мысли 2006: материалы науч.-практ. конф. Днепропетровск, 2006. Т. 4. С. 65–69.
15. *Натансон И. П.* Теория функций вещественной переменной М.: Наука, 1974. 468 с.
16. *Кириллова Ф. М., Чуракова С. В.* Относительная управляемость линейных динамических систем с запаздыванием // Докл. АН СССР. 1967. Т. 174, № 6. С. 1260–1263.

УДК 517.51

ПРИБЛИЖЕНИЕ ФУНКЦИЙ СРЕДНИМИ БОРЕЛЯ РЯДОВ ФУРЬЕ ПО МУЛЬТИПЛИКАТИВНЫМ СИСТЕМАМ

Т. В. Иофина

Саратовский государственный университет,
кафедра теории функций и приближений
E-mail: iofinat@mail.ru

В настоящей статье мы рассматриваем средние Бореля по системам Виленкина с ограниченной образующей последовательностью и получаем некоторые оценки приближений этими средними по норме L^p, а также в равномерной норме и норме типа Гёльдера в классах функций с заданной мажорантой наилучших приближений или модуля непрерывности. В тригонометрическом случае близкие результаты получены П. Чандрой, Л. Ремпульской и К. Томчаком.

Ключевые слова: системы Виленкина с ограниченной образующей последовательностью, средние Бореля, метрика типа Гёльдера, L^p-норма, равномерная норма.

Approximation of Functions by Borel Means of Fourier Series with Respect to Multiplicative Systems

T. V. Iofina

Saratov State University,
Chair of Theory of Functions and Approximations
E-mail: iofinat@mail.ru

In the present paper we consider Borel means of Fourier series with respect to Vilenkin systems with bounded generating sequence and obtain some estimates of approximation by this means in L^p, uniform and Hölder type norm in classes of functions with given majorant of best approximation or modulus of continuity. In the trigonometric case similar results were established by P.Chandra, L.Rempulska and K.Tomczak.

Key words: Vilenkin systems with bounded generating sequence, Borel means, Hölder type metric, L^p-norm, uniform norm.

ВВЕДЕНИЕ

Пусть 2π-периодическая функция $f \in L[0, 2\pi]$, $S_n(f)$ — частичные суммы ее ряда Фурье. Тогда величина $B_r = e^{-r} \sum\limits_{n=0}^{\infty} r^n S_n(f)/n!$ называется *средними Бореля* функции f. Метод суммирования по Борелю является регулярным [1, §4.12].

Обозначим через H_p^ω пространство Гёльдера, т. е. множество функций $f \in L^p[0, 2\pi]$, для которых выполнено неравенство $\|f(\cdot+h)-f(\cdot)\|_p \le \omega(h)$, где $\omega(h)$ — некоторый модуль непрерывности. Норму в этих пространствах определим равенством $\|f\|_{\omega,p} = \|f\|_p + \sup\limits_{h\in(0,\pi]} \dfrac{\|f(\cdot+h) - f(\cdot)\|_p}{\omega(h)}$. Приближение функций в метрике Гёльдера первым начал изучать З. Прёсдорф [2]. В работах [3–5] изучались оценки приближений средними Бореля в метрике Гёльдера. Так, в работе [3] была доказана следующая теорема.

Теорема A. *Пусть $f \in Lip^\beta[0, 2\pi]$, т. е. $f \in H_\infty^{\omega_\beta}$, где $\omega_\beta(h) = h^\beta$, $0 \le \alpha < \beta \le 1$. Тогда*

$$\|B_r(f) - f\|_{\omega_\alpha,\infty} = O(r^{\alpha-\beta} \log r).$$

Л. Ремпульска и К. Томчак [5] обобщили результаты, полученные Чандрой, для случая $f \in L^p[0, 2\pi]$, $1 \le p \le \infty$, и получили оценки приближений функций средними Бореля через модули непрерывности различных порядков. Ими были доказаны следующие теоремы.

Теорема B. *Для фиксированного $1 \le p \le \infty$ и $q \in \mathbb{N}$ существует константа $C = C(p, q)$, что для любой функции $f \in L^p[0, 2\pi]$ справедлива оценка*

$$\|B_r(f) - f\|_p \le CA_{r,p}\omega_q(1/r, f, p),$$

где $\omega_q(1/r; f, p)$ — модуль непрерывности порядка q и $A_{r,p} = \begin{cases} 1, & 1 < p < \infty; \\ \ln(r+2), & p = 1, \infty. \end{cases}$

Теорема С. *Пусть* ω_q, μ_q *— модули непрерывности порядка* q, $q \in \mathbb{N}$, *величина* $A_{r,p}$ *определяется, как в теореме В. Если* $\lambda_q := \omega_q/\mu_q$ *возрастает, то для любой функции* $f \in H_p^{\omega_q}$, $1 \le p \le \infty$ *справедлива оценка*

$$\|B_r(f) - f\|_{\mu_q,p} \le CA_{r,p}\lambda_q(1/r) \sup_{0<h\le\pi} \frac{\omega_q(h; f, p)}{\omega_q(h)}.$$

