Библиографический список

1. *Нигматулин, Р.И.* Динамика многофазных сред: в 2 т. / Р.И. Нигматулин. – М.: Наука, 1987. – Т. 1, 2. – 360 с.
2. *Кутателадзе, С.С.* Тепло-, массообмен и волны в газожидкостных системах / С.С. Кутателадзе, В.Е. Накоряков. – Новосибирск: Наука. Сиб. отд-ние, 1987. – 302 с.
3. *Нигматулин, Р.И.* Проявление сжимаемости несущей фазы при распространении волн в пузырьковой среде / Р.И. Нигматулин, В.Ш. Шагапов, Н.К. Вахитова // Докл. АН СССР. – 1989. – Т. 304, № 5. – С. 1077–1088.
4. *Самарский, А.А.* Разностные методы решения задач газовой динамики / А.А. Самарский, Ю.П. Попов. – М.: Наука, 1980. – 352 с.
5. *Нигматулин, Р.И.* Двумерные волны давления в жидкости, содержащей пузырьковые зоны / Р.И. Нигматулин, В.Ш. Шагапов, И.К. Гималтдинов, М.Н. Галимзянов // Докл. АН. – 2001. – Т. 378, № 6. – С. 763–767.
6. *Шагапов, В.Ш.* Двумерные волны давления в жидкости, содержащей пузырьки / В.Ш. Шагапов, И.К. Гималтдинов, М.Н. Галимзянов // Механика жидкости и газа. – 2002. – № 2. – С. 139–147.

УДК 517.958:531.72, 517.958:539.3(4)

РАЗРЕШИМОСТЬ В ЦЕЛОМ ЗАДАЧИ НЕЛИНЕЙНОЙ ДИФФУЗИИ В СЛАБОСЖИМАЕМОЙ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ

С.А. Гриценко

Белгородский государственный университет,
кафедра прикладной математики и механики
E-mail: sgritsenko@bsu.edu.ru

В работе рассматривается система уравнений, состоящая из уравнений Стокса, описывающих движение слабосжимаемой вязкой жидкости, в которой кинематическая вязкость жидкости зависит от концентрации примеси, и конвективного уравнения диффузии. Доказывается существование обобщенного решения начально-краевой задачи в ограниченной области с однородным условием Дирихле для скорости жидкости и однородным условием Неймана для концентрации примеси.

Ключевые слова: слабосжимаемая вязкая жидкость, уравнение Стокса, конвективное уравнение диффузии.

The Global Solvability of the Problem of Nonlinear Diffusion and Slow Convection in Slightly Compressible Viscous Fluid

S.A. Gritsenko

Belgorod State University,
Chair of Applied Mathematics and Mechanics
E-mail: sgritsenko@bsu.edu.ru

The paper deals with Stokes system, corresponding to the motion of slightly compressible viscous fluid where kinematic viscous depends on the admixture concentration. The system also contains the convective diffusion equation. The article proves the existence of generalized solution of the initial-boundary problem for this system in the limited domain with the homogeneous Dirichlet condition for the fluid velocity and the homogeneous Neumann condition for the concentration of admixture on the boundary of domain.

Key words: slightly compressible viscous fluid, Stokes equation, convective diffusion equation.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Пусть $\Omega \in \mathbb{R}^3$ — ограниченная связная область с липшицевой границей Γ, $\mathbf{v}(x,t) = (v_1(x,t), v_2(x,t), v_3(x,t))$ — скорость жидкости, $p(x,t)$ — давление, $c(x,t)$ — концентрация примеси.

В безразмерных (не отмеченных звездочкой) переменных $\mathbf{x}_* = \mathbf{x}L$, $t_* = t\tau$, $\mathbf{v}_* = \mathbf{v}L$, $\mathbf{F}_* = \mathbf{F}g$, $p_* = pp_0$ изучаемая система уравнений для скорости жидкости $\mathbf{v}(x,t)$, давления $p(x,t)$ и концентрации примеси $c(x,t)$ имеет вид

$$\alpha_\tau \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = \operatorname{div}\left(\alpha_\mu \mu(c) \nabla \mathbf{v} + (\alpha_\nu \operatorname{div} \mathbf{v} - p)\mathbb{I}\right) + \mathbf{F}, \tag{1.1}$$

$$\frac{\partial p}{\partial t} + \alpha_p \operatorname{div} \mathbf{v} = 0, \tag{1.2}$$

$$\mathbf{v}(x,t) = 0 \quad \text{при} \quad x \in \Gamma, \qquad \mathbf{v}(x,0) = 0 \quad \text{при} \quad x \in \Omega, \tag{1.3}$$

$$\frac{\partial c}{\partial t} + \mathbf{v}\nabla c = \alpha_D \, \Delta c \tag{1.4}$$

$$\frac{\partial c(x,t)}{\partial \mathbf{n}} = 0 \quad \text{при} \quad x \in \Gamma, \qquad c(x,0) = c_0(x), \quad \text{при} \quad x \in \Omega, \tag{1.5}$$

где $\mu(c)$ — безразмерная вязкость, $\mathbb{I}$ — единичная матрица, $\mathbf{F}$ — заданная плотность внешних массовых сил, $\mathbf{n}$ — единичный вектор внешней нормали к Γ.

