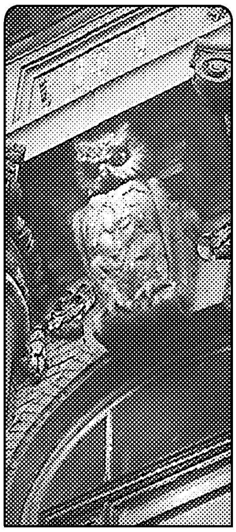

НАУЧНЫЙ ОТДЕЛ

МАТЕМАТИКА

УДК 517.946

ГИЛЬБЕРТОВЫ ОБОБЩЕНИЯ b-БЕССЕЛЕВЫХ СИСТЕМ

М. И. Исмайлов

Бакинский государственный университет,
кафедра теории функций и функционального анализа
E-mail: miqdadismailov1@rambler.ru

В работе дается определение b-бесселевых систем, которое обобщает известное классическое понятие бесселевых систем, а также установлены критерии b-бесселевости систем. Изучены некоторые свойства пространства коэффициентов, соответствующих b-базису, обобщающее классическое понятие базиса Шаудера.

Ключевые слова: b-базис, b-полнота, b-минимальность, b-бесселевы системы.

Hilbert Generalizations b-Bessel Systems

M. I. Ismailov

Baku State University,
Chair of Theory of Function and Functional Analysis
E-mail: miqdadismailov1@rambler.ru

The notion of b-Bessel systems that generalizes the known classic notion of Bessel systems is introduced, the criteria of Bessel property of the systems are established. Some properties of the space of coefficients corresponding to the b-basis generalizing the classic notion of Schauder basis are studied.

Key words: b-basis, b-completeness, b-minimality, b-Bessel systems.

Отметим, что понятие бесселевых систем в гильбертовом пространстве было введено Н.К. Бари [1]. Пусть $\{\psi_n(x)\} \subset L_2$ есть B-система, имеющая биортогональную систему $\{g_n(x)\}$. Система $\{\psi_n(x)\}$ называется бесселевой, если для любой $f \in L_2$ сходится ряд из квадратов коэффициентов ее биортогонального разложения по $\{\psi_n(x)\}$, т. е. если из $f \in L_2$ следует $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (f, g_n)^2 < +\infty$. Существует другая терминология бесселевых систем в абстрактных гильбертовых пространствах, а именно система $\{\varphi_k\}_{k \in N}$ элементов гильбертова пространства H называется бесселевой, если существует число $B > 0$ такое, что

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\langle f, \varphi_k \rangle|^2 \leq B \|f\|^2, \qquad f \in H.$$

По этой терминологии, в работе I. Schur [2], бесселевы системы в L_2 изучаются посредством продолжимых систем. Доказано, что система $\{\psi_n(x)\} \subset L_2$ бесселева тогда и только тогда, когда $\{\psi_n(x)\}$ продолжима. Явная конструкция такого продолжения приводится в работе Е. М. Никишина [3]. В этом направлении известны результаты В. Я. Козлова [4], А. М. Олевского [5], Б. С. Кашина и А. А. Саакяна [6], W. Czaja [7], С. Я. Новикова [8] и др. В работах Б. Е. Вейца [9], Z A. Canturija [10], A. Pelczynski, I. Singer [11], Б. Т. Билалова и З. Г. Гусейнова [12] и П. А. Терехина [13] изучаются бесселевы системы в произвольных банаховых пространствах. В работе [12] вве-

© Исмайлов М. И., 2011

дено понятие K-бесселевых систем в банаховых пространствах, получены аналоги всех результатов [1] относительно бесселевых систем. В [13] рассматриваются системы сходимости, системы представления и построены связи этих понятий с бесселевыми системами, а также даются проекционные характеристики бесселевых систем.

В настоящей работе рассматривается KB-пространство, относительно которого введено понятие b-бесселевых систем в гильбертовых пространствах, обобщающее понятие бесселевых систем в смысле [1]. Получены аналоги ряда результатов [1].

1. НЕКОТОРЫЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ И ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ УТВЕРЖДЕНИЯ

Пусть Y — нормированное пространство, X и Z — H-пространства с соответствующими скалярными произведениями $(\cdot,\cdot)_X$ и $(\cdot,\cdot)_Z$. Рассмотрим билинейное (т. е. линейное по каждому из аргументов) отображение $b(x,y) : X \times Y \to Z$, удовлетворяющее условию

$$\exists\, m,\, M > 0: \;\; m\|x\|_X\|y\|_Y \le \|b(x,y)\|_Z \le M\|x\|_X\|y\|_Y.$$

В дальнейшем для краткости полагаем $xy \equiv b(x,y)$, $x \in X$, $y \in Y$.

Пусть $M \subset Y$ — некоторое множество. Обозначим через $L_b(M)$ — совокупность всевозможных конечных сумм $\Sigma x_i m_i$, где $x_i \in X, m_i \in M$.

Систему $\{y_n\}_{n\in N} \subset Y$ назовем *b-полной*, если $\overline{L_b(\{y_n\}_{n\in N})} = Z$, где $\overline{L_b(\{y_n\}_{n\in N})}$ — замыкание множества $L_b(\{y_n\}_{n\in N})$.

Согласно теореме Рисса при фиксированных значениях $z \in Z$, $y \in Y$ и при произвольном $x \in X$ линейно непрерывному функционалу $f_{z,y}(x) = (xy, z)_Z$ соответствует единственный элемент $\langle z, y\rangle \in X$ такой, что $f_{z,y}(x) = (x, \langle z, y\rangle)_X$ и $\|f_{z,y}\|_{X^*} = \|\langle z, y\rangle\|_X$. Значит $(z, xy)_Z = (\langle z, y\rangle, x)_X$. Легко показать, что элемент $\langle z, y\rangle$ линеен по аргументу $z \in Z$. Более того, из

$$\|\langle z,y\rangle\|_X = \sup_{\|x\|=1} |(\langle z,y\rangle, x)_X| = \sup_{\|x\|=1} |(z, xy)_Z| \le M\|z\|_Z\|y\|_Y$$

следует непрерывность $\langle z, y\rangle$ по обоим аргументам.