Метод Бореля в применении к мультипликативным системам, насколько нам известно, еще не рассматривался. В данной работе получены аналоги теорем В и С (см. теоремы 1 и 3). Для рядов Фурье по системам Виленкина удобнее получать оценки в терминах наилучших приближений по системе $\{\chi_n\}_{n=0}^{\infty}$, а вместо H_p^{ω} рассматривать $E_p(\varepsilon)$, которые можно назвать пространствами с метрикой типа Гёльдера. Приближения в метрике Гёльдера другими методами суммирования для системы $\{\chi_n\}_{n=0}^{\infty}$ изучались в [6].

1. НЕОБХОДИМЫЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ

Пусть $\{p_n\}_{n=1}^{\infty}$ — последовательность натуральных чисел, такая что $2 \le p_i \le N$, $i \in \mathbb{N}$. Положим по определению $m_0 = 1$, $m_n = p_1 p_2 ... p_n$ при $n \in \mathbb{N}$.

Каждое $x \in [0, 1)$ имеет разложение

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n}{m_n}, \quad 0 \le x_n < p_n, \quad x_n \in \mathbb{Z}, \quad n \in \mathbb{N}. \tag{1}$$

Для $x = k/m_l$, $0 < k < m_l$, $k, l \in \mathbb{N}$ берем разложение с конечным числом $x_n \ne 0$. Для x, y, записанных в виде (1), полагаем $x \ominus y = z = \sum\limits_{n=1}^{\infty} z_n/m_n$, где $0 \le z_n < p_n$, $z_n \in \mathbb{Z}$, $z_n = x_n - y_n (\mod p_n)$. Сумма $x \oplus y$ определяется аналогично. Каждое $k \in \mathbb{Z}_+ = \{0, 1, 2, \dots\}$ представимо в виде

$$k = \sum_{n=1}^{\infty} k_n m_{n-1}, \quad k_n \in \mathbb{Z}, \quad 0 \le k_n < p_n, \quad n \in \mathbb{N}. \tag{2}$$

Для $x \in [0, 1)$ и $k \in \mathbb{Z}_+$, записанных в виде (1) и (2), положим по определению $\chi_k(x) = \exp\left(2\pi i \sum\limits_{j=1}^{\infty} x_j k_j/p_j\right)$. Система функций $\{\chi_n\}_{n=0}^{\infty}$ называется мультипликативной системой, или системой Виленкина и является ортонормированной и полной в $L[0, 1)$, причем

$$\chi_k(x \oplus y) = \chi_k(x)\chi_k(y); \quad \chi_k(x \ominus y) = \chi_k(x)\overline{\chi_k(y)}$$

для почти всех y при фиксированном $x \in [0, 1)$ (см. [7, §1.5]).

Коэффициенты Фурье и частичная сумма Фурье для $f \in L[0, 1)$ по системе Виленкина задаются формулами $\hat{f}(k) = \int\limits_0^1 f(x)\overline{\chi_k(x)}\, dx$, $k \in \mathbb{Z}_+$, $S_n(f)(x) = \sum\limits_{k=0}^{n-1} \hat{f}(k)\chi_k(x)$, $n \in \mathbb{N}$. Для $f, g \in L[0, 1)$ свертка $f * g$ задается формулой $f * g(x) = \int\limits_0^1 f(x \ominus t)g(t)\, dt = \int\limits_0^1 f(t)g(x \ominus t)\, dt$. Далее важную роль имеет представление $S_n(f)(x) = \int\limits_0^1 f(x \ominus t)D_n(t)\, dt$, где $D_n(t) = \sum\limits_{k=0}^{n-1} \chi_k(t)$, $n \in \mathbb{N}$ — ядро Дирихле.

Будем рассматривать пространства $L^p[0, 1)$, $1 \le p < \infty$, измеримых интегрируемых в p-й степени функций с нормой $\|f\|_p = \left(\int\limits_0^1 |f(t)|^p dt\right)^{1/p}$, $1 \le p < \infty$, и $C^*[0, 1)$, снабженное нормой $\|f\|_\infty = \sup\limits_{x\in[0,1)} |f(x)|$ и состоящее из ограниченных функций, для которых справедливо

$$\lim_{h\to 0} \|f(x) - f(x \ominus h)\|_\infty = 0.$$

Во всех указанных пространствах определим модуль непрерывности следующим образом: $\omega^*(f, \delta)_p = \sup\limits_{0<h<\delta} \|f(x \ominus h) - f(x)\|_p$, $1 \le p \le \infty$. При $\delta = 1/m_n$, $n \in \mathbb{Z}_+$, величину $\omega^*(f, \delta)_p$ будем обозначать как $\omega_n(f)_p$. Пусть $\mathscr{P}_n := \{f \in L^1[0, 1) : \hat{f}(k) = 0, k \ge n\}$. Тогда наилучшее приближение по системе Виленкина порядка n вводится следующим образом: $E_n(f)_p := \inf\{\|f-t_n\|_p : t_n \in \mathscr{P}_n\}$. Пусть $\omega(\delta)$ — функция типа модуля непрерывности ($\omega(\delta) \in \Omega$), т. е. $\omega(\delta)$ непрерывна и возрастает на [0,1), причем $\omega(0)=0$ и $\omega(t)>0$ при $t>0$. Тогда пространство $H_p^\omega[0,1)$ состоит из $f \in L^p[0,1)$ $(1 \le p < \infty)$ или $f \in C^*[0,1)$ $(p=\infty)$, таких что $\omega^*(f,\delta)_p \le C\omega(\delta)$, где C зависит только от f. Через h_p^ω обозначим подпространство H_p^ω, такое что для $f \in h_p^\omega$ справедливо $\lim\limits_{h\to 0} \omega^*(f,h)_p/\omega(h) = 0$. Пространства $h_p^\omega[0,1)$ и $H_p^\omega[0,1)$ с нормой $\|f\|_{p,\omega} = \|f\|_p + \sup\limits_{0<h<1} \omega^*(f,h)_p/\omega(h)$ являются банаховыми [2].

При $\omega(\delta)=\delta^\alpha$, $\alpha>0$, $1 \le p < \infty$, пространство $H_p^\omega[0,1)$ обозначается через $Lip^*(\alpha,p)$. Ясно, что при $0<\beta<\alpha$ верно $Lip^*(\alpha,p) \subset Lip^*(\beta,p)$ и $\|f\|_{p,\beta} \le \|f\|_{p,\alpha}$.

Пусть $\varepsilon = \{\varepsilon_n\}_{n=1}^\infty$ — убывающая к 0 положительная последовательность. Тогда, по определению, $E_p(\varepsilon)$ состоит из $f \in L^p[0,1)$, $1 \le p < \infty$, или $f \in C^*[0,1)$, $p=\infty$, таких что $\|f\|_{E_p(\varepsilon)} = \|f\|_p + \sup\limits_{k\in\mathbb{N}} E_k(f)_p/\varepsilon_k < \infty$. Через $e_p(\varepsilon)$ обозначим множество функций $f \in E_p(\varepsilon)$, $1 \le p \le \infty$, для которых справедливо равенство $\lim\limits_{n\to\infty} E_k(f)_p/\varepsilon_k = 0$.

В работе изучаются оценки приближений функций величинами $B_r(f)(x) = e^{-r}\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{r^n}{n!} S_{n+1}(f)(x)$, называемыми средними Бореля.

В дальнейшем через C_i, $i \in \mathbb{N}$ и $C(p)$ будем обозначать некоторые константы, зависящие только от обозначенных аргументов.

2. ОЦЕНКИ ПРИБЛИЖЕНИЙ СРЕДНИМИ БОРЕЛЯ В РАВНОМЕРНОЙ И ИНТЕГРАЛЬНЫХ МЕТРИКАХ

В данном разделе выводятся оценки приближений функций из $L^p[0,1)$, $1<p<\infty$ и $C^*[0,1)$ средними Бореля.

Лемма 1. *Для $f \in L^p[0,1)$, $1<p<\infty$, верно неравенство $\|S_n(f,x)\|_p \le C(p)\|f\|_p$, $n \in \mathbb{N}$, где $C(p)$ не зависит от f и n.*

Для произвольных (в том числе и неограниченных) последовательностей $\{p_n\}_{n=1}^\infty$ лемма установлена Шиппом [8] и Сайманом [9].

Лемма 2 ([10, гл. 4, § 3, 4]). *1. Для всех $n \in \mathbb{N}$ и $x \in (0,1)$ верно неравенство $|D_n(x)| \le N/x$, где $p_n \le N$ для всех $n \in \mathbb{N}$.*

2. Существует $C>0$, такое что для всех $n \in \mathbb{N}$ верна оценка $\|D_n\|_1 \le C\ln(n+2)$.

Результат следующей леммы принадлежит А.В. Ефимову [7, §10.5].

Лемма 3. *Пусть $f \in L^p[0,1)$, $1 \le p < \infty$, или $f \in C^*[0,1)$ $(p=\infty)$. Тогда*

$$2^{-1}\omega^*(f,1/m_n)_p \le E_{m_n}(f)_p \le \|f - S_{m_n}(f)\|_p \le \omega^*(f,1/m_n)_p, \quad n \in \mathbb{N}.$$

В дальнейшем, следуя обозначениям теоремы B, будем использовать величину $A_{r,p}$ равную 1 при $1<p<\infty$ и $\ln(r+2)$ при $p=1,\infty$.