Безразмерные положительные постоянные α_i $(i = \tau, \nu, \mu, \ldots)$ определяются формулами:

$$\alpha_\tau = \frac{L}{g\tau^2}, \qquad \alpha_\nu = \frac{\nu}{\tau L g \rho_0}, \qquad \alpha_\mu = \frac{2\mu_0}{\tau L g \rho_0}, \qquad \alpha_p = \frac{p_0}{L g \rho_0}, \qquad \alpha_D = \frac{D\tau}{L},$$

где L — характерный макроскопический размер (диаметр рассматриваемой физической области), τ — характерное время данного физического процесса, ρ_0 — средняя плотность воздуха при атмосферном давлении, g — ускорение силы тяжести, p_0 — атмосферное давление, μ_0 — вязкость жидкости при нулевой концентрации примеси, D — коэффициент диффузии.

Функциональные пространства и нормы в них обозначаются, как принято в работе [1].

2. ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Определение 1. Функции $\mathbf{v}(x,t)$, $p(x,t)$ и $c(x,t)$ называются *обобщенным решением задачи* (1.1)–(1.5) в области $\Omega_T = \Omega \times (0,T)$, если

1) $\partial p/\partial t \in \mathbb{L}_2(\Omega_T)$, $\quad \mathbf{v} \in \mathbb{W}_2^{1,0}(\Omega_T)$, $\quad c \in \mathbb{L}_\infty(\Omega_T) \bigcap \mathbb{W}_2^{1,0}(\Omega_T)$;

2) почти всюду в области Ω_T выполнено уравнение неразрывности (1.2);

3) функции $\mathbf{v}$, p и c удовлетворяют интегральному тождеству:

$$\int_{\Omega_T} \Big(\alpha_\tau \mathbf{v} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial t} - \alpha_\mu \mu(c) \nabla \mathbf{v} : \nabla \varphi - \alpha_\nu \mathrm{div}\, \mathbf{v}\, \mathrm{div}\, \varphi + p\, \mathrm{div}\, \varphi + \mathbf{F} \cdot \varphi \Big)\, dx\, dt = 0 \tag{2.1}$$

для произвольной гладкой вектор-функции $\varphi(\mathbf{x},t)$, равной нулю на границе Γ и при $t = T$, и интегральному тождеству

$$\int_{\Omega_T} \Big(-c \frac{\partial \xi}{\partial t} + \mathbf{v}\, \nabla c \xi + \alpha_D\, \nabla c \cdot \nabla \xi \Big)\, dx\, dt = \int_\Omega c_0(x) \xi(x,0)\, dx \tag{2.2}$$

для произвольной гладкой функции ξ, равной нулю при $t = T$.

Здесь используются обозначения:

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \sum_{i=1}^{3} u_i\, v_i, \qquad \nabla \mathbf{u} : \nabla \mathbf{v} = \sum_{i=1}^{3} \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial v_i}{\partial x_j}.$$

Пусть выполнено следующее предположение: $\mu(c) \in \mathbb{C}^2(0, +\infty)$, $|\mu|_{\Omega_T}^{(1)} < \nu_0{}^{-1}$, $0 < \nu_0 \le \mu(c) \le \frac{1}{\nu_0}$, $0 \le c_0(x) \le 1$, $c_0(x) \in \mathbb{L}_\infty(\Omega)$, $\int_{\Omega_T} |\mathbf{F}|^2\, dx\, dt = F^2 < \infty$.

Теорема 1. *Задача* (1.1)–(1.5) *имеет хотя бы одно обобщенное решение и для него справедливы оценки:*

$$\max_{0<t<T} \int_\Omega \Big(\alpha_\tau |\mathbf{v}|^2 + \frac{1}{\alpha_p} p^2 \Big)\, dx + \int_{\Omega_T} (\alpha_\nu (\mathrm{div}\, \mathbf{v})^2 + \alpha_\mu |\nabla \mathbf{v}|^2)\, dx\, dt \leqslant M F^2, \tag{2.3}$$

$$0 \leqslant c(x,t) \leqslant 1. \tag{2.4}$$

где M — постоянная, зависящая только от ν_0 и T.

3. ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ

Пусть множество $\mathfrak{M}$ определено как $\mathfrak{M} = \{\bar{c} \in \mathbb{C}(\Omega_T) \mid 0 \leqslant \bar{c} \leqslant 1\}$. Для $\bar{c} \in \mathfrak{M}$ определим функцию $\mathbf{u}(x,t)$ как решение задачи

$$\alpha_\tau \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = \mathrm{div}\, (\alpha_\mu \mu(\bar{c}) \nabla \mathbf{u} + (\alpha_\nu\, \mathrm{div}\, \mathbf{u} - q) \mathbb{I}) + \mathbf{F}, \tag{3.1}$$

$$\frac{\partial q}{\partial t} + \alpha_p\, \mathrm{div}\, \mathbf{u} = 0, \tag{3.2}$$

$$\mathbf{u}(x,t) = 0 \quad \text{при} \quad x \in \Gamma, \qquad \mathbf{u}(x,0) = 0 \quad \text{при} \quad x \in \Omega, \tag{3.3}$$

