3. Докажем справедливость формулы (25) для $n = k+1$. Разобьем некоторый контур F_j, $j = \overline{1,k}$, на контуры F_j^1, F_j^2 соответственно с инвариантами Δ^1, Δ^2. По формуле (26) $|\Delta_j| = |\Delta^1||\Delta^2|$. Поэтому в силу предположения (27) $|\Delta| = |\Delta_1||\Delta_2|\cdots|\Delta_{j-1}||\Delta^1||\Delta^2||\Delta_{j+1}|\ldots|\Delta_k|$, т. е. $|\Delta| = \prod\limits_{i=1}^{k+1}|\Delta_i|$.

Теорема 3 доказана.

Библиографический список

1. *Розенфельд, Б.А.* Геометрия групп Ли. Симметрические, параболические и периодические пространства / Б.А. Розенфельд, М.П. Замаховский. – М.: МЦНМО, 2003. – 560 с.

2. *Ромакина, Л.Н.* Геометрии коевклидовой и копсевдоевклидовой плоскостей / Л.Н. Ромакина. – Саратов: Научная книга, 2008. – 279 с.

УДК 517.984

ОБ АНАЛОГЕ ТЕОРЕМЫ ЖОРДАНА – ДИРИХЛЕ ДЛЯ РАЗЛОЖЕНИЙ ПО СОБСТВЕННЫМ ФУНКЦИЯМ ОДНОГО КЛАССА ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-РАЗНОСТНЫХ ОПЕРАТОРОВ

В.А. Халова

Саратовский государственный университет,
кