

УДК 539.3

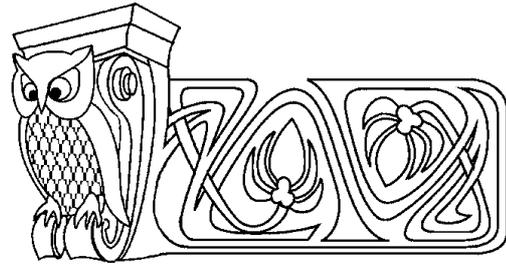
## ИССЛЕДОВАНИЕ КВАЗИСТАТИЧЕСКОГО ИЗГИБА СТЕРЖНЯ НА ОСНОВЕ РЕШЕНИЯ ВАРИАЦИОННОЙ ЗАДАЧИ

А. В. Гриценко

Воронежский государственный университет,  
кафедра математического и прикладного анализа  
E-mail: gritsenko@teamidea.ru

Проведено исследование существования квазистатического поведения упругого консольного стержня, нагруженного потенциальными внешними воздействиями. Для случая, когда математической моделью является вариационная задача, получена статически особая точка, при пересечении которой траекторией нагружения происходит смена вида квазистатического процесса.

**Ключевые слова:** изгиб стержня, вариационная задача.



### Investigation of Quasi-Static Bending of the Bar on the Basis of Variation Problem

A. V. Gritsenko

Voronezh State University,  
Chair of Mathematical and Applied Analysis  
E-mail: gritsenko@teamidea.ru

The investigation of the existence of quasi-static behavior of elastic cantilever bar subjected to potential external effects. For the case when the mathematical model is a variational problem is obtained statically singular point, when crossing the path of loading is a change of type of quasi-static process.

**Key words:** bending of the bar, variation problem.

Рассмотрим проблему осуществления квазистатического поведения упругого стержня при продольно-поперечном изгибе, нагруженного внешними силами, как показано на рис. 1.

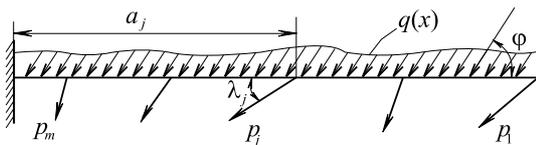


Рис. 1

Поскольку внешние силы в рассматриваемой задаче являются потенциальными, то исследование существования квазистатического процесса можно проводить в статической постановке. Рассмотрим случай, когда математической моделью является вариационная задача [1].

Потенциальная энергия изогнутого стержня и работа внешних сил с точностью до величин второго порядка малости определяется следующим образом [2]:

$$\Pi = \frac{1}{2} \int_0^{\ell} EI(u'')^2 dx,$$

$$A = \int_0^{\ell} \left\{ \frac{1}{2} q \left( \int_0^x (u')^2 d\xi \right) \cos \varphi + qu \sin \varphi \right\} dx + \sum_{j=1}^m \left( \frac{1}{2} p_j \cos \lambda_j \int_0^{a_j} (u')^2 dx + p_j u(a_j) \sin \lambda_j \right).$$

Согласно принципу возможных перемещений, функция  $u(x)$ , описывающая форму изогнутого стержня, является решением вариационной задачи:

$$\delta(\Pi - A) = 0. \tag{1}$$

Пусть при  $\lambda_j = \lambda_{j0}$ ,  $\varphi = \varphi_0$ ,  $q = q_0(x)$  функция

$$u = u_0(x, p_j) \tag{2}$$

является точкой экстремума функционала  $\Phi = \Pi - A$ , т. е. является решением задачи (1).

Для проведения исследований существования квазистатического процесса вида, близкого к (2), как следует из теоремы о неявных функциях [1, 2], надо построить вспомогательный функционал относительно функции  $\zeta(x)$ :

$$\Phi_1 = \frac{1}{2} \int_0^{\ell} \left\{ EI(u'' - \zeta'')^2 - \left( \int_x^{\ell} q_0(\xi) d\xi \right) (u' - \zeta')^2 \cos \varphi_0 - 2q(u - \zeta) \sin \varphi_0 \right\} dx -$$



$$-\frac{1}{2} \sum_{j=1}^m \left( p_j \cos \lambda_{j0} \int_0^{a_j} (u' - \zeta')^2 dx + 2p_j(u(a_j) - \zeta(a_j)) \sin \lambda_{j0} \right). \quad (3)$$