Определение 2. Функции $\mathbf{u}(\mathbf{x},t)$ и $q(\mathbf{x},t)$ называются *обобщенным решением задачи* (3.1)–(3.3) в области Ω_T, если

1) $\partial q/\partial t \in \mathbb{L}_2(\Omega_T), \quad \mathbf{u} \in \mathbb{W}_2^{1,0}(\Omega_T)$;

2) почти всюду в области Ω_T выполнено уравнение неразрывности (3.2);

3) функции $\mathbf{u}$ и q удовлетворяют интегральному тождеству:

$$\int_{\Omega_T}\Big(\alpha_\tau \mathbf{u}\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial t} - \alpha_\mu\mu(\overline{c})\nabla\mathbf{u} : \nabla\varphi - \alpha_\nu \operatorname{div}\mathbf{u}\operatorname{div}\varphi + q\operatorname{div}\varphi + \mathbf{F}\cdot\varphi\Big)\,dx\,dt = 0 \tag{3.4}$$

для произвольной гладкой вектор-функции $\varphi(\mathbf{x},t)$, равной нулю на границе Γ и при $t=T$.

Лемма 1. *Для каждого фиксированного $\bar{c} \in \mathfrak{M}$ существует единственное обобщенное решение задачи* (3.1)–(3.3) *и для него справедлива оценка*

$$\max_{0<t<T}\int_\Omega\Big(\alpha_\tau|\mathbf{u}|^2 + \frac{1}{\alpha_p}q^2\Big)\,dx + \int_{\Omega_T}\Big(\alpha_\nu(\operatorname{div}\mathbf{u})^2 + \alpha_\mu|\nabla\mathbf{u}|^2\Big)\,dx\,dt \leqslant MF^2. \tag{3.5}$$

Доказательство. Полагая в тождестве (3.4) $\mathbf{u} = \varphi$ и выражая в нем $\operatorname{div}\mathbf{u}$ в третьем слагаемом из уравнения неразрывности (3.2), получим стандартным образом равенство

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_\Omega\Big(\alpha_\tau|\mathbf{u}|^2 + \frac{1}{\alpha_p}q^2\Big)\,dx + \alpha_\nu\int_\Omega(\operatorname{div}\mathbf{u})^2\,dx + \alpha_\mu\int_\Omega\mu(\bar{c})|\nabla\mathbf{u}|^2\,dx = \int_\Omega\mathbf{F}\cdot\mathbf{u}\,dx.$$

Проинтегрируем его по времени в пределах от 0 до T, учтем предположение $0 < \nu_0 \leqslant \mu(c) \leqslant 1/\nu_0$, а правую часть оценим с помощью неравенства Коши с ε:

$$\frac{1}{2}\max_{0<t<T}\int_\Omega\Big(\alpha_\tau|\mathbf{u}|^2 + \frac{1}{\alpha_p}q^2\Big)\,dx + \alpha_\nu\int_{\Omega_T}(\operatorname{div}\mathbf{u})^2\,dx\,dt + \alpha_\mu\nu_0\int_\Omega|\nabla\mathbf{u}|^2\,dx\,dt \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{2\varepsilon}\int_{\Omega_T}|\mathbf{F}|^2\,dx\,dt + \frac{\varepsilon T}{2}\max_{0<t<T}\int_\Omega|\mathbf{u}|^2\,dx, \quad \forall\,\varepsilon > 0.$$

Полагая $\varepsilon = \alpha_\tau/2T$, получим требуемую оценку (3.5).

Она позволяет доказать существование и единственность обобщенного решения методом Фаэдо – Галеркина, подробное изложение можно найти, например, в работе [2, с. 88]. Лемма доказана.

Пусть $\mathfrak{N}$ — нормированное пространство с нормой:

$$(\|\mathbf{u}\|_{\mathfrak{N}})^2 = \max_{0<t<T}\int_\Omega|\mathbf{u}|^2\,dx + \int_{\Omega_T}\Big((\operatorname{div}\mathbf{u})^2 + |\nabla\mathbf{u}|^2\Big)\,dx\,dt. \tag{3.6}$$

В силу леммы 1 определен оператор $\mathbb{A} : \mathfrak{M} \to \mathfrak{N}$ такой, что $\mathbf{u} = \mathbb{A}(\bar{c})$.

Лемма 2. *Оператор $\mathbb{A}$ — непрерывный.*

Доказательство. Пусть $\mathbf{u}_1 = \mathbb{A}(\bar{c}_1)$, $\mathbf{u}_2 = \mathbb{A}(\bar{c}_2)$, $\mathbf{u} = \mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2$, $\bar{c} = \bar{c}_1 - \bar{c}_2$, $q = q_1 - q_2$. Тогда разность ($\mathbf{u}$, q) является решением следующей начально-краевой задачи:

$$\alpha_\tau\frac{\partial\mathbf{u}}{\partial t} = \operatorname{div}\big(\alpha_\mu\mu(\bar{c}_1)\nabla\mathbf{u} + (\alpha_\nu\operatorname{div}\mathbf{u} - q)I\big) + \alpha_\mu\operatorname{div}\big((\mu(\bar{c}_1) - \mu(\bar{c}_2))\,\nabla\mathbf{u_2}\big), \tag{3.7}$$

$$\frac{\partial q}{\partial t} + \alpha_p\operatorname{div}\mathbf{u} = 0,$$

$$\mathbf{u}(x,t) = 0 \quad \text{при} \quad x\in\Gamma, \qquad \mathbf{u}(x,0) = 0 \quad \text{при} \quad x\in\Omega.$$