Фиксируя $y \in Y$ в выражении $\langle z, y\rangle$, определим отображение $\omega(y)$, $\omega(y)\colon Z \to X$, по формуле $\omega(y)(z) = \langle z, y\rangle$. Из линейности и непрерывности $\langle z, y\rangle$ по $z \in Z$ следует, что $\omega(y) \in L(Z, X)$.

Системы $\{y_n\}_{n\in N} \subset Y$ и $\{y_n^*\}_{n\in N} \subset Y$ назовем *b-биортогональными*, если для всех $k, n \in N$ и $x \in X$ справедливо равенство $\langle xy_k, y_n^*\rangle = \delta_{kn}x$, где δ_{nk} — символ Кронекера, при этом систему $\{y_n^*\}_{n\in N}$ будем называть *b-биортогональной к системе* $\{y_n\}_{n\in N}$.

Систему $\{y_n\}_{n\in N} \subset Y$ назовем *b-минимальной*, если для всех $x \in X$ $(x \ne 0)$ и $k \in N$ выполняется $xy_k \notin \overline{L_b(\{y_n\}_{n\in N,\, n\ne k})}$.

Систему $\{y_n\}_{n\in N} \subset Y$ назовем *b-базисом* в Z, если для всех $z \in Z$ имеет место однозначное представление в виде $z = \sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n y_n$, $x_n \in X$, $n \in N$. Пространство $\tilde{X}$ последовательностей $\tilde{x} = \{x_n\}_{n\in N}$, $x_n \in X$, для которых ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n y_n$ сходится в Z, назовем *пространством коэффициентов по b-базису* $\{y_n\}_{n\in N}$.

Пусть Z и Z_1 — B-пространства и $T \in L(Z, Z_1)$. Рассмотрим оператор $T^{b^*} : L(Z_1, X) \to L(Z, X)$, определенный выражением $(T^{b^*}f)(z) = f(Tz)$, $f \in L(Z_1, X)$, $z \in Z$. Очевидно, что $T^{b^*} \in L(L(Z_1, X), L(Z, X))$. Оператор T^{b^*} назовем *b-сопряженным* с оператором T.

2. ПРОСТРАНСТВО ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ КОЭФФИЦИЕНТОВ

Пусть $\tilde{X}$ — B-пространство последовательностей $\tilde{x} = \{x_n\}_{n\in N}, x_n \in X$, в котором линейные операции определены покоординатно и множество $\tilde{E}_n = \left\{\tilde{x} = \{\delta_{in}x\}_{i\in N}, x \in X\right\}$ является подпространством при любом $n \in N$. Если из сходимости в $\widetilde{X}$ следует покоординатная сходимость, а система $\{\tilde{E}_n\}_{n\in N}$ образует базис в $\widetilde{X}$ и порождает систему проекторов $\{e_n\}_{n\in N}$: $e_n(\tilde{x}) = \{\delta_{in}x_n\}_{i\in N}$, то пространство $\widetilde{X}$ назовем *KB-пространством* с каноническим базисом

$\{e_n\}_{n\in N}$. В KB-пространстве $\widetilde{X}$ ясно, что для всех $\widetilde{x}\in\widetilde{X}$, $\widetilde{x}=\{x_n\}_{n\in N}$, справедливо:

$$\left\|\widetilde{x}-\sum_{k=1}^{n}\{\delta_{ik}x_k\}_{i\in N}\right\|_{\widetilde{X}}\to 0,\qquad n\to\infty.$$

Пусть система $\Phi=\{\varphi_n\}_{n\in N}\subset Y$ образует b-базис в Z с пространством коэффициентов $\widetilde{X}_\Phi$.

Пространство $\widetilde{X}_\Phi$ является B-пространством, если нормой элемента $\widetilde{x}=\{x_n\}_{n\in N}$ является число $\|\widetilde{x}\|_{\widetilde{X}_\Phi}=\sup\limits_n\left\|\sum\limits_{k=1}^{n}x_k\varphi_k\right\|_Z$.

В самом деле, линейность $\widetilde{X}_\Phi$ очевидна.

Проверим справедливость аксиом нормы. Если $\|\widetilde{x}\|_{\widetilde{X}_\Phi}=0$, то $\widetilde{x}=\widetilde{0}$. Для всех $\lambda\in C$ имеем

$$\|\lambda\widetilde{x}\|_{\widetilde{X}_\Phi}=\sup_n\left\|\sum_{k=1}^{n}(\lambda x_k)\varphi_k\right\|_Z=|\lambda|\sup_n\left\|\sum_{k=1}^{n}x_k\varphi_k\right\|_Z=|\lambda|\|\widetilde{x}\|_{\widetilde{X}_\Phi}.$$

Далее, для любых последовательностей $\{x'_n\}_{n\in N}$ и $\{x''_n\}_{n\in N}\in\widetilde{X}_\Phi$ получаем:

$$\sup_n\left\|\sum_{k=1}^{n}(x'_k+x''_k)\varphi_k\right\|_Z\le\sup_n\left\|\sum_{k=1}^{n}x'_k\varphi_k\right\|_Z+\sup_n\left\|\sum_{k=1}^{n}x''_k\varphi_k\right\|_Z.$$

