределение концентрации примеси c_0 удовлетворяет ограничению

$$0 \le c_0(\mathbf{x}) \le |c_0|_\Omega^{(0)} \equiv C \le 1. \tag{2.4}$$

Пусть, кроме того,

$$\mu(c) \in \mathbb{C}^2(-\infty,\infty), \ |\mu|_{\Omega_T}^{(2)} < \mu_*^{-1}, \quad 0 < \mu_* < \mu(c) < \mu_*^{-1}. \tag{2.5}$$

Тогда на произвольном интервале времени $(0,T)$ у задачи (1.1)–(1.5) существует обобщенное решение $\mathbf{v}, p$ и c такое, что

$$0 \le c\,(\mathbf{x},t) \le C, \qquad \|\nabla c\|_{2,\Omega_T} \le M\, C, \tag{2.6}$$

$$\max_{0<t<T} \left(\frac{1}{\sqrt{\lambda}} \|p(t)\|_{2,\Omega} + \|\mathbf{v}(t)\|_{2,\Omega} \right) + \|\nabla \mathbf{v}\|_{2,\Omega_T} + \left\| \frac{1}{\lambda} \frac{\partial p}{\partial t} \right\|_{2,\Omega_T} \le M\,(F+V), \tag{2.7}$$

где постоянная M зависит только от μ_* и D.

3. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1

Для доказательства теоремы воспользуемся следующей стандартной процедурой. Приблизим область Ω областями Ω^ε с границей $S^\varepsilon \in \mathbb{C}^{2+\alpha}$, а функции $\mathbf{F}$ и c_0 – функциями $\mathbf{F}^\varepsilon \in \mathbb{C}^\alpha(\Omega_T)$ и $c_0^\varepsilon \in \mathbb{C}^{2+\alpha}(\Omega)$ с некоторым α, $0 < \alpha < 1$, таким что $\operatorname{supp} \mathbf{F}^\varepsilon \subset \Omega$, $\operatorname{supp} c_0^\varepsilon \subset \Omega$ и $0 \le c_0^\varepsilon \le 1$. Всюду ниже, если это не будет вызывать разночтений, опустим индекс ε.

Далее попытаемся решить задачу для сглаженных данных, получить для соответствующих решений оценки (2.6) и (2.7), равномерные по параметру регуляризации, и далее на основе этих равномерных оценок совершить предельный переход в интегральных тождествах (2.2) и (2.3) при $\varepsilon \to 0$.

В свою очередь, задачу (1.1)–(1.5) для гладких данных будем решать, используя теорему о неподвижной точке.

Фиксируем множество $\mathfrak{M}_T = \left\{ \overline{c} \in \mathbb{C}(\overline{\Omega}_T) : -2 \le \overline{c}(\mathbf{x},t) \le 2 \right\}$. Очевидно, что множество $\mathfrak{M}_T$ можно рассматривать как метрическое пространство с метрикой, индуцированной пространством $\mathbb{C}(\overline{\Omega}_T)$.

Для $\overline{c}(\mathbf{x},t) \in \mathfrak{M}_T$ рассмотрим задачу

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = \operatorname{div}(\mu(c) \nabla \mathbf{u}) - \nabla p + \mathbf{F}, \tag{3.1}$$

$$\frac{\partial p}{\partial t} + \lambda \operatorname{div} \mathbf{u} = 0, \tag{3.2}$$

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = 0, \quad \mathbf{x} \in S; \qquad \mathbf{u}(\mathbf{x}, 0) = \mathbf{v}_0(\mathbf{x}). \tag{3.3}$$

Решение $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ задачи (3.1)–(3.3) является некоторым оператором

$$\mathbf{u} = \mathbf{R}_1(\overline{c}) \tag{3.4}$$

на множестве $\mathfrak{M}_T$.