Умножим уравнение (3.7) на функцию $\mathbf{u}$ и проинтегрируем по области Ω:

$$\alpha_\tau\int_\Omega\frac{\partial\mathbf{u}}{\partial t}\cdot\mathbf{u}\,dx - \alpha_\mu\int_\Omega\operatorname{div}\big(\mu(\bar{c}_1)\,\nabla\mathbf{u}\big)\cdot\mathbf{u}\,dx - \int_\Omega\operatorname{div}\big((\alpha_\nu\operatorname{div}\mathbf{u} - q)\mathbb{I}\big)\cdot\mathbf{u}\,dx =$$

$$= \alpha_\mu\int_\Omega\operatorname{div}\big((\mu(\bar{c}_1) - \mu(\bar{c}_2))\nabla\mathbf{u}_2\big)\cdot\mathbf{u}\,dx.$$

Выполняя интегрирование по частям и выражая $\operatorname{div}\mathbf{u}$ из уравнения неразрывности, имеем:

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_\Omega\Big(\alpha_\tau|\mathbf{u}|^2 + \frac{1}{\alpha_p}q^2\Big)\,dx + \alpha_\nu\int_\Omega(\operatorname{div}\mathbf{u})^2\,dx + \alpha_\mu\int_\Omega\mu(\bar{c_1})|\nabla\mathbf{u}|^2\,dx =$$

$$= -\alpha_\mu \int_\Omega (\mu(\bar c_1) - \mu(\bar c_2))(\nabla \mathbf{u_2} : \nabla \mathbf{u})\, dx.$$

Проинтегрировав последнее равенство по времени в пределах от 0 до T, получаем

$$\max_{0<t<T} \int_\Omega \left(\alpha_\tau |\mathbf{u}|^2 + \frac{1}{\alpha_p} q^2\right) dx + 2\alpha_\nu \int_\Omega (\operatorname{div} \mathbf{u})^2\, dx\, dt + 2\alpha_\mu \int_\Omega \mu(\bar c_1) |\nabla \mathbf{u}|^2\, dx\, dt =$$

$$= -2\alpha_\mu \int_{\Omega_T} (\mu(\bar c_1) - \mu(\bar c_2))(\nabla \mathbf{u_2} : \nabla \mathbf{u})\, dx\, dt. \tag{3.8}$$

Оценим теперь правую часть (3.8), пользуясь ограниченностью производной $\mu'(\bar c)$, неравенством Гельдера и неравенством Коши с ε:

$$\left| -2\alpha_\mu \int_\Omega (\mu(\bar c_1) - \mu(\bar c_2))(\nabla \mathbf{u_2} : \nabla \mathbf{u})\, dx\, dt \right| \leqslant \frac{2\alpha_\mu}{\nu_0} \int_{\Omega_T} |\bar c \nabla \mathbf{u_2} : \nabla \mathbf{u}|\, dx\, dt \leqslant$$

$$\leqslant \frac{2\alpha_\mu}{\nu_0} \sqrt{\int_{\Omega_T} |\bar c \nabla \mathbf{u_2}|^2\, dx\, dt} \sqrt{\int_{\Omega_T} |\nabla \mathbf{u}|^2\, dx\, dt} \leqslant \frac{2\alpha_\mu}{\nu_0} \left(\frac{\varepsilon}{2} \int_{\Omega_T} |\nabla \mathbf{u}|^2\, dx\, dt + \frac{1}{2\varepsilon} \int_{\Omega_T} |\bar c \nabla \mathbf{u_2}|^2\, dx\, dt \right).$$

Учитывая строгую положительность функции $\mu(c)$ оценим левую часть (3.8) снизу выражением $M_0 \|\mathbf{u}\|_{\mathfrak{N}}$.

Далее положим $\varepsilon = \nu_0^2/2$ и воспользуемся оценкой (3.5) для $|\nabla \mathbf{u_2}|$. Имеем:

$$(\|\mathbf{u}\|_{\mathfrak{N}})^2 \leqslant M_1 F^2 \int_{\Omega_T} |\bar c|^2\, dx\, dt = M_1 F^2 \left(\|\bar c\|_{2,\Omega_T}\right)^2 \leqslant M_1 F^2 |\Omega_T| (\max_{\Omega_T} |\bar c|)^2 = M_2 \left(|\bar c|^{(0)}_{\Omega_T} \right)^2.$$

Таким образом, $\|\mathbf{u}\|_{\mathfrak{N}} \leqslant \sqrt{M_2}\, |\bar c|^{(0)}_{\Omega_T}$, что и доказывает непрерывность оператора $\mathbb{A}$. Лемма доказана.