Покажем полноту пространства $\widetilde{X}_\Phi$. Пусть $\{\widetilde{x}_n\}_{n\in N}$ $(\widetilde{x}_n=\{x_k^n\}_{k\in N})$ — некоторая фундаментальная последовательность из $\widetilde{X}_\Phi$, т. е.

$$\|\widetilde{x}_n-\widetilde{x}_m\|_{X_\Phi}=\sup_j\left\|\sum_{i=1}^{j}x_i^n\varphi_i-\sum_{i=1}^{j}x_i^m\varphi_i\right\|_Z\to 0\quad\text{при}\quad n,m\to\infty.$$

Имеем

$$\|x_i^n-x_i^m\|_X\le\frac{1}{m}\frac{\|(x_i^n-x_i^m)\varphi_i\|_Z}{\|\varphi_i\|_Y}=\frac{1}{m}\frac{\|\sum\limits_{k=1}^{i}(x_k^n-x_k^m)\varphi_k-\sum\limits_{k=1}^{i-1}(x_k^n-x_k^m)\varphi_k\|_Z}{\|\varphi_i\|_Y}\le$$

$$\le\frac{2}{m}\frac{\|\widetilde{x}_n-\widetilde{x}_m\|_{\widetilde{X}_\Phi}}{\|\varphi_i\|_Y}\to 0\quad\text{при}\quad n,m\to\infty.$$

Поэтому последовательность $\{x_i^n\}_{n\in N}$ фундаментальна в X для любого $i\in N$. В силу полноты X получаем $x_i^n\to x_i\in X$. Так как для любого $k\in N$ выполняется $\left\|\sum\limits_{i=1}^{k}(x_i^n-x_i^m)\varphi_i\right\|_Z\to 0$ при $n,m\to\infty$, то $\left\|\sum\limits_{i=1}^{k}(x_i^n-x_i)\varphi_i\right\|_Z\to 0$ при $n\to\infty$. Поэтому $\|\widetilde{x}_n-\widetilde{x}\|_{\widetilde{X}_\Phi}\to 0$ при $n\to\infty$. Так как $\left\|\sum\limits_{i=1}^{\infty}(x_i^n-x_i)\varphi_i\right\|_Z\to 0$ при $n\to\infty$, то из неравенства

$$\|\sum_{i=k+1}^{k+p}x_i\varphi_i\|_Z\le\|\sum_{i=k+1}^{k+p}(x_i-x_i^n)\varphi_i\|_Z+\|\sum_{i=k+1}^{k+p}x_i^n\varphi_i\|_Z,\qquad p\in N,$$

следует, что ряд $\sum\limits_{i=1}^{\infty}x_i\varphi_i$ сходится и $\widetilde{x}=\{x_n\}_{n\in N}\in\widetilde{X}_\Phi$.

Определим оператор $T:\widetilde{X}_\Phi\to Z$ формулой $T\widetilde{x}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}x_n\varphi_n,\widetilde{x}=\{x_n\}_{n\in N}\in\widetilde{X}_\Phi$. Из линейности $\widetilde{X}_\Phi$ следует, что оператор T линеен. Покажем ограниченность T. Для всех $\widetilde{x}\in\widetilde{X}_\Phi$ имеем $\|T\widetilde{x}\|\le\|\widetilde{x}\|$. Кроме того, поскольку $\operatorname{Ker}T=\{0\}$, то T осуществляет изоморфизм между $\widetilde{X}_\Phi$ и Z. Оператор T назовем *естественным изоморфизмом* между $\widetilde{X}_\Phi$ и Z.

Утверждение 1. *Пусть Y — нормированное пространство, X и Z — H-пространства, система $\{\varphi_n\}_{n\in N}\subset Y$ образует b-базис с пространством коэффициентов $\widetilde{X}_\Phi$ и T-естественный изоморфизм между $\widetilde{X}_\Phi$ и Z. Тогда:*

1) для каждого $\widetilde{x} = \{x_n\}_{n\in N} \in \widetilde{X}_\Phi$ имеет место неравенство

$$\|x_n\|_X \le \frac{2\|T^{-1}\|_{L(Z,\widetilde{X}_\Phi)}}{m\|\varphi_n\|_Y}\|z\|_Z, \qquad n \in N,$$

где $T\widetilde{x} = z$;

2) существует последовательность $\{f_n\}_{n\in N} \subset L(Z,X)$ такая, что $f_n(x\varphi_k) = \delta_{nk}x$ при любых $n,k \in N$ и $x \in X$;

3) если $\omega(Y) = L(Z,X)$, то система $\{\varphi_n\}_{n\in N}$ имеет b-биортогональную систему $\{\varphi_n^*\}_{n\in N}$ и существует $a > 0$ такое, что $a \le \|\varphi_n^*\|_Y\|\varphi_n\|_Y$ для любого $n \in N$.

Доказательство. Возьмем произвольный $\widetilde{x} = \{x_n\}_{n\in N} \in \widetilde{X}_\Phi$. Если $z = \sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n\varphi_n$, то для любого $n \in N$

$$\|x_n\|_X \le \frac{1}{m}\frac{\|x_n\varphi_n\|_Z}{\|\varphi_n\|_Y} = \frac{1}{m}\frac{\left\|\sum\limits_{k=1}^{n} x_k\varphi_k - \sum\limits_{k=1}^{n-1} x_k\varphi_k\right\|_Z}{\|\varphi_n\|_Y} \le \frac{2}{m}\frac{\|T^{-1}z\|_{\widetilde{X}_\Phi}}{\|\varphi_n\|_Y} \le \frac{2\|T^{-1}\|_{L(Z,\widetilde{X}_\Phi)}}{m\|\varphi_n\|_Y}\|z\|_Z.$$

Рассмотрим последовательность операторов $f_n : Z \to X$, определенных выражением $f_n(z) = x_n$, где $z = \sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n\varphi_n$. Линейность оператора f_n очевидна. В силу доказанного имеем

$$\|f_n(z)\|_X \le \frac{2\|T^{-1}\|_{L(Z,\widetilde{X}_\Phi)}}{m\|\varphi_n\|_Y}\|z\|_Z, \quad n \in N.$$

Поэтому $f_n \in L(Z,X)$. В то же время из b-базисности системы $\{\varphi_n\}_{n\in N}$ следует равенство $f_n(x\varphi_k) = \delta_{nk}x,\ x \in X$.