Лемма 4. *Для всех $f \in L^p[0,1)$, $1 \le p < \infty$, и $f \in C^*[0,1)$ $(p=\infty)$ при $r \ge 1$ справедлива оценка $\|B_r(f)\|_p \le C(p)\|f\|_p A_{r,p}$.*

Доказательство. По лемме 1 имеем $\|S_k(f)\|_p \le C_1\|f\|_p$ при $1<p<\infty$ и по лемме 2 $\|S_k(f)\|_p \le$ $\le \|f\|_p\|D_k\|_1 \le C_2\ln(k+2)\|f\|_p$ при $p=1$ или $p=\infty$. Тогда при $1<p<\infty$ сразу получаем

$$\|B_r(f)\|_p \le C_1 e^{-r}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{r^n}{n!}\|f\|_p = C_1\|f\|_p.$$

При $p=1,\infty$ и $r \ge 1$

$$\|B_r(f)\|_p \le C_2 e^{-r}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{r^n}{n!}\ln(n+2)\|f\|_p \le$$

$$\le C_2 e^{-r}\left(\sum_{n=0}^{[r]}\frac{r^n}{n!}\ln(r+2) + \sum_{n=[r]+1}^{\infty}\frac{r^n}{n!}\ln(n+2)\right)\|f\|_p = C_2 e^{-r}(\Sigma_1+\Sigma_2)\|f\|_p.$$

Оценим Σ_2. Поскольку $\ln x/x$ убывает при $x \ge e$, можно записать при $r \ge 1$

$$\Sigma_2 \le 3\sum_{n=[r]+1}^{\infty} r\frac{r^{n-1}}{(n-1)!}\frac{\ln(n+2)}{n+2} \le 3\frac{\ln([r]+2)}{[r]+2} r \sum_{n=[r]+1}^{\infty}\frac{r^{n-1}}{(n-1)!} \le 3e^r\ln(r+2).$$

Так как $\Sigma_1 \le \sum\limits_{n=0}^{\infty} r^n \ln(r+2)/n! = e^r \ln(r+2)$, то оценка леммы 1 верна при $C(p) = C_2(3+1) = 4C_2$. Лемма доказана.

Замечание 1. Аналогично доказательству леммы 4 доказывается оценка

$$\Big\| \sum_{n=0}^{\infty} \frac{r^n}{n!} D_{n+1} \Big\|_1 \le C \ln(r+2).$$

Следствие 1. *Пусть* $f \in L^p[0,1)$, $1 \le p \le \infty$. *Тогда*

$$E_n(B_r(f))_p \le C(p) E_n(f)_p A_{r,p}, \quad \omega_n(B_r(f))_p \le C(p)\omega_n(f)_p A_{r,p}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Доказательство. Ясно, что для $t_n \in \mathscr{P}_n$ имеем $B_r(t_n) \in \mathscr{P}_n$. Обозначим через t_n полином наилучшего приближения для f в L^p, т. е. $\|f - t_n\|_p = E_n(f)_p$. Известно, что для любой $f \in L^p[0,1)$, $1 \le p \le \infty$, t_n существует ([11], глава 1, §8). По лемме 4 имеем

$$E_n(B_r(f))_p \le \|B_r(f) - B_r(t_n)\|_p \le C_1 \|f - t_n\|_p A_{r,p} = C_1 E_n(f)_p A_{r,p}.$$

Второе неравенство следствия вытекает из первого и леммы 3. При $p = 1, \infty$ оно следует также из неравенства $\|f * g\|_p \le \|f\|_p \|g\|_1$ и замечания 1. Следствие доказано.

Теорема 1. *Пусть* $f \in L^p[0,1)$, $1 \le p < \infty$ *или* $f \in C^*[0,1)$ $(p = \infty)$. *Тогда*

$$\|B_r(f) - f\|_p \le C(p) A_{r,p} \sum_{k=0}^{[r]} \frac{r^k}{k!} e^{-r} E_{k+1}(f)_p.$$

Доказательство. Пусть $n \in \mathbb{N}$ и $E_n(f)_p = \|f - t_n\|_p$, $t_n \in \mathscr{P}_n$. Тогда в силу оценки леммы 4 имеем

$$\|B_r(f) - f\|_p \le \|B_r(f) - B_r(t_n)\|_p + \|B_r(t_n) - t_n\|_p + \|t_n - f\|_p \le \|B_r(t_n) - t_n\|_p + C_1 A_{r,p} E_n(f)_p.$$