Полученная таким образом функция $\mathbf{u}$, вообще говоря, не является достаточно гладкой, поэтому далее она сглаживается с использованием следующего оператора усреднения по переменным x и t:

$$\mathbf{w}_h(x,t) = \mathbf{M}^{(h)}(\mathbf{u}(x,t)) = \frac{1}{h^4} \int_t^{t+h} d\tau \int_{R^3} \eta\left(\frac{|x-y|}{h}\right) \mathbf{u}(y,\tau)\, dy,$$

где усредняющее ядро $\eta(s) \in \mathbb{C}(R^3)$ — четная неотрицательная функция, $\eta(s) = 0$, если $|s| \geqslant 1$, $\int_{|s|\leqslant 1} \eta(|s|)\, ds = 1$. Функции $\mathbf{w}_h$ являются гладкими, финитными и при $h \to 0$ сходятся к $\mathbf{u}$ по норме $L_2(\Omega'_{T-\delta})$ в любой строго внутренней подобласти $\Omega'_{T-\delta} \subset \Omega_T$, $h \leqslant \delta$.

Определим теперь функцию $c_h(x,t)$ как решение задачи

$$\frac{\partial c_h}{\partial t} + \mathbf{w_h} \nabla c_h = \alpha_D\, \Delta c_h, \tag{3.9}$$

$$\frac{\partial c_h(\mathbf{x},t)}{\partial \mathbf{n}} = 0 \quad \text{при} \quad x \in \Gamma, \qquad c_h(x,0) = \mathbf{M_1}^{(h)}(c_0(x)) \quad \text{при} \quad x \in \Omega, \tag{3.10}$$

где

$$\mathbf{M_1}^{(h)}(c_0(x)) = \frac{1}{h^3} \int_{R^3} \eta\left(\frac{|x-y|}{h}\right) c_0(y)\, dy.$$

Задача (3.9)–(3.10) как задача с бесконечно дифференцируемыми коэффициентами имеет единственное бесконечно дифференцируемое решение $c_h(x,t)$, для которого справедлив принцип максимума:

$$0 \leqslant c_h(x,t) \leqslant \max c_0(x) \leqslant 1. \tag{3.11}$$

Таким образом, для каждой фиксированной функции $\mathbf{u} \in \mathfrak{N}$ существует единственная функция $\bar c_h \in \mathfrak{M}$, т. е. определен оператор $\mathbb{B} : \mathfrak{N} \to \mathfrak{M}$ такой, что $c_h = \mathbb{B}(\mathbf{u})$.

Лемма 3. *Оператор $\mathbb{B}$ — непрерывный.*

Доказательство. Пусть $\mathbf{w}_1 = \mathbf{M}^{(h)}(\mathbf{u}_1)$, $\mathbf{w}_2 = \mathbf{M}^{(h)}(\mathbf{u}_2)$, $\mathbf{w} = \mathbf{w}_1 - \mathbf{w}_2$, $c_1 = \mathbb{B}(\mathbf{u}_1)$, $c_2 = \mathbb{B}(\mathbf{u}_2)$ (индекс h для краткости опускаем), $c = c_1 - c_2$.

Тогда разность c является решением следующей начально-краевой задачи:

$$\frac{\partial c}{\partial t} + \mathbf{w_1} \cdot \nabla c = \alpha_D\, \Delta c - \mathbf{w} \cdot \nabla c_2, \tag{3.12}$$

$$\frac{\partial c}{\partial \mathbf{n}} = 0 \quad \text{при} \quad x \in \Gamma, \qquad c(x,0) = 0 \quad \text{при} \quad x \in \Omega.$$

Умножим (3.12) на c и проинтегрируем по области Ω, применяя в двух слагаемых формулу интегрирования по частям:

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_\Omega c^2\,dx + \alpha_D \int_\Omega |\nabla c|^2\,dx = \int_\Omega \frac{c^2}{2}\operatorname{div}\mathbf{w}_1\,dx - \int_\Omega c\mathbf{w}\cdot\nabla c_2\,dx. \tag{3.13}$$

По построению $|\operatorname{div}\mathbf{w}_1| \leqslant N_1(h)$, $|\nabla c_2| \leqslant N_1(h)$. Оценим последнее слагаемое

$$\left|\int_\Omega c\mathbf{w}\cdot\nabla c_2\,dx\right| \leqslant \sqrt{\int_\Omega |c\,\nabla c_2|^2\,dx}\sqrt{\int_\Omega |\mathbf{w}|^2\,dx} \leqslant \sqrt{N_1(h)}\sqrt{\int_\Omega c^2\,dx}\sqrt{\int_\Omega |\mathbf{w}|^2\,dx} \leqslant$$

$$\leqslant N_2(h)\frac{1}{2}\left(\int_\Omega c^2\,dx + \int_\Omega |\mathbf{w}|^2\,dx\right).$$

Обозначим $y = \int_\Omega c^2\,dx$, тогда (3.13) влечет за собой неравенство

$$\frac{dy}{dt} \leqslant N_2(h)\left(y + \int_\Omega |\mathbf{w}|^2\,dx\right).$$

Воспользовавшись неравенством из [1, с. 112], получим

$$\max_{0<t<T}\int_\Omega c^2\,dx \leqslant N_3\int_{\Omega_T} |\mathbf{w}|^2\,dx\,dt,$$

или

$$\|c\|_{2,\Omega_T} \leqslant N_3\|\mathbf{w}\|_{2,\Omega_T}. \tag{3.14}$$

Чтобы получить оценку (2.14) для $|c|^{(0)}$, обратимся к лемме 3.3 из [1, с. 95].