Далее в силу условия $\omega(Y) = L(Z,X)$ существует последовательность $\{\varphi_n^*\}_{n\in N} \subset Y$ такая, что $f_n(z) = \langle z, \varphi_n^*\rangle$. Очевидно, что $\{\varphi_n^*\}_{n\in N}$ является b-биортогональной системой к системе $\{\varphi_n\}_{n\in N}$. Для произвольного $x \in X$ имеем

$$\|x\|_X = \|\langle x\varphi_n, \varphi_n^*\rangle\|_X \le M^2\|\varphi_n^*\|_Y\|\varphi_n\|_Y\|x\|_X.$$

Отсюда $a \le \|\varphi_n^*\|_Y\|\varphi_n\|_Y$, где $a = 1/M^2$.

Нам в дальнейшем понадобится следующий критерий b-базисности систем.

Утверждение 2. *Пусть Y — нормированное пространство, X и Z — H-пространства, система $\{\varphi_n\}_{n\in N} \subset Y$. Для того чтобы $\{\varphi_n\}_{n\in N}$ была b-базисом в Z, достаточно, а в случае $\omega(Y) = L(Z,X)$ и необходимо, выполнение условий:*

a) последовательность $\{\varphi_n\}_{n\in N}$ b-полна;

b) последовательность $\{\varphi_n\}_{n\in N}$ имеет b-биортогональную систему $\{\varphi_n^*\}_{n\in N}$;

c) для всех $m \in N$ и $z \in Z$ справедливо неравенство

$$\left\|\sum_{k=1}^{m}\langle z, \varphi_k^*\rangle\varphi_k\right\|_Z \le \widetilde{M}\|z\|_Z\ ,$$

где $\widetilde{M}$ — некоторая постоянная.

Доказательство. *Достаточность.* Покажем, что при выполнении условий a)–c) система $\{\varphi_n\}_{n\in N}$ образует b-базис в Z. В силу b-полноты $\{\varphi_n\}_{n\in N}$ для произвольных $\varepsilon > 0$ и $z \in Z$ существует $R \in L_b(\{\varphi_k\}_{k\in N})$ такое, что $\|z - R\|_Z < \varepsilon$. Тогда при достаточно больших n, используя условие c), получим

$$\left\|z - \sum_{k=1}^{n}\langle z, \varphi_k^*\rangle\varphi_k\right\|_Z \le \|z - R\|_Z + \left\|\sum_{k=1}^{n}\langle z - R, \varphi_k^*\rangle\varphi_k\right\|_Z < \varepsilon + \widetilde{M}\|z - R\|_Z < (1 + \widetilde{M})\varepsilon.$$

Таким образом, $z = \sum\limits_{n=1}^{\infty}\langle z, \varphi_n^*\rangle\varphi_n$. Единственность представления очевидна.

Необходимость. Пусть $\{\varphi_n\}_{n\in N}$ — b-базис в Z. Проверим справедливость условий a)–c). Условие a) следует из определения b-базиса $\{\varphi_n\}_{n\in N}$. Существование b-биортогональной системы $\{\varphi_n^*\}_{n\in N}$ к системе $\{\varphi_n\}_{n\in N}$ вытекает из утверждения 1.

Далее, рассмотрим последовательность операторов P_m:

$$P_m z = \sum_{k=1}^{m} \langle z, \varphi_k^* \rangle \varphi_k, \qquad z \in Z.$$

Так как $\{\varphi_n\}_{n\in N}$ — b-базис, то последовательность $\{P_m z\}$ сходится для всех $z \in Z$. По теореме о равномерной ограниченности $\|P_m\| \le \tilde{M}$. Следовательно, $\|P_m z\|_Z \le \tilde{M}\|z\|_Z$, $z \in Z$.

3. ПРОСТРАНСТВО ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ КОЭФФИЦИЕНТОВ

Пусть Y — нормированное пространство, X и Z — H-пространства, система $\{y_n\} \subset Y$ имеет фиксированную b-биортогональную систему $\{y_n^*\}_{n\in N}$. Пусть $\widetilde{X}$ — KB-пространство последовательностей элементов X с каноническим базисом $\{e_n\}_{n\in N}$.

Пару $\{y_n; y_n^*\}_{n\in N}$ назовем $b_{\widetilde{X}}$*-бесселевой* в Z, если $\{\langle z, y_n^*\rangle\}_{n\in N} \in \widetilde{X}$ при любом $z \in Z$. В случае, когда система $\{y_n\}_{n\in N}$ также и b-полна, назовем $\{y_n\}_{n\in N} \subset Y$ просто $b_{\widetilde{X}}$*-бесселевой системой* в Z.

Установим критерии $b_{\widetilde{X}}$-бесселевости систем.