Далее для функции $\mathbf{u}$, определяемой равенством (3.4), рассматривается задача

$$\frac{\partial c}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla c = D \,\triangle c, \tag{3.5}$$

$$\frac{\partial c}{\partial \nu}(\mathbf{x}, t) = 0, \quad \mathbf{x} \in S; \qquad c(\mathbf{x}, 0) = c_0(\mathbf{x}), \tag{3.6}$$

которая определяет оператор $c = \mathbf{R}_2(\mathbf{u})$. В конечном итоге получаем оператор $\mathbf{R}$:

$$c = \mathbf{R}(\overline{c}) = \mathbf{R}_2(\mathbf{R}_1(\overline{c})), \tag{3.7}$$

отображающий множество $\mathfrak{M}_T$ в некоторое множество $\mathfrak{N}$.

Таким образом, основным при доказательстве теоремы 1 является установление следующих фактов:

1) задачи (3.1)–(3.3) и (3.5), (3.6) разрешимы;

2) $\mathfrak{N} \subset \mathfrak{M}_T$;

3) оператор $\mathbf{R}$ на множестве $\mathfrak{M}_T$ имеет хотя бы одну неподвижную точку, по построению являющуюся решением задачи (1.1)–(1.5).

Лемма 1. *Для заданной функции* $\overline{c} \in \mathbb{C}^{1+\alpha, \frac{1+\alpha}{2}}(\overline{\Omega}_T)$ *задача* (3.1)–(3.3) *имеет единственное решение* $\mathbf{u} \in \overset{\circ}{\mathbb{C}}{}^{2+\alpha, \frac{2+\alpha}{2}}(\overline{\Omega}_T)$.

Доказательство. Для произвольной вектор-функции $\mathbf{w} \in X = \overset{\circ}{\mathbb{C}}{}^{2+\alpha, \frac{2+\alpha}{2}}(\overline{\Omega}_{t_0})$ линейное отображение A: $X \to X$, $\mathbf{u} = A\,\mathbf{w}$, определяется как решение уравнения

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = a\,\Delta \mathbf{u} + \mathbf{a} \cdot \nabla \mathbf{u} + \lambda \int_0^t \nabla(\operatorname{div} \mathbf{w}(\mathbf{x}, \tau))\,d\tau + \mathbf{F}, \tag{3.8}$$

удовлетворяющее условиям (3.3), где $a = \mu(\overline{c})$, $\mathbf{a} = \mu'(\overline{c})\nabla\overline{c}$.

Согласно общей теории параболических уравнений [1, с. 361], оператор A корректно определен. Покажем, что этот оператор является сжимающим при достаточно малом t_0. В самом деле, для разности $\widetilde{\mathbf{u}} = \mathbf{u}^{(1)} - \mathbf{u}^{(2)} = A(\mathbf{w}^{(1)} - \mathbf{w}^{(2)}) = A\widetilde{\mathbf{w}}$ справедлива оценка [1, с. 364]

$$|\widetilde{\mathbf{u}}|^{(2+\alpha)}_{\Omega_{t_0}} \le \lambda\, N_\varepsilon\, |\Psi|^{(\alpha)}_{\Omega_{t_0}},$$

где

$$\Psi = \int_0^t \nabla(\,\operatorname{div}(\mathbf{w}^{(1)}(\mathbf{x}, \tau) - \mathbf{w}^{(2)}(\mathbf{x}, \tau))\,)\,d\tau = \int_0^{t_0} \nabla(\,\operatorname{div} \widetilde{\mathbf{w}}(\mathbf{x}, \tau)\,d\tau,$$

а постоянная N_ε зависит только от нормы $\overline{c}$ в $\mathbb{C}^{1+\alpha, \frac{1+\alpha}{2}}(\overline{\Omega}_T)$, μ_*, гладкости границы области в $\mathbb{C}^{2+\alpha}$ и не зависит от $t_0 \le 1$.

Легко видеть, что $|\Psi|^{(\alpha)}_{\Omega_T} \le t_0 |\widetilde{\mathbf{w}}|^{(2+\alpha)}_{\Omega_T}$. Таким образом,

$$\|A\| \le t_0\,\lambda\, N_\varepsilon\, < 1 \quad \text{при} \quad t_0 \le \frac{1}{2\lambda\, N_\varepsilon}.$$

По теореме о неподвижной точке существует $\mathbf{u}$, такое что $\mathbf{u} = A\,\mathbf{u}$, то есть существует решение задачи (3.1) – (3.3) на интервале $(0, t_0)$. Продолжая решение на интервалы $(t_0, 2t_0)$, $(2t_0, 3t_0)$ и так далее, мы исчерпаем весь промежуток $(0, T)$ за конечное число шагов, что завершает доказательство леммы.