В нашем случае $c(x,t) \in \mathbb{W}_2^{4,2}(\Omega_T)$, т. е. $l = 2$, $r = 0$, $s = 0$, $n = 3$, $\lambda = 0$,

$$|c|_{\Omega_T}^{(0)} \leqslant b_1\delta^{\frac{3}{2}}\langle\langle c\rangle\rangle_{2,\Omega_T}^{(4)} + b_2\delta^{-\frac{5}{2}}\|c\|_{2,\Omega_T} \equiv A\delta^{\frac{3}{2}} + B\delta^{-\frac{5}{2}} \equiv f(\delta).$$

Функция $f(\delta)$ достигает минимума при $\delta = \left(\frac{5B}{3A}\right)^{1/4}$, в этом случае $f(\delta) = b_3A^{5/8}B^{3/8}$ и

$$|c|_{\Omega_T}^{(0)} \leqslant b_4\left(\langle\langle c\rangle\rangle_{2,\Omega_T}^{(4)}\right)^{5/8}\left(\|c\|_{2,\Omega_T}\right)^{3/8}.$$

Окончательно получаем оценку

$$|c|_{\Omega_T}^{(0)} \leqslant b_5\|c\|_{2,\Omega_T} \leqslant b_6\|\mathbf{w}\|_{2,\Omega_T} \leqslant b_7\|\mathbf{u}\|_{2,\Omega_T}.$$

Таким образом, $|c|_{\Omega_T}^{(0)} \leqslant b_7\|\mathbf{u}\|_{2,\Omega_T}$, что и означает непрерывность оператора $\mathbb{B}$. Лемма доказана.

Определим теперь оператор $\mathbf{\Phi} : \mathfrak{M} \to \mathfrak{M}$, $c_h = \mathbf{\Phi}(\bar{c}) = \mathbb{B}\left(\mathbb{A}(\bar{c})\right)$.

Лемма 4. *Оператор $\mathbf{\Phi}$ имеет хотя бы одну неподвижную точку.*

Доказательство. Оператор $\mathbf{\Phi}$ непрерывен как суперпозиция непрерывных операторов. Более того, можно доказать, что он вполне непрерывен. Для доказательства воспользуемся теоремой Арцела о том, что множество M непрерывных функций, определенных в M, компактно тогда и только тогда, когда входящие в M функции равномерно ограничены и равностепенно непрерывны.

В нашей задаче для фиксированного $h > 0$ функции $c_h(x,t)$ по построению обладают ограниченными производными по x и по t, поэтому

$$|c_h(x',t) - c_h(x'',t)| \leqslant \frac{\partial c_h(x^*,t)}{\partial x_j}\,|x_j' - x_j''| \leqslant N_j|x' - x''|, \qquad j = 1,2,3,$$

$$|c_h(x,t') - c_h(x,t'')| \leqslant \frac{\partial c_h(x,t^*)}{\partial t}\,|t' - t''| \leqslant N|t' - t''|,$$

т. е. функции $c_h(x,t)$ равностепенно непрерывны по x и по t. Равномерная ограниченность очевидна. Таким образом, оператор Φ переводит любое ограниченное множество в компактное, т. е. является вполне непрерывным.

Множество $\mathfrak{M}$, очевидно, является выпуклым.

Все вышесказанное позволяет применить к оператору $\mathbf{\Phi} : \mathfrak{M} \to \mathfrak{M}$ теорему Шаудера о неподвижной точке [3, с. 411]. Лемма доказана.

Пусть $c_h^* = \mathbf{\Phi}(c_h^*)$ — неподвижная точка оператора $\mathbf{\Phi}$, и пусть $\mathbf{u}_h^* = \mathbb{A}(c_h^*)$. Тогда

$$\alpha_\tau \frac{\partial \mathbf{u}_h^*}{\partial t} = \operatorname{div} \left(\alpha_\mu \mu(c_h^*)\nabla \mathbf{u}_h^* + (\alpha_\nu \operatorname{div} \mathbf{u}_h^* - q_h^*)\mathbb{I}\right) + \mathbf{F}, \tag{3.15}$$

$$\frac{\partial q_h^*}{\partial t} + \alpha_p \operatorname{div} \mathbf{u}_h^* = 0, \tag{3.16}$$

$$\frac{\partial c_h^*}{\partial t} + \mathbf{M}^{(h)}(\mathbf{u}_h^*) \cdot \nabla c_h^* = \alpha_D\, \Delta c_h^*, \tag{3.17}$$

$$\mathbf{u}_h^*(x,t) = 0 \quad \text{при} \quad x \in \Gamma, \qquad \mathbf{u}_h^*(x,0) = 0 \quad \text{при} \quad x \in \Omega, \tag{3.18}$$

$$\frac{\partial c_h^*(x,t)}{\partial \mathbf{n}} = 0 \quad \text{при} \quad x \in \Gamma, \qquad c_h^*(x,0) = \mathbf{M_1}^{(h)}(c_0(x)) \quad \text{при} \quad x \in \Omega. \tag{3.19}$$

4. ПРЕДЕЛЬНЫЙ ПЕРЕХОД

Лемма 5. *Решение* $(\mathbf{v}, p, c)$ *исходной задачи* (1.1)–(1.5) *есть предел при* $h \to 0$ *решений* $(\mathbf{u}_h^*, q_h^*, c_h^*)$ *задачи* (3.15)–(3.19).