Как указано выше, $B_r(t_n) \in \mathscr{P}_n$ и $S_k(t_n) = t_n$ при $k \ge n$, поэтому

$$\|B_r(t_n) - t_n\|_p = \left\| \sum_{k=0}^{n-1} \frac{r^k}{k!} e^{-r} (S_{k+1}(t_n) - t_n) \right\|_p \le C_2 \sum_{k=0}^{n-1} \frac{r^k}{k!} e^{-r} E_{k+1}(t_n)_p A_{r,p}$$

Так как при $k < n$ справедливо $E_{k+1}(t_n)_p \le E_{k+1}(t_n - f)_p + E_{k+1}(f)_p \le E_n(f)_p + E_{k+1}(f)_p \le$ $\le 2E_{k+1}(f)_p$, оценка для $\|B_r(f) - f\|_p$ примет вид

$$\|B_r(f) - f\|_p \le C_1 A_{r,p} E_n(f)_p + 2C_2 A_{r,p} \sum_{k=0}^{n} \frac{r^k}{k!} e^{-r} E_{k+1}(f)_p, \tag{3}$$

где $n \in \mathbb{N}$ произвольно. Докажем, что при $n = [r]$ верно неравенство

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{r^k}{k!} e^{-r} \ge C_4 > 0. \tag{4}$$

Пусть $m = [r^{1/2}]$. Сравним $S_1 = \sum\limits_{k=n-m}^{n} r^k/k!$ и $S_2 = \sum\limits_{k=n+1}^{n+m} r^k/k!$. Для этого обозначим

$$a_{n,k} = \frac{r^{n-k}}{(n-k)!} : \frac{r^{n+k}}{(n+k)!} = \frac{n(n+k)}{r^2} \left(1 - \frac{1^2}{r^2}\right) \dots \left(1 - \frac{(k-1)^2}{r^2}\right),$$

где $1 \le k \le m$. В силу неравенства $\prod\limits_{i=1}^{n} (1 + h_i) \ge 1 + \sum\limits_{i=1}^{n} h_i$ при $h_i > -1$, $n \in \mathbb{N}$, получаем, что

$$a_{n,k} \ge 1 - \sum_{i=1}^{k-1} \frac{i^2}{r^2} \ge 1 - \sum_{i=1}^{m} \frac{i^2}{r^2} = 1 - \frac{m(m+1)(2m+1)}{6r^2}.$$

В силу определения r последнее выражение стремится к 1 при $r \to \infty$. При достаточно больших r получаем

$$S_1 > S_2/2. \tag{5}$$

Далее, поскольку $r^k/k!$ убывает при $k \geq n = [r]$ и возрастает при $1 \leq k \leq [r] - 1$, то

$$S_3 := \sum_{k=n+m}^{2n} \frac{r^k}{k!} \leq \frac{r^{n+m}}{(n+m)!} \left(1 + \frac{r}{(n+m)} + \frac{r^2}{(n+m)^2} + \dots\right) \leq \frac{r^{n+m}}{(n+m)!} \left(1 - \frac{r}{n+m}\right)^{-1} \leq$$

$$\leq \frac{2nr^{n+m}}{m(n+m)!} \leq \frac{4nr^{n-m}}{m(n-m)!} \leq 4\frac{n}{m^2} \sum_{k=n-m}^{n} \frac{r^k}{k!} \leq 8S_1. \tag{6}$$

Здесь в предпоследнем неравенстве использовано неравенство $a_{n,k} > 1/2$ при $k = m$ и достаточно больших r, а в последнем неравенстве применена оценка (5). Наконец, для $S_4 = \sum\limits_{k=2n+1}^{\infty} r^k/k!$ имеем в силу неравенства $r/(2n+1) < 1/2$, убывания $r^k/k!$, а также (5) и (6), что

$$S_4 \leq \frac{r^{2n}}{(2n+1)!} \left(1 + \frac{r}{(2n+1)} + \frac{r^2}{(2n+1)^2} + \dots\right) \leq \frac{2r^{2n}}{(2n+1)!} \leq$$

$$\leq \frac{2}{n} \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{r^k}{k!} = 2n^{-1}(S_2 + S_3) \leq \frac{20S_1}{n}. \tag{7}$$

Из полученных соотношений (5)–(7) следует, что

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{r^k}{(k!)} = e^r - S_2 - S_3 - S_4 \geq e^r - 8S_1 - 2S_1 - \frac{20S_1}{n},$$

откуда $12 \sum\limits_{k=0}^{n} r^k/k! \geq 12S_1 \geq e^r$ при достаточно больших r. Из последнего неравенства легко следует нужная оценка (4).

В итоге, используя (4) и убывание $E_k(f)_p$ по k, получаем

$$E_n(f)_p \leq C_5 \sum_{k=0}^{[r]} \frac{r^k}{k!} e^{-r} E_{k+1}(f)_p.$$

Подставляя данное неравенство в (3), доказываем теорему.