Теорема 1. *Пусть Y — нормированное пространство, X и Z — H-пространства, $\widetilde{X}$ — KB-пространство последовательностей $\widetilde{x} = \{x_n\}_{n\in N}$, $x_n \in X$, с каноническим базисом $\{e_n\}_{n\in N}$, $\{y_n\}_{n\in N} \subset Y$ имеет b-биортогональную систему $\{y_n^*\}_{n\in N}$. Тогда, для того чтобы пара $\{y_n; y_n^*\}_{n\in N}$ была $b_{\widetilde{X}}$-бесселевой в Z, необходимо, а в случае b-полноты системы $\{y_n\}_{n\in N}$ и достаточно, существование оператора $T \in L(Z, \widetilde{X}) : T(xy_n) = \{\delta_{in}x\}_{i\in N}$ для всех $x \in X$, $n \in N$.*

Доказательство. *Необходимость.* Пусть $\{y_n; y_n^*\}_{n\in N}$ — $b_{\widetilde{X}}$-бесселева пара в Z. Рассмотрим последовательность операторов $T_m \in L(Z, \widetilde{X})$:

$$T_m z = \sum_{k=1}^{m} e_k \left(\{\langle z, y_i^*\rangle\}_{i\in N}\right) \quad \text{для всех} \quad m \in N.$$

Так как $\{e_n\}_{n\in N}$ — канонический базис, то $\lim\limits_{m\to\infty} T_m z$ существует, и тем самым последовательность $\{T_m z\}_{n\in N}$ ограничена для каждого $z \in Z$. Из принципа равномерной ограниченности следует, что последовательность $\{\|T_m\|\}$ ограничена.

Пусть T — оператор, заданный формулой $Tz = \lim\limits_{m\to\infty} T_m z$. Очевидно, что $T \in L(Z, \widetilde{X})$, причем

$$T(xy_n) = \sum_{k=1}^{\infty} e_k \left(\{\langle xy_n, y_i^*\rangle\}_{i\in N}\right) = \sum_{k=1}^{\infty} e_k \left(\{\delta_{in}x\}_{i\in N}\right) = e_n \left(\{\delta_{in}x\}_{i\in N}\right) = \{\delta_{in}x\}_{i\in N}$$

для всех $x \in X$ и $n \in N$.

Достаточность. Пусть система $\{y_n\}_{n\in N}$ b-полна и существует оператор $T \in L(Z, \widetilde{X})$: $T(xy_n) = \{\delta_{in}x\}_{i\in N}$ для всех $x \in X$, $n \in N$. Для каждого $n \in N$ рассмотрим оператор $e_n^* : \widetilde{X} \to X$, заданный формулой $e_n^*(\{x_k\}_{k\in N}) = x_n$. Линейность оператора e_n^* очевидна, а ограниченность следует из покоординатной сходимости в пространстве $\widetilde{X}$. Тогда для каждого $x \in X$ имеем

$$\delta_{nk}x = e_n^*(\{\delta_{ik}x\}_{i\in N}) = e_n^*(T(xy_k)) = (T^{b^*} e_n^*)(xy_k), \quad k,\, n \in N,$$

где T^{b^*} — b-сопряженный оператор к T. В силу b-полноты системы $\{y_n\}_{n\in N}$ получаем, что $\omega(y_n^*) = T^{b^*} e_n^*$. Тогда для всех $z \in Z$ и $n \in N$ имеет место

$$\langle z, y_n^*\rangle = \omega(y_n^*)(z) = (T^{b^*} e_n^*)(z) = e_n^*(Tz) \in X.$$

Так как $Tz \in \widetilde{X}$, то $\{\langle z, y_n^*\rangle\}_{n\in N} \in \widetilde{X}$. Теорема доказана. □

Следствие 1. *Пусть Y — нормированное пространство, X и Z — H-пространства, $\widetilde{X}$ — KB-пространство последовательностей $\widetilde{x} = \{x_n\}_{n\in N}$, $x_n \in X$, с каноническим базисом $\{e_n\}_{n\in N}$, система $\{y_n\}_{n\in N}$ b-полна и имеет b-биортогональную систему. Система $\{y_n\}_{n\in N}$ является*

$b_{\widetilde{X}}$-бесселевой в Z тогда и только тогда, когда для любой конечной последовательности $\{x_n\}$ из $\widetilde{X}$ имеет место соотношение

$$\|\{x_n\}\|_{\widetilde{X}} \le \widetilde{M} \left\| \sum x_n y_n \right\|_Z ,$$

где $\widetilde{M}$ — некоторая постоянная.

Пусть Y_1 — нормированное пространство, Z_1 — H-пространство, $b_1(x,y) : Y_1 \to Z_1$ — билинейное отображение:

$$\exists\, m_1, M_1 > 0 : \quad m_1 \|x\|_X \|y\|_{Y_1} \le \|x \cdot y\|_{Z_1} \le M_1 \|x\|_X \|y\|_{Y_1}$$

для всех $x \in X$ и $y \in Y_1$. Здесь $x \cdot y \equiv b_1(x,y)$.

Обозначим через $\widetilde{\omega}(y)$, $y \in Y_1$, оператор, определенный формулой $\widetilde{\omega}(y)(z) = \langle z, y \rangle$, $z \in Z_1$. Ясно, что $\widetilde{\omega}(y) \in L(Z_1, X)$, $y \in Y_1$.

Теорема 2. *Пусть Y, Y_1 — нормированные пространства, X, Z и Z_1 — H-пространства, система $\{y_n\}_{n\in N} \subset Y$ имеет b-биортогональную систему $\{y_n^*\}_{n\in N}$, система $\{\varphi_n\}_{n\in N} \subset Y_1$ образует b_1-базис в Z_1 с пространством коэффициентов $\widetilde{X}_\Phi$ и имеет b_1-биортогональную систему $\{\varphi_n^*\}_{n\in N}$. Для того чтобы пара $\{y_n; y_n^*\}_{n\in N}$ была $b_{\widetilde{X}_\Phi}$-бесселевой в Z, необходимо, а в случае b-полноты системы $\{y_n\}_{n\in N}$ и достаточно, существование оператора $T \in L(Z, Z_1) : T(xy_n) = x \cdot \varphi_n$ для всех $x \in X$, $n \in N$.*

Доказательство. *Необходимость.* Пусть $\{y_n; y_n^*\}_{n\in N}$ — $b_{\widetilde{X}_\Phi}$-бесселева пара в Z. Для каждого $m \in N$ рассмотрим оператор $T_m \in L(Z, Z_1)$, заданный формулой $T_m z = \sum\limits_{k=1}^{m} \langle z, y_k^* \rangle \cdot \varphi_k$.