Доказательство. Индекс $*$ опускаем. Умножим (3.15) на произвольную гладкую вектор-функцию $\varphi(\mathbf{x},t)$, равную нулю на границе Γ и при $t = T$, и проинтегрируем по области Ω_T.

$$\int_{\Omega_T} \left(\alpha_\tau \mathbf{u_h} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial t} - \alpha_\mu \mu(c_h)\nabla \mathbf{u_h} : \nabla \varphi - \alpha_\nu \operatorname{div} \mathbf{u_h} \operatorname{div} \varphi + q_h \operatorname{div} \varphi + \mathbf{F}\cdot\varphi\right) dx\, dt = 0.$$

Пусть $h \to 0$. Легко видеть, что оценки (3.5) и (3.11) справедливы для всех h с постоянными, не зависящими от h. Оценка (3.5) позволяет из последовательности $\{\mathbf{u}_h\}$ выбрать подпоследовательность такую, что $\mathbf{u}_h \rightharpoonup \mathbf{u}$ слабо в $\mathbb{W}_2^{1,0}(\Omega_T)$.

Согласно [2, с. 18] имеем компактное вложение $\mathbb{W}_2^1(\Omega) \subset \mathbb{L}_2(\Omega) \subset (\mathbb{W}_2^1(\Omega))^*$. Обозначим $W = \left\{v |\, v \in \mathbb{W}_2^{1,0}(\Omega_T);\, \frac{\partial v}{\partial t} \in (\mathbb{W}_2^1(\Omega))^*\right\}$. Очевидно, что $\mathbf{u}_h \in W$. По теореме о компактности [2, с. 70, теорема 5.1] вложение $W \subset \mathbb{L}_2(\Omega_T)$ компактно. Это означает, что $\mathbf{u}_h \to \mathbf{v}$ сильно в $\mathbb{L}_2(\Omega_T)$.

Аналогично в силу оценки (3.11) из последовательности $\{c_h\}$ можно выбрать подпоследовательность такую, что $c_h \rightharpoonup c$ слабо в $\mathbb{W}_2^{1,0}(\Omega_T)$. Согласно той же теореме о компактности $c_h \to c$ сильно в $\mathbb{L}_2(\Omega_T)$, а так как $\mu(c_h)$ непрерывна, то $\mu(c_h) \to \mu(c)$ сильно в $\mathbb{L}_2(\Omega_T)$. Отсюда мы имеем слабую сходимость

$$\alpha_\mu \mu(c_h)\nabla \mathbf{u} : \nabla \varphi \rightharpoonup \alpha_\mu \mu(c)\nabla \mathbf{u} : \nabla \varphi.$$

Из оценки (3.5) заключаем также, что $q_h \rightharpoonup p$ слабо в $\mathbb{L}_2(\Omega_T)$, $\frac{\partial q_h}{\partial t} \rightharpoonup \frac{\partial p}{\partial t}$ слабо в $\mathbb{L}_2(\Omega_T)$, и выполняем предельный переход в остальных слагаемых тождества (3.15), а также в уравнении (3.16).

Рассмотрим теперь предельный переход в уравнении диффузии (3.17), которое представим в виде интегрального тождества. Умножим (3.17) на произвольную гладкую функцию $\xi(x,t)$, равную нулю при $t = T$, и проинтегрируем по Ω_T:

$$\int_{\Omega_T} \left(-c_h \frac{\partial \xi}{\partial t} + \mathbf{M}^{(h)}(\mathbf{u}_h)\, \nabla c_h \xi + \alpha_D\, \nabla c_h \cdot \nabla \xi\right) dx\, dt = \int_\Omega \mathbf{M}^{(h)}(c_0(x))\xi(x,0)\, dx. \tag{4.1}$$

Получим оценку для ∇c_h. Умножим (3.17) на c_h и проинтегрируем по Ω:

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_\Omega c_h^2\, dx + \int_\Omega c_h \mathbf{M}^{(h)}(\mathbf{u}_h) \cdot \nabla c_h\, dx = \alpha_D \int_\Omega |\nabla c_h|^2\, dx. \tag{4.2}$$