Лемма 2. *Для решения* $\mathbf{u}$ *задачи* (3.1)–(3.3) *с функцией* $\overline{c} \in \mathfrak{M}_T \bigcap \mathbb{C}^{1+\alpha, \frac{1+\alpha}{2}}(\overline{\Omega}_T)$ *справедливы оценки*

$$\max_{0<t<T} \int_{\Omega} \left(\frac{1}{\lambda} p^2(\mathbf{x}, t) + |\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)|^2 \right) d\mathbf{x} + \int_{\Omega_T} \left(\left(\frac{1}{\lambda} \frac{\partial p}{\partial t} \right)^2 + |\nabla \mathbf{u}|^2 \right) d\mathbf{x}\, dt \leq M\ (F + V) \equiv U, \qquad (3.9)$$

где постоянная M *зависит только от* μ_*.

Доказательство. Оценка (3.9) является следствием хорошо известного энергетического тождества, которое получается после умножения уравнения (3.1) на $\mathbf{u}$, интегрирования по частям по области Ω и привлечения уравнения неразрывности (3.2):

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} \left(|\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)|^2 + \frac{1}{\lambda} p^2(\mathbf{x}, t) \right) d\mathbf{x} + \int_{\Omega} \mu(\overline{c}) |\nabla \mathbf{u}(\mathbf{x}, t)|^2\, d\mathbf{x} = \int_{\Omega} \mathbf{F} \cdot \mathbf{u}\, d\mathbf{x}.$$

Далее достаточно воспользоваться неравенствами Гельдера и Гронуолла [1, с. 112] для оценки норм $\|p(t)\|_{2,\Omega}$, $\|\mathbf{u}(t)\|_{2,\Omega}$ и $\|\nabla \mathbf{u}\|_{2,\Omega_T}$. Оценка нормы $\|\partial p/\partial t\|_{2,\Omega_T}$ следует из оценки нормы $\|\nabla \mathbf{u}\|_{2,\Omega_T}$ и уравнения неразрывности (3.2).

Лемма 3. *Пусть* $\mathbf{u}^{(i)} = \mathbf{R}_1(\overline{c}^{(i)})$, $i = 1, 2$, *где* $\overline{c}^{(1)}, \overline{c}^{(2)} \in \mathfrak{M}_T \bigcap \mathbb{C}^{1+\alpha, \frac{1+\alpha}{2}}(\overline{\Omega}_T)$. *Тогда*

$$\max_{0<t<T} \|(\mathbf{u}^{(1)} - \mathbf{u}^{(2)})(t)\|^2_{2,\Omega} + \|\nabla(\mathbf{u}^{(1)} - \mathbf{u}^{(2)})\|^2_{2,\Omega_T} \leq M\, U \left(|\overline{c}^{(1)} - \overline{c}^{(2)}|^{(0)}_{2,\Omega_T} \right)^2, \qquad (3.10)$$

где M *зависит от тех же величин, что и в лемме* 2.

Доказательство. Разность $\widetilde{\mathbf{u}} = \mathbf{u}^{(1)} - \mathbf{u}^{(2)}$ удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\frac{\partial \widetilde{\mathbf{u}}}{\partial t} = \operatorname{div} \left(\mu(\overline{c}^{(1)}) \nabla \widetilde{\mathbf{u}} + \mu'(c_*) \nabla \mathbf{u}^{(2)}\, \widetilde{c} \right), \qquad (3.11)$$

где $\widetilde{c} = \overline{c}^{(1)} - \overline{c}^{(2)}$, а c_* — некоторое промежуточное значение между $\overline{c}^{(1)}$ и $\overline{c}^{(2)}$, и однородным краевым и начальным условиям (3.3).