Квадратичный функционал  $\Phi_2$ , соответствующий функционалу  $\Phi_1$ , как следует из (3), будет иметь вид

$$\Phi_2 = \int_0^\ell \left\{ EI(\zeta'')^2 - \left( \int_x^\ell q_0(\xi) d\xi \right) (\zeta')^2 \cos \varphi_0 \right\} dx - \sum_{j=1}^m \left( p_j \cos \lambda_{j0} \int_0^{a_j} (\zeta')^2 dx \right). \quad (4)$$

Согласно [3, 4] для существования рассматриваемого квазистатического процесса необходимо, чтобы вариационная задача

$$\delta\Phi_2 = 0 \quad (5)$$

имела только тривиальное решение.

Решение задачи (5) будем искать в виде (граничные условия  $\zeta(0) = \zeta'(0) = 0$ )

$$\zeta = \frac{b_1}{\ell} x^2 + \frac{b_2}{\ell^3} x^4.$$

Для однородного стержня постоянного сечения при  $q(x) \equiv q_0$  ( $q_0 = \text{const}$ ) и  $m = 1$  из (4) и (5) получаем, что (5) сводится к отысканию экстремума следующей функции двух переменных:

$$\chi(b_1, b_2) = \frac{EI}{\ell} \left\{ 4b_1^2 + \frac{144}{5}b_2^2 + 16b_1b_2 - \alpha_1 \left( \frac{4}{3}b_1^2 + \frac{16}{7}b_2^2 + \frac{16}{5}b_1b_2 \right) \cos \lambda_{10} - \alpha_2 \left( \frac{1}{3}b_1^2 + \frac{3}{7}b_2^2 + \frac{8}{15}b_1b_2 \right) \cos \varphi_0 \right\}, \quad (6)$$

где

$$\alpha_1 = \frac{p_1 \ell^2}{EI}, \quad \alpha_2 = \frac{q_0 \ell^3}{EI}.$$

Условия экстремума функции (6) имеют вид

$$\begin{aligned} (60 - 20\alpha_1 \cos \lambda_{10} - 5\alpha_2 \cos \varphi_0)b_1 + (120 - 24\alpha_1 \cos \lambda_{10} - 4\alpha_2 \cos \varphi_0)b_2 &= 0, \\ (840 - 168\alpha_1 \cos \lambda_{10} - 8\alpha_2 \cos \varphi_0)b_1 + (3024 - 240\alpha_1 \cos \lambda_{10} - 45\alpha_2 \cos \varphi_0)b_2 &= 0. \end{aligned} \quad (7)$$

Условие равенства нулю определителя системы (7) будет следующим:

$$768\alpha_1^2 \cos^2 \lambda_{10} + 133\alpha_2^2 \cos^2 \varphi_0 - 534\alpha_1\alpha_2 \cos \lambda_{10} \cos \varphi_0 - 34560\alpha_1 \cos \lambda_{10} - 11940\alpha_2 \cos \varphi_0 + 80640 = 0. \quad (8)$$

На рис. 2 приведены графики зависимости критических значений параметров внешних нагрузок  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$ , соответствующие (8): 1 — при  $\lambda_{10} = \varphi_0 = 0$ , 2 — при  $\lambda_{10} = \varphi_0 = \pi/3$ . Кривые, представленные на рис. 2, определяют границу области существования квазистатического процесса, соответствующего (2). При пересечении траекторий нагружения этих графиков происходит смена вида квазистатического процесса.

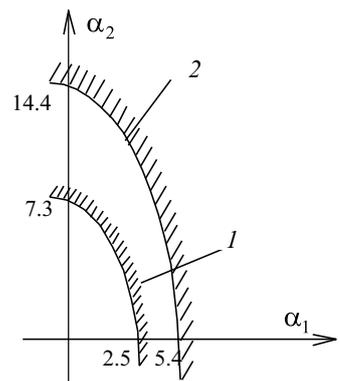


Рис. 2

### Библиографический список

1. Ланцош К. Вариационные принципы механики. М.: Мир, 1965. 408 с.
2. Работнов Ю. Н. Механика деформируемого твердого тела. М.: Наука, 1979. 744 с.
3. Колмогоров А. Н., Фомин С. В. Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Наука, 1976. 542 с.
4. Минаева Н. В. Адекватность математических моделей деформируемых тел. М.: Научная книга, 2006. 236 с.