В силу b_1-базисности $\{\varphi_n\}_{n\in N}$ ясно, что существует $\lim\limits_{m\to\infty} T_m z = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \langle z, y_k^* \rangle \cdot \varphi_k$ и, значит, $\{\|T_m\|\}_{m\in N}$ ограничена. Пусть $T : Tz = \lim\limits_{m\to\infty} T_m z$. Тогда $T \in L(Z, Z_1)$ и $Tz = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \langle z, y_k^* \rangle \cdot \varphi_k$.

Для всех $x \in X$ и $n \in N$ получаем

$$T(xy_n) = \sum_{k=1}^{\infty} \langle xy_n, y_k^* \rangle \cdot \varphi_k = x \cdot \varphi_n .$$

Достаточность. Пусть существует оператор $T \in L(Z, Z_1)$ такой, что $T(xy_n) = x \cdot \varphi_n$ для всех $x \in X$, $n \in N$. Тогда для любых $x \in X$ и $n, k \in N$ имеем

$$\delta_{kn} x = \langle x\varphi_k, \varphi_n^* \rangle = \langle T(xy_k), \varphi_n^* \rangle = \widetilde{\omega}(\varphi_n^*)(T(xy_k)) = \left(T^{b^*} \widetilde{\omega}(\varphi_n^*) \right)(xy_k).$$

В силу b-полноты $\{y_n\}_{n\in N}$ из последнего соотношения заключаем, что $T^{b^*} \widetilde{\omega}(\varphi_n^*) = \omega(y_n^*)$ для всех $n \in N$. Наконец, из

$$\langle z, y_n^* \rangle = \omega(y_n^*)(z) = (T^{b^*} \widetilde{\omega}(\varphi_n^*))(z) = \widetilde{\omega}(\varphi_n^*)(Tz) = \langle Tz, \varphi_n^* \rangle \in X, \quad z \in Z, \quad n \in N,$$

следует, что $\{\langle z, y_n^* \rangle\}_{n\in N} \in \widetilde{X}_\Phi$. Теорема доказана. □

Теорема 3. *Пусть Y — нормированное пространство, X и Z — H-пространства, система $\{y_n\}_{n\in N} \subset Y$ b-полна в Z и имеет b-биортогональную систему $\{y_n^*\}_{n\in N}$, система $\Phi = \{\varphi_n\}_{n\in N} \subset Y$ образует b-базис в Z, с пространством коэффициентов $\widetilde{X}_\Phi$ и имеет b-биортогональную систему $\{\varphi_n^*\}_{n\in N}$. Тогда для того чтобы система $\{y_n\}_{n\in N}$ была $b_{\widetilde{X}_\Phi}$-бесселевой в Z, необходимо и достаточно, чтобы оператор $A_{\widetilde{X}} : \widetilde{X}_\Phi \to \widetilde{X}_\Phi$, определенный выражением $A_{\widetilde{X}} \widetilde{x} = \left\{ \sum\limits_{n=1}^{\infty} \langle x_n \varphi_n, y_k^* \rangle \right\}_{k\in N}$, $\widetilde{x} = \{x_n\}_{n\in N}$, был ограниченным в $\widetilde{X}_\Phi$.*

Доказательство. *Необходимость.* Пусть $\{y_n\}_{n\in N}$ — $b_{\widetilde{X}_\Phi}$-бесселева система в Z. Тогда в силу теоремы 2 существует оператор $A \in L(Z)$ такой, что $A(xy_n) = x\varphi_n$ для всех $x \in X$, $n \in N$. Для любых $x \in X$, $n, k \in N$ имеем

$$\delta_{nk} x = \langle x\varphi_n, \varphi_k^* \rangle = \omega(\varphi_k^*)(A(xy_n)) = (A^{b^*} \omega(\varphi_k^*))(xy_n),$$

где A^{b^*} — оператор, b-сопряженный к оператору A. Отсюда в силу b-полноты $\{y_n\}_{n\in N}$ получаем, что $A^{b^*}\omega(\varphi_n^*)=\omega(y_n^*)$, $n\in N$.

Рассмотрим оператор $A_{\widetilde{x}}$: $\widetilde{X}_\Phi\to\widetilde{X}_\Phi$, заданный формулой

$$A_{\widetilde{X}}\widetilde{x}=\left\{\sum_{n=1}^{\infty}\langle x_n\varphi_n,y_k^*\rangle\right\}_{k\in N}\quad \widetilde{x}=\{x_n\}_{n\in N}.$$

Корректность этого определения следует из b-базисности $\{\varphi_n\}_{n\in N}$.

Пусть $T:Z\to\widetilde{X}_\Phi$ — естественный изоморфизм. Возьмем любое $\widetilde{x}\in\widetilde{X}$ и обозначим через $z=T^{-1}\widetilde{x}$. Тогда

$$A_{\widetilde{X}}\widetilde{x}=\left\{\sum_{n=1}^{\infty}\langle x_n\varphi_n,y_k^*\rangle\right\}_{k\in N}=\{\langle z,y_k^*\rangle\}_{k\in N}=\{(A^{b^*}\omega(\varphi_k^*))(z)\}_{k\in N}=$$

$$=\{\omega(\varphi_k^*)(Az)\}_{k\in N}=\{\langle Az,\varphi_k^*\rangle\}_{k\in N}=T(Az)=T(AT^{-1}\widetilde{x})=(TAT^{-1})\widetilde{x}.$$

Из последнего соотношения получаем, что $A_{\widetilde{X}}=TAT^{-1}$. Значит, $A_{\widetilde{X}}\in L(\widetilde{X}_\Phi)$.