Замечание 2. Правая часть неравенства в теореме 1, при $p = 1, \infty$ не всегда стремится к 0 при $r \to \infty$.

Применив теорему 1 для функций из классов Липшица, получим следующую оценку, правая часть которой стремиться к 0 для любого p при $r \to \infty$.

Следствие 2. *Пусть* $f \in Lip^*(\alpha, p)$, $1 \leq p \leq \infty$, $\alpha > 0$. *Тогда при* $r \geq 1$

$$\|B_r(f) - f\|_p \leq C(p) A_{r,p} r^{-\alpha}.$$

Доказательство. Так как для $f \in Lip^*(\alpha, p)$, $\alpha > 0$, по лемме 3 верно соотношение $E_k(f)_p = O(k^{-\alpha})$, то согласно теореме 1 имеем $\|B_r(f)_p - f\|_p \leq C_1 A_{r,p} \sum\limits_{k=0}^{[r]} r^k e^{-r}(k+1)^{-\alpha}/k!$. Оценим правую часть неравенства

$$J := A_{r,p} \sum_{k=0}^{[r]} \frac{r^k}{k!} e^{-r}(k+1)^{-\alpha} \leq A_{r,p}(r+1)^{-\alpha} e^{-r} \sum_{k=0}^{[r]} \frac{r^k}{k!} \left(\frac{r+1}{k+1}\right)^{\alpha}.$$

Пусть $m = [\alpha] + 1 \in \mathbb{N}$. Тогда $\left(\frac{r+1}{k+1}\right)^{\alpha} \leq \left(\frac{r+1}{k+1}\right)^{m} \leq \left(\frac{2r}{k+1}\right)^{m}$ при $0 \leq k \leq [r]$ и мы получаем

$$J \leq A_{r,p}(r+1)^{-\alpha} e^{-r} \sum_{k=0}^{[r]} \frac{r^{k+m} 2^m}{k!(k+1)^m} \leq 2^m A_{r,p}(r+1)^{-\alpha} e^{-r} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{r^{k+m}}{(k+m)!} \frac{(k+1)\dots(k+m)}{(k+1)^m} \leq$$

$$\leq 2^m m! A_{r,p}(r+1)^{-\alpha} e^{-r} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{r^{k+m}}{(k+m)!} = C_1(\alpha)(r+1)^{-\alpha} A_{r,p}$$

Так как $r \geq 1$, можно записать $J \leq C_2 A_{r,p} r^{-\alpha}$. Следствие доказано.

3. ОЦЕНКИ ПРИБЛИЖЕНИЙ СРЕДНИМИ БОРЕЛЯ В МЕТРИКАХ ТИПА ГЁЛЬДЕРА

В данном разделе мы получаем оценки приближений функций средними Бореля в метриках Гёльдера и типа Гёльдера.

Лемма 5. *Пусть $f \in E_p(\varepsilon)$ или $f \in H_p^\omega$, $1 \le p \le \infty$. Тогда при фиксированном $r \ge 1$ имеем $B_r(f) \in E_p(\varepsilon)$ или $B_r(f) \in H_p^\omega$ соответственно, причем справедливы оценки*

$$\|B_r(f)\|_{E_p(\varepsilon)} \le C(p)A_{r,p}\|f\|_{E_p(\varepsilon)}, \qquad \|B_r(f)\|_{H_p^\omega} \le C(p)A_{r,p}\|f\|_{H_p^\omega}.$$

Доказательство вытекает из определения норм, леммы 4 и следствия 1.

Следствие 3. *Пусть $f \in e_p(\varepsilon)$ или $f \in h_p^\omega$, $1 \le p \le \infty$, тогда $B_r(f) \in e_p(\varepsilon)$ или $B_r(f) \in h_p^\omega$ соответственно.*

Доказательство. Пусть $f \in e_p(\varepsilon)$, следовательно, $E_n(f)_p \le \alpha_n\varepsilon_n$, где $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n = 0$. Тогда по следствию 1 $E_n(B_r(f))_p \le C_1\alpha_n\varepsilon_n A_{r,p}$. Снова $\lim\limits_{n\to\infty} E_n(B_r(f))_p/\varepsilon_n = 0$, т. е. $B_r(f) \in e_p(\varepsilon)$. Для h_p^ω доказательство аналогично. Следствие доказано.

Теорема 2. *Пусть $f \in E_p(\varepsilon)$, $1 \le p \le \infty$, последовательности $\varepsilon, \delta, \lambda$ таковы, что ε_n, δ_n и $\lambda_n = \varepsilon_n/\delta_n$ положительны и убывают к 0, причем*

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{n^k}{k!}\varepsilon_{k+1} = O(e^n\varepsilon_{n+1}). \tag{8}$$

Тогда справедливо неравенство $\|B_r(f) - f\|_{E_p(\delta)} \le C(p)A_{r,p}\lambda_{[r]}$.