Учитывая (3.11), оценим второе слагаемое:

$$\int_\Omega c_h \mathbf{M}^{(h)}(\mathbf{u}_h) \cdot \nabla c_h\, dx \leqslant \int_\Omega \mathbf{M}^{(h)}(\mathbf{u}_h) \cdot \nabla c_h\, dx \leqslant \sqrt{\int_\Omega |\mathbf{M}^{(h)}(\mathbf{u}_h)|^2\, dx}\sqrt{\int_\Omega |\nabla c_h|^2\, dx} \leqslant$$

$$\leqslant N\|\mathbf{u}_h\|_{2,\Omega} \cdot \|\nabla c_h\|_{2,\Omega} \leqslant \frac{\varepsilon}{2}(\|\nabla c_h\|_{2,\Omega})^2 + \frac{1}{2\varepsilon}(\|\mathbf{u}_h\|_{2,\Omega})^2.$$

Положим $\varepsilon = \alpha_D$ и проинтегрируем (4.2) по времени, получим

$$\alpha_D(\|\nabla c_h\|_{2,\Omega_T})^2 \leqslant \frac{1}{2}(\|c_h\|_{2,\Omega_T})^2 + \frac{\alpha_D}{2}(\|\nabla c_h\|_{2,\Omega_T})^2 + \frac{1}{2\alpha_D}(\|\mathbf{u}_h\|_{2,\Omega_T})^2,$$

откуда $(\|\nabla c_h\|_{2,\Omega_T})^2 \leqslant N_1(\|\mathbf{u}_h\|_{2,\Omega_T})^2$. Следовательно, $\nabla c_h \rightharpoonup \nabla c$ слабо в $\mathbb{L}_2(\Omega_T)$.

Таким образом, в уравнении диффузии есть сложность в одном слагаемом:

$$\int_{\Omega_T} \xi \mathbf{M}^{(h)}(\mathbf{u}_h) \cdot \nabla c_h \, dx\, dt \equiv I_h,$$

поскольку оба сомножителя всего лишь слабо сходятся. Из свойств усреднений имеем $\mathbf{M}^{(h)}(\mathbf{u}) \to \mathbf{u}$ сильно в $\mathbb{L}_2(\Omega_T)$, $\|\mathbf{M}^{(h)}(\mathbf{u}_h)\|_{2,\Omega_T} \leqslant N\|\mathbf{u}_h\|_{2,\Omega_T}$. Поэтому

$$I_h = \int_{\Omega_T} \xi(\mathbf{M}^{(h)}(\mathbf{u}_h) - \mathbf{M}^{(h)}(\mathbf{u})) \cdot \nabla c_h \, dx\, dt + \int_{\Omega_T} \xi(\mathbf{M}^{(h)}(\mathbf{u}) - \mathbf{u}) \cdot \nabla c_h \, dx\, dt + \int_{\Omega_T} \xi \mathbf{u} \cdot \nabla c_h \, dx\, dt \equiv I_1 + I_2 + I_3,$$

$$|I_1| \leqslant \max_{x,t} |\xi| \, \|\nabla c_h\|_{2,\Omega_T} \, \|\mathbf{M}^{(h)}(\mathbf{u}_h - \mathbf{u})\|_{2,\Omega_T} \leqslant N\|\mathbf{u}_h - \mathbf{u}\|_{2,\Omega_T} \to 0, \qquad h \to 0,$$

$$|I_2| \leqslant N_1\|\mathbf{M}^{(h)}(\mathbf{u}) - \mathbf{u}\|_{2,\Omega_T} \to 0, \quad h \to 0.$$

Окончательно получаем

$$I_h \to \int_{\Omega_T} \xi \mathbf{u} \cdot \nabla c \, dx\, dt, \quad h \to 0.$$

В остальных слагаемых интегрального тождества (4.1) предельный переход будет стандартным. Лемма доказана.

Из доказанных лемм следует утверждение теоремы 1.

Библиографический список

1. *Ладыженская, О.А.* Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа / О.А. Ладыженская, В.А. Солонников, Н.Н. Уральцева. – М.: Наука, 1967. – 736 с.
2. *Лионс, Ж.-Л.* Некоторые методы решения нелинейных краевых задач / Ж.-Л. Лионс. – М.: Мир, 1972. – 588 с.
3. *Треногин, В.А.* Функциональный анализ / В.А. Треногин. – М.: Наука, 1980. – 496 с.

УДК 517.956

ЗАДАЧА ТРИКОМИ ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-РАЗНОСТНОГО УРАВНЕНИЯ СМЕШАННОГО ТИПА В НЕСИММЕТРИЧНОЙ ОБЛАСТИ

О.В. Лаштабега, А.Н. Зарубин

Орловский государственный университет,
кафедра математического анализа и дифференциальных уравнений
E-mail: aleks_zarubin@mail.ru, tanda80@yandex.ru

В работе исследуется краевая задача для уравнения смешанного типа с двумя перпендикулярными линиями вырождения и запаздыванием в производной.

Ключевые слова: уравнение, краевая задача, смешанный тип, линия вырождения, запаздывание.

Tricomi Problem for Differential-Difference Equations of Mixed Type in the Asymmetric Field

O.V. Lashtabega, A.N. Zarubin

Orel State University,
Chair of Mathematical Analysis and Differential Equations
E-mail: aleks_zarubin@mail.ru, tanda80@yandex.ru

The paper examines the boundary value problem for mixed type equations with two perpendicular lines of degeneracy and the delay in the derivative.

Key words: equation, boundary value problem, mixed type, the line of degeneracy, the delay.