Достаточность. Пусть оператор $A_{\widetilde{X}}$, определенный равенством $A_{\widetilde{X}}\widetilde{x}=\left\{\sum\limits_{n=1}^{\infty}\langle x_n\varphi_n,y_k^*\rangle\right\}_{k\in N}$, $\widetilde{x}=\{x_n\}_{n\in N}$, линеен и ограничен в $\widetilde{X}_\Phi$. Обозначим через $A=T^{-1}A_{\widetilde{X}}T$. Очевидно, что оператор $A\in L(Z)$.

Далее, для любого $x\in X$ и $n\in N$ имеем

$$A(xy_n)=(T^{-1}A_{\widetilde{X}}T)(xy_n)=(T^{-1}A_{\widetilde{X}})(\{\langle xy_n,\varphi_k^*\rangle\}_{k\in N})=$$

$$=T^{-1}(\{\langle xy_n,y_k^*\rangle\}_{k\in N})=T^{-1}(\{\delta_{kn}x\}_{k\in N})=x\varphi_n.$$

Остается применить теорему 2. Теорема доказана. □

Теорема 4. *Пусть Y, Y_1 — нормированные пространства, X, Z и Z_1 — H-пространства. Для того чтобы Z_1 имел b_1-базис $\Phi=\{\varphi_n\}_{n\in N}\subset Y_1$ с b_1-биортогональной системой $\{\varphi_n^*\}_{n\in N}$ и пространством коэффициентов $\widetilde{X}_\Phi$ таким, что b-полная система $\{y_n\}_{n\in N}\subset Y$ с b-биортогональной системой $\{y_n^*\}_{n\in N}$ была $b_{\widetilde{X}_\Phi}$-бесселевой в Z, необходимо и достаточно, чтобы существовали операторы $T\in L(Z,Z_1)$ и $A:Y_1\to Y_1$, удовлетворяющие условиям:*

1) $\operatorname{Ker}T^*=\{0\}$, $T^{b^*}\widetilde{\omega}(A\varphi_n)=\omega(y_n^*)$, $T(xy_n)=x\cdot\varphi_n$ для всех $n\in N$ и $x\in X$;

2) $\left\|\sum\limits_{k=1}^{m}T(\langle z,A\varphi_k\rangle y_k)\right\|_{Z_1}\le\widetilde{M}\|z\|_{Z_1}$ для всех $z\in Z_1$, где $\widetilde{M}$ — некоторая постоянная и $T^*\in L(Z_1^*,Z^*)$.

Доказательство. *Необходимость.* Пусть $\{\varphi_n\}_{n\in N}$ — b_1-базис в Z_1, $\{y_n\}_{n\in N}$ — b-биортогональная и b-полная $b_{\widetilde{X}_\Phi}$-бесселевая система в Z. В силу теоремы 2 существует оператор $T\in L(Z,Z_1)$ такой, что $T(xy_n)=x\cdot\varphi_n$ для всех $x\in X$, $n\in N$. Поэтому для каждого $x\in X$ имеем

$$\delta_{nk}x=\langle x\cdot\varphi_k,\varphi_k^*\rangle=\langle T(xy_k),\varphi_n^*\rangle=\widetilde{\omega}(\varphi_n^*)(T(xy_k))=(T^{b^*}\widetilde{\omega}(\varphi_n^*))(xy_k).$$

Поскольку система $\{y_n\}_{n\in N}$ b-полна, то из последнего соотношения вытекает, что $T^{b^*}\widetilde{\omega}(\varphi_n^*)=\omega(y_n^*)$ для всех $n\in N$. Из b-биортогональности ситемы $\{\varphi_n\}_{n\in N}$ в Z следует, что система $\{\varphi_n\}_{n\in N}$ b-минимальна в Z. На самом деле, если существует $k_0\in N$ и для каждого $x\in X$ $(x\ne0)$ $x\cdot\varphi_{k_0}\in\overline{L_b(\{\varphi_n\}_{n\in N,\,n\ne k_0})}$, то $\langle x\cdot\varphi_{k_0},\varphi_{k_0}^*\rangle=0$, что противоречит равенству $\langle x\cdot\varphi_{k_0},\varphi_{k_0}^*\rangle=x$. Так как $\|x\cdot\varphi_k-x\cdot\varphi_{k_0}\|_Z\le M_1\|x\|_X\|\varphi_k-\varphi_{k_0}\|_Y$, то $\{\varphi_n\}_{n\in N}$ минимальна в Y, ибо система $\{\varphi_n\}_{n\in N}$ не b-минимальна в Z.

Пусть $A:Y_1\to Y_1$ — оператор, определенный на $L(\{\varphi_n\}_{n\in N})$ по линейности выражением $A\varphi_n=\varphi_n^*$ для любого $n\in N$. Корректность определения оператора A следует из минимальности системы $\{\varphi_n\}_{n\in N}$. Тогда $T^{b^*}\widetilde{\omega}(A\varphi_n)=\omega(y_n^*)$.

Поскольку $\{\varphi_n\}_{n\in N}$ образует b_1-базис и $T(xy_n)=x\cdot\varphi_n$ для всех $x\in X$, $n\in N$, то $\overline{R(T)}=Z$. Следовательно, $R(T)^\perp=\{0\}$. Значит, $\operatorname{Ker}T^*=\{0\}$.