Доказательство. Оценим следующее выражение с помощью следствия 1

$$\sup_{k\ge[r]} \frac{E_k(B_r(f)-f)_p}{\delta_k} \le \sup_{k\ge[r]} \frac{E_k(B_r(f))_p + E_k(f)_p}{\delta_k} \le$$
$$\le \sup_{k\ge[r]} \frac{(1+A_{r,p})E_k(f)_p}{\delta_k} \le \sup_{k\ge[r]} \frac{C_1A_{r,p}\varepsilon_k}{\delta_k} = C_1A_{r,p}\lambda_{[r]}.$$

В то же время

$$\sup_{0\le k\le[r]} \frac{E_k(B_r(f)-f)_p}{\delta_k} \le \frac{\|B_r(f)-f\|_p}{\delta_{[r]}}.$$

В силу теоремы 1 и условия (8) имеем $\|B_r(f) - f\|_p = O(A_{r,p}\varepsilon_{[r]})$, откуда $\sup\limits_{0\le k\le[r]} E_k(B_r(f) - f)/\delta_k = O(A_{r,p}\lambda_{[r]})$. Оценка $\|B_r(f) - f\|_p = O(A_{r,p}\lambda_{[r]})$ очевидна. Объединяя полученные выше результаты, получаем нужное неравенство.

Следствие 4. *Пусть $\varepsilon_k = k^{-\beta}$, $\delta_k = k^{-\alpha}$, $0 < \alpha < \beta$. Тогда для $f \in E_p(\varepsilon)$ имеем*

$$\|B_r(f) - f\|_{E_p(\delta)} \le CA_{r,p}r^{\alpha-\beta}.$$

Для доказательства необходимо отметить, что согласно доказательству следствия 2 последовательность $\varepsilon_k = k^{-\beta}$ удовлетворяет условию (8), а ε_n/δ_n убывает к 0.

Будем говорить, что $\omega(\delta)$ удовлетворяет Δ_2-условию, если $\omega(2\delta) \le C\omega(\delta)$.

Лемма 7. *Если $\omega(\delta) \in \Omega$ удовлетворяет Δ_2-условию, то нормы пространств $E_p(\varepsilon)$, где $\varepsilon_n = \omega(1/n)$, и H_p^ω, $1 \le p \le \infty$ эквивалентны.*

Доказательство. Пусть $f \in E_p(\varepsilon)$ и $\delta \in [1/(k+1), 1/k) \subset [1/m_{n+1}, 1/m_n)$, $n \in \mathbb{Z}_+$, $k \in \mathbb{N}$. Согласно Δ_2-условию и неравенству А.В. Ефимова (лемма 3) имеем при $\alpha = [\log_2 N] + 1$

$$\frac{\omega^*(f,\delta)_p}{\omega(\delta)} \le \frac{\omega^*(f,1/m_n)_p}{\omega(1/m_{n+1})} \le C^\alpha \frac{\omega^*(f,1/m_n)_p}{\omega(1/m_n)} \le 2C^\alpha \frac{E_{m_n}(f)_p}{\varepsilon_{m_n}} \le 2C^\alpha\|f\|_{E_p(\varepsilon)}. \tag{9}$$

Здесь использовалось неравенство $\omega(1/m_n) = \omega(p_{n+1}/m_{n+1}) \le \omega(2^{[\log_2 N]+1}/m_{n+1}) \le C^{[\log_2 N]+1} \times \omega(1/m_{n+1})$. Из (9) находим, что $\|f\|_{p,\omega} \le (2C^\alpha + 1)\|f\|_{E_p(\varepsilon)}$.

Обратно, пусть $f \in H_p^\omega$ и $k \in [m_n, m_{n+1})$, $n \in \mathbb{Z}_+$. Тогда

$$\frac{E_k(f)_p}{\varepsilon_k} \le \frac{E_{m_n}(f)_p}{\varepsilon_{m_{n+1}}} \le C^\alpha \frac{E_{m_n}(f)_p}{\varepsilon_{m_n}} \le C^\alpha \frac{\omega^*(f,1/m_n)_p}{\omega(1/m_n)} \le C^\alpha\|f\|_{\omega,p},$$

откуда $\|f\|_{E_p(\varepsilon)} \le (1 + C^\alpha)\|f\|_{p,\omega}$. Лемма доказана.

Терема 3. *Пусть* $f \in H_p^\omega$ *и* ω, μ, $\kappa \in \Omega$ *и* $\omega(\delta)/\mu(\delta) = \kappa(\delta)$. *Если для* $\varepsilon_k = \omega(1/k)$ *выполнено условие* (8), ω *удовлетворяет* Δ_2*-условию, то* $\|B_r(f)_p - f\|_{p,\mu} \le C(p)A_{r,p}\kappa(1/r)$.