Оценка (3.10) получится, если мы умножим уравнение (3.11) на $\widetilde{\mathbf{u}}$, проинтегрируем по частям:

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} \left(|\widetilde{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, t)|^2 + \frac{1}{\lambda} \widetilde{p}^{\,2}(\mathbf{x}, t) \right) d\mathbf{x} + \int_{\Omega} \mu(\overline{c}^{\,(1)}) |\nabla \widetilde{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, t)|^2\, d\mathbf{x} = I,$$

где $\widetilde{p} = p^{(1)} - p^{(2)}$ и $I \equiv \int_{\Omega} \mu'(c_*)\, \widetilde{c}\, \nabla \mathbf{u}^{(2)} \cdot \nabla \widetilde{\mathbf{u}}\, dx \leq \left(\int_{\Omega} |\nabla \widetilde{\mathbf{u}}|^2\, d\mathbf{x} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{\Omega} |\nabla \mathbf{u}^{(2)}|^2\, d\mathbf{x} \right)^{\frac{1}{2}} |\widetilde{c}|^{(0)}_{2,\Omega_T}$, и воспользуемся неравенством Гронуолла.

Определение 2. Функции $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ и $p(\mathbf{x}, t)$ называются *обобщенным решением задачи* (3.1)–(3.3) в области Ω_T, если:

1) $\partial p/\partial t \in \mathbb{L}^2(\Omega_T)$, $\mathbf{u} \in \mathbb{W}^{1,0}_2(\Omega_T)$;

2) почти всюду в области Ω_T выполнено уравнение неразрывности (3.2);

3) функции $\mathbf{u}$ и p удовлетворяют интегральному тождеству

$$\int_{\Omega_T} \left(\mathbf{u} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial t} - \mu(\overline{c}) \nabla \mathbf{u} : \nabla \varphi + p \operatorname{div} \varphi + \mathbf{F} \cdot \varphi \right) d\mathbf{x}\, dt = -\int_{\Omega} \mathbf{v}_0 \cdot \varphi(\mathbf{x}, 0)\, d\mathbf{x} \qquad (3.12)$$

для произвольной гладкой вектор-функции $\varphi(\mathbf{x}, t)$, равной нулю на границе S и при $t = T$.

Лемма 4. *Для заданной функции* $\overline{c} \in \mathfrak{M}_T$ *задача* (3.1)–(3.3) *имеет единственное обобщенное решение* $\mathbf{u} = \mathbf{R}_1(\overline{c})$, *для которого справедлива оценка* (3.9) *и оценка*

$$\|\mathbf{u}\|_{q,\Omega_T} \leq M U, \qquad (3.13)$$

с произвольным $q < 6$. *При этом, если* $\mathbf{u}^{(i)} = \mathbf{R}_1(\overline{c}^{(i)}), i = 1, 2$, *где* $\overline{c}^{(1)}, \overline{c}^{(2)} \in \mathfrak{M}_T$, *то для функций* $\mathbf{u}^{(i)}$, $i = 1, 2$, *справедлива оценка*

$$\|(\mathbf{u}^{(1)} - \mathbf{u}^{(2)})\|^2_{q,\Omega_T} \leq M\, U \left(|\overline{c}^{(1)} - \overline{c}^{(2)}|^{(0)}_{\Omega_T} \right)^2, \qquad (3.14)$$

где $q < 6$.

Доказательство. Пусть $\overline{c} \in \mathfrak{M}_T$. Приблизим эту функцию функциями $\overline{c}^{\,\delta} \in \mathfrak{M}_T \bigcap \mathbb{C}^{1+\alpha,\frac{1+\alpha}{2}}(\overline{\Omega}_T)$, так что $\overline{c}^{\,\delta} \to \overline{c}$ в $\mathfrak{M}_T$ при $\delta \to 0$. В силу леммы 2 для решений $\mathbf{u}^{\delta} = \mathbf{R}_1(\overline{c}^{\,\delta})$ задачи (3.1)–(3.3) справедлива оценка (3.9). В силу известного результата о слабой компактности ограниченных множеств в пространстве $\mathbb{L}^2(\Omega_T)$ можно считать, переходя при необходимости к подпоследовательностям, что последовательности $\{\mathbf{u}^{\delta}\}$, $\{p^{\delta}\}$ и $\{\partial p^{\delta}/\partial t\}$ сходятся слабо при $\delta \to 0$ соответственно в $\mathbb{W}_2^{1,0}(\Omega_T)$ и $\mathbb{L}^2(\Omega_T)$ к функциям $\mathbf{u} \in \mathbb{W}_2^{1,0}(\Omega_T)$, $p \in \mathbb{L}^2(\Omega_T)$ и $\partial p/\partial t \in \mathbb{L}^2(\Omega_T)$. Более того, поскольку производные по времени функций $\mathbf{u}^{\delta}$ равномерно по параметру аппроксимации ограничены в пространстве $\mathbb{L}^2\left((0,T);[\mathbb{W}_2^1(\Omega)]\right)$, то последовательность $\{\mathbf{u}^{\delta}\}$ слабо сходится в $\mathbb{L}^2(\Omega)$ при почти всех $t \in (0,T)$ [2]. При этом для предельных функций очевидным образом остается справедливой оценка (3.9). Поскольку $\mu(\overline{c}^{\,\delta}) \to (\overline{c})$ в $\mathfrak{M}_T$ при $\delta \to 0$, то переходя к слабому пределу в уравнении (3.2) и в интегральном тождестве (3.10) убеждаемся в том, что функции $\mathbf{u}$ и p являются обобщенным решением задачи (3.1)–(3.3).Единственность этого решения следует из интегрального тождества (3.10) для разности $\widetilde{\mathbf{u}} = \mathbf{u}^{(2)} - \mathbf{u}^{(1)}$ двух возможных обобщенных решений $\mathbf{u}^{(1)}$ и $(\mathbf{u})^2$, если воспользоваться результатами [1, с. 171]. Наконец, оценка (3.13) следует из оценки (3.9) и теоремы вложения пространства $\mathbb{W}_2^{1,0}(\Omega_T)$ в пространство $\mathbb{L}^q(\Omega_T)$ [1, с. 78].

Аналогичным образом доказывается оценка (3.14).

Лемма 5. *Пусть* $\overline{c} \in \mathfrak{M}_T$ *и* $\mathbf{u} = \mathbf{R}_1(\overline{c})$. *Тогда для решения* $c(\mathbf{x},t) = \mathbf{R}_2(\mathbf{u})$ *задачи* (3.5)–(3.6) *справедливы оценки*

$$\|c\|_{q,\Omega_T}^{(2)} \le N_\varepsilon, \tag{3.15}$$

$$|c|_{\Omega_T}^{(1+\beta)} \le N_\varepsilon \|c\|_{q,\Omega_T}^{(2)} \le N_\varepsilon, \tag{3.16}$$

где постоянные N_ε *зависят от тех же величин, что и в лемме* 1, *а* q *и* β *удовлетворяют неравенствам:* $5 < q < 6$, $\beta < (q-5)/q$.

Доказательство. В силу леммы 3.4 функция $\mathbf{u}$ принадлежит пространству $\mathbb{L}^q(\Omega_T)$ для всех $q < 6$. Обращаясь к результатам о разрешимости основных краевых задач для параболических уравнений в пространствах $\mathbb{W}_q^{2,1}(\Omega_T)$ [1, с. 388], видим, что задача (3.5)–(3.6) разрешима в пространстве $\mathbb{W}_q^{2,1}(\Omega_T)$ как задача для линейного уравнения с коэффициентами при младших производных из пространства $\mathbb{L}^q(\Omega_T)$. Последний факт влечет оценку (3.15). Оценка (3.16) следует при $q > 5$ из теоремы вложения пространства $\mathbb{W}_q^{2,1}(\Omega_T)$ в пространство $\mathbb{C}^{1+\beta,\frac{1+\beta}{2}}(\Omega_T)$ с $\beta < \frac{q-5}{q}$ [1, глава II, §3].

Лемма 6. *Пусть* $\overline{c}^{(1)}, \overline{c}^{(2)} \in \mathfrak{M}_T, \quad \mathbf{u}^{(i)} = \mathbf{R}_1(\overline{c}^{(i)}), \quad c^{(i)} = \mathbf{R}_2(\mathbf{u}^{(i)}), i = 1,2$. *Тогда*

$$\|c^{(1)} - c^{(2)}\|_{q,\Omega_T}^{(2)} \le N_\varepsilon \|\mathbf{u}^{(1)} - \mathbf{u}^{(2)}\|_{q,\Omega_T}, \tag{3.17}$$

где N_ε *зависит от тех же величин, что и в лемме* 5, *а* $q > 5$.

Доказательство. Разность $\widetilde{c} = c^{(1)} - c^{(2)}$ удовлетворяет линейной начально-краевой задаче

$$\frac{\partial \widetilde{c}}{\partial t} - D\Delta\,\widetilde{c} = -\mathbf{u}^{(1)} \cdot \nabla \widetilde{c} - \widetilde{\mathbf{u}} \cdot \nabla c^{(2)},$$

$$\frac{\partial\,\widetilde{c}}{\partial \nu} = 0,\ \mathbf{x} \in S, \quad c(\mathbf{x},0) = 0, \quad \widetilde{\mathbf{u}} = \mathbf{u}^{(1)} - \mathbf{u}^{(2)}.$$

Требуемая оценка (3.16) следует теперь из результатов о разрешимости основных начально-краевых задач в пространствах $W_q^{2,1}(\Omega_T)$ при $q > 5$, если воспользоваться оценкой (3.16): $|\nabla c^{(2)}(\mathbf{x},t)| \le N_\varepsilon$.

Лемма 7. *На достаточно малом интервале времени* $(0,T_0)$ *оператор* $\mathbf{R}$, *определенный формулой* (3.7), *переводит множество* $\mathfrak{M}_{T_0}$ *в себя и является на этом множестве вполне непрерывным.*

Доказательство. Непрерывность оператора $\mathbf{R}$ следует из оценок (3.14), (3.16) и (3.17):

$$|c^{(1)} - c^{(2)}|_{\Omega_T}^{(0)} \le |c^{(1)} - c^{(2)}|_{\Omega_T}^{(1+\beta)} \le N_\varepsilon \|c^{(1)} - c^{(2)}\|_{q,\Omega_T}^{(2)} \le N_\varepsilon \|\mathbf{u}^{(1)} - \mathbf{u}^{(2)}\|_{q,\Omega_T} \le N_\varepsilon \left(|\overline{c}^{(1)} - \overline{c}^{(2)}|_{\Omega_T}^{(0)}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Полная непрерывность оператора $\mathbf{R}$ следует из оценки (3.15): $|\mathbf{R}(\overline{c})|_{\Omega_T}^{(1+\beta)} \le N_\varepsilon$, поскольку всякое ограниченное множество в пространстве $\mathbb{C}^{1+\beta,\frac{1+\beta}{2}}(\Omega_T)$ является компактным в пространстве $\mathbb{C}^{(0)}(\Omega_T)$. Наконец, оценка (3.16) и неравенства

$$|c(\mathbf{x},t)| = |c_0(\mathbf{x}) + (c(\mathbf{x},t) - c_0(\mathbf{x}))| \le 1 + |c|^{(\beta)}_{\Omega_T} T^\beta < 1 + N_\varepsilon T^\beta < 2$$

при

$$T \le T_0, \quad \text{где} \quad N_\varepsilon T_0^\beta < 2, \tag{3.18}$$

означают, что оператор $\mathbf{R}$ переводит множество $\mathfrak{M}_{T_0}$ в себя.

Полученные выше результаты и теорема Шаудера о неподвижной точке [2] доказывают следующую лемму:

Лемма 8. *На достаточно малом интервале времени* $(0,T_0)$ *у задачи* (1.1)–(1.5) *существует обобщенное решение.*

Завершает доказательство теоремы 1 для сглаженных данных задачи следующая лемма:

Лемма 9. *На произвольном интервале времени* $(0,T_0)$ *для обобщенного решения задачи* (1.1)–(1.5) *справедлива оценка*

$$0 \le c\,(\mathbf{x},t) \le C \le 1. \tag{3.19}$$

Доказательство. В силу свойств оператора $\mathbf{R}$ (оценка (3.16)) обобщенное решение $c\,(\mathbf{x},t)$ задачи (1.1)–(1.5) принадлежит пространству $\mathbb{C}^{1+\beta,\frac{1+\beta}{2}}(\Omega_{T_0})$. Поэтому (см. лемму 3.1) $\mathbf{u} \in \mathbb{C}^{2+\beta,\frac{2+\beta}{2}}(\Omega_{T_0})$. Следовательно решение $c\,(\mathbf{x},t)$ задачи (3.5)–(3.6) принадлежит пространству $\mathbb{C}^{2+\beta,\frac{2+\beta}{2}}(\Omega_{T_0})$ [1], как решение линейного параболического уравнения с гельдеровыми коэффициентами. В частности, для классических решений однородного параболического уравнения, удовлетворяющих однородному условию Неймана не границе области, справедлив принцип максимума [1], выраженный неравенствами (3.19).

Таким образом, всякое обобщенное решение задачи (1.1)–(1.5), отвечающее гладким данным задачи, является классическим и удовлетворяет уравнениям, краевым и начальным условиям в обычном смысле.

Доказанная лемма позволяет продолжить решение задачи (1.1)–(1.5) на произвольный интервал времени $(0,T)$ за конечное число шагов, поскольку выбор величины T_0 не зависит от шага.

Наконец, для последнего предельного перехода при $\varepsilon \to 0$ докажем следующую лемму:

Лемма 10. *На произвольном интервале времени* $(0,T)$ *для обобщенного решения задачи* (1.1)–(1.5) *справедлива оценка* (2.6).

Доказательство. Для доказательства леммы достаточно умножить уравнение (1.3) на $c\,(\mathbf{x},t)$ и проинтегрировать по частям по области Ω:

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_\Omega |c(\mathbf{x},t)|^2 d\mathbf{x} + D\int_\Omega |\nabla c(\mathbf{x},t)|^2 dx = I \equiv -\int_\Omega c\,\mathbf{v}\cdot\nabla c\, d\mathbf{x}.$$

Необходимая оценка (2.6) следует из последнего тождества, оценок (3.9) и (3.19) и неравенства Гельдера: $I \le \frac{D}{2}\int_\Omega |\nabla c(\mathbf{x},t)|^2\,d\mathbf{x} + \frac{1}{2D}\int_\Omega |\mathbf{v}(\mathbf{x},t)|^2\,d\mathbf{x}$.

Пусть $\mathbf{v}^\varepsilon$ и c^ε — решения задачи (1.1)–(1.5), отвечающие параметру регуляризации ε. Оценки (3.9) позволяют выбрать подпоследовательность $\{\mathbf{v}^\varepsilon\}$, слабосходящуюся в пространстве $\overset{\circ}{\mathbb{W}}{}^{1,0}_2(\Omega_T)$ к функции $\mathbf{v} \in \overset{\circ}{\mathbb{W}}{}^{1,0}_2(\Omega_T)$. Более того, поскольку производные по времени функций $\mathbf{v}^\varepsilon$ равномерно по параметру регуляризации ограничены в пространстве $\mathbb{L}^2\big((0,T);[\mathbb{W}^1_2(\Omega)]\big)$, то последовательность $\{\mathbf{v}^\varepsilon\}$ сильно сходится в $\mathbb{L}^2(\Omega_T)$ к функции $\mathbf{v}$ [2]. Аналогично, оценки (2.6) позволяют выбрать подпоследовательность $\{c^\varepsilon\}$, слабосходящуюся в пространстве $\mathbb{W}^{1,0}_2(\Omega_T)$ и сильносходящуюся в пространстве $\mathbb{L}^2(\Omega_T)$ к функции $c \in \mathbb{W}^{1,0}_2(\Omega_T)$. Переходя к пределу в уравнении (2.1) и в интегральных тождествах (2.2) и (2.3) при $\varepsilon \to 0$ убеждаемся, что предельные функции $\mathbf{v}$ и c являются обобщенным решением задачи (1.1)–(1.5).

Библиографический список

1. *Ладыженская О.А., Солонников В.А., Уральцева Н.Н.*, Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. М.: Наука, 1967.

2. *Лионс Ж.-Л.* Некоторые методы решения нелинейных краевых задач. М.: Мир, 1972.