Далее, учитывая b_1-базисность системы $\{\varphi_n\}_{n\in N}$, для всех $m \in N$ и $z \in Z_1$ имеет место оценка

$$\left\|\sum_{k=1}^{m} T(\langle z, A\varphi_k\rangle y_k)\right\|_{Z_1} = \left\|\sum_{k=1}^{m}\langle z, A\varphi_k\rangle \cdot \varphi_k\right\|_{Z_1} = \left\|\sum_{k=1}^{m}\langle z, \varphi_k^*\rangle \cdot \varphi_k\right\|_{Z_1} \leq M\|z\|_{Z_1}.$$

Достаточность. Пусть существуют операторы $T \in L(Z, Z_1)$ и $A : Y_1 \to Y_1$, удовлетворяющие условиям 1) и 2). Пусть $T(xy_n) = x \cdot \varphi_n$, $A\varphi_n = \varphi_n^*$ для всех $x \in X$ и $n \in N$. Покажем, что система $\Phi = \{\varphi_n\}_{n\in N}$ образует b_1-базис в Z_1, а система $\{y_n\}_{n\in N}$ — $b_{\widetilde{X}_\Phi}$-бесселева в Z. Для любых $x \in X$ и $n, k \in N$ имеем

$$\langle x \cdot \varphi_k, \varphi_n^*\rangle = \langle T(xy_k), A\varphi_n\rangle = \widetilde{\omega}(A\varphi_n)(T(xy_k)) = (T^{b^*}\widetilde{\omega}(A\varphi_n))(xy_k) = \omega(y_n^*)(xy_k) = \delta_{nk}x,$$

т. е. система $\{\varphi_n\}_{n\in N}$ имеет b_1-биортогональную систему $\{\varphi_n^*\}_{n\in N}$. Покажем, что $\{\varphi_n\}_{n\in N}$ b_1-полна.

Предположим противное. Тогда существует некоторый ненулевой элемент $\varphi^* \in Z_1^*$ такой, что для любого $n \in N$ имеет место соотношение $\varphi^*(x \cdot \varphi_n) = 0$. Поэтому $0 = \varphi^*(x \cdot \varphi_n) = \varphi^*(T(xy_n)) = (T^*\varphi^*)(xy_n)$. Отсюда и из b-полноты системы $\{y_n\}_{n\in N}$ следует, что $T\varphi^* = 0$.

Так как по условию теоремы $\mathrm{Ker}\, T^* = \{0\}$, то $\varphi^* = 0$, что противоречит предположению. Значит, система $\{\varphi_n\}_{n\in N}$ b_1-полна.

Теперь покажем, что для любого $m \in N$ проекторы $P_m(z) = \sum\limits_{k=1}^{m}\langle z, \varphi_k^*\rangle\cdot\varphi_k$ равномерно ограничены.

Имеем

$$\left\|\sum_{k=1}^{m}\langle z, \varphi_k^*\rangle \cdot \varphi_k\right\|_{Z_1} = \left\|\sum_{k=1}^{m}\langle z, A\varphi_k\rangle \cdot \varphi_k\right\|_{Z_1} = \left\|\sum_{k=1}^{m} T(\langle z, A\varphi_k\rangle y_k)\right\|_{Z_1} \leq M\|z\|_{Z_1}.$$

Таким образом, проекторы равномерно ограничены.

В силу утверждения 2 система $\{\varphi_n\}_{n\in N}$ образует b_1-базис в Z_1. Применяя теорему 2, получим $b_{\widetilde{X}_\Phi}$-бесселевость системы $\{y_n\}_{n\in N}$ в Z. Теорема доказана. □

Автор выражает благодарность профессору Б. Т. Билалову за постановку задачи и обсуждение полученных результатов.

Библиографический список

1. *Бари Н. К.* Биортогональные системы и базисы в гильбертовом пространстве // Учен. записки МГУ. Математика. 1951. Т. IV, вып. 148. С. 69–107.
2. *Schur I.* Über endlich Gruppen und Hermitische Formen // Math. Zeit. 1918. Vol. 1. P. 183–207.
3. *Никишин Е. М.* О сходимости некоторых функциональных рядов // Изв. АН СССР. Сер. математическая. 1967. Т. 31, вып.1. С. 15–26.
4. *Козлов В. Я.* О локальной характеристике полной ортогональной нормированной системы функций // Мат. сборник. 1948. Т. 23, вып. 3. С. 441–474.
5. *Олевский А. М.* О продолжении последовательности функций до полной ортонормированной системы // Мат. заметки. 1969. Т. 6, вып. 6. С. 737–747.
6. *Кашин Б. С., Саакян А. А.* Ортогональные ряды. М.: Наука, 1984.
7. *Czaja W.* Remark on Naimark's duality // Proc. Amer. Math. Soc. 2008. Vol. 136, № 3. P. 867–871.
8. *Новиков С. Я.* Бесселевы последовательности как проекции ортогональных систем // Мат. заметки. 2007. Т. 81, вып. 6. С. 893–903.
9. *Вейц Б. Е.* Системы Бесселя и Гильберта в пространствах Банаха и вопросы устойчивости // Изв. вузов. Математика. 1965. Т. 2. С. 7–23.
10. *Canturija Z. A.* On some properties of biorthogonal systems in Banach space and their applications in spectral theory // Soobs. Akad. Nauk Gruz. SSR. 1964. Vol. 2, iss. 34. P. 271–276.
11. *Pelczynski A., Singer I.* On non-equivalent bases und conditional bases in Banach spaces // Studia Math. 1964. Iss. 25. P. 5–25.
12. *Билалов Б. Т., Гусейнов З. Г.* K-бесселевы и K-гильбертовы системы. K-базисы // Докл. АН. 2009. Т. 429, № 3. С. 298–300.
13. *Терехин П. А.* Проекционные характеристики бесселевых систем // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. 2009. Т. 9. Сер. Математика. Механика. Информатика, вып. 1. С. 44–51.