Доказательство вытекает из теоремы 2 и леммы 7. Следует отметить, что $\kappa(1/[r]) \le C\kappa(1/r)$ в силу Δ_2-условия на κ, которое легко следует из Δ_2-условия на ω.

Следствие 5. *Пусть* $f \in Lip^*(\beta, p)$, $\mu(\delta) = \delta^\alpha$, $0 < \alpha < \beta$. *Тогда при* $r \ge 1$

$$\|B_r(f) - f\|_{p,\mu} \le C(p)A_{r,p}r^{\alpha-\beta}.$$

Работа выполнена при финансовой поддержке гранта Президента РФ по государственной поддержки ведущих научных школ (*проект НШ*-4383.2010.1).

Библиографический список

1. *Харди Г.* Расходящиеся ряды. М.: Изд-во иностр. лит., 1951. 504 с.
2. *Prössdorf S.* Zur Konvergenz der Fourierreihen hölderstetiger Funktionen // Math. Nachr. 1975. Vol. 69. P. 7–14.
3. *Chandra P.* Degree of approximation of functions in the Hölder metric by Borel means // J. Math. Anal. Appl. 1990. Vol. 149. P. 236–248.
4. *Das G., Ojha A. K., Ray B. K.* Degree of approximation of functions associated with Hardy – Littlewood series in the Hölder metric by Borel means // J. Math. Anal. Appl. 1998. Vol. 210, № 2. P. 279–293.
5. *Rempulska L., Tomczak K.* On Euler and Borel means of Fourier series in Hölder spases // Proc. of A. Razmadze Math. Institute. 2006. Vol. 140. P. 141–153.
6. *Iofina T. V., Volosivets S. S.* On the degree on approximation by means of Fourier – Vilenkin series in Holder and L^p norm // East J. on Approximations. 2009. Vol. 15, № 2. P. 143–158.
7. *Голубов Б. И., Ефимов А. В., Скворцов В. А.* Ряды и преобразования Уолша. Теория и применения. М.: Наука, 1987. 344 с.
8. *Schipp F.* On L^p-norm convergence of series with respect to product systems // Anal. Math. 1976. Vol. 2. P. 49–64.
9. *Simon P.* Verallgemeinerte Walsch – Fourierreihen // Acta Math. Hungar. 1976. Vol. 27, № 3–4. P. 329–341.
10. *Агаев Г. Н., Виленкин Н. Я., Джафарли Г. М., Рубинштейн А. И.* Мультипликативные системы функций и гармонический анализ на нуль-мерных группах. Баку: Элм, 1981. 180 с.
11. *Ахиезер Н. И.* Лекции по теории аппроксимаций. М.: ГИТТЛ, 1947. 324 с.

УДК 511.3

К ВОПРОСУ ОПИСАНИЯ РЯДОВ ДИРИХЛЕ С КОНЕЧНОЗНАЧНЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ, ОПРЕДЕЛЯЮЩИХ ЦЕЛЫЕ ФУНКЦИИ И УДОВЛЕТВОРЯЮЩИХ ФУНКЦИОНАЛЬНОМУ УРАВНЕНИЮ ТИПА РИМАНА

В. Н. Кузнецов, О. А. Полякова

Саратовский государственный университет,
кафедра компьютерной алгебры и теории чисел
E-mail: KuznetsovVN@info.sgu.ru

В работе получены условия на коэффициенты ряда Дирихле, при которых этот ряд определяет целую функцию и удовлетворяет функциональному уравнению типа Римана. Показано, что существует бесчисленное множество таких рядов, отличных от L-функции Дирихле.

Ключевые слова: ряд Дирихле, функциональное уравнение, L-функция Дирихле.

On Characterization Determining Entire Functions and Consistent with Riman's Type Equation Dirichlet's Series with Finetly-Valued Coefficients

V. N. Kuznetsov, O. A. Polyakova

Saratov State University,
Chair of Computing Algebra and the Number Theory
E-mail: KuznetsovVN@info.sgu.ru

In the investigation were founded specifications for Dirichlet's series coefficients, wherein this series determine entire function and measure up functional Riman's type equation. Were shown that exist infinit multitude of such series that are different from Dirichlet's L-functions.

Key words: Dirichlet's series, functional equation, Dirichlet's L-function.

Известно [1], что L-функции Дирихле для неглавного характера χ определяют целые функции и удовлетворяют функциональному уравнению вида

$$a\left(\frac{k}{\pi}\right)^{\frac{s+\delta_1}{2}}\Gamma\left(\frac{s+\delta}{2}\right)L(s,\chi) = \left(\frac{k}{\pi}\right)^{\frac{1-s+\delta_1}{2}}\Gamma\left(\frac{1-s+\delta}{2}\right)L(1-s,\overline{\chi}), \qquad (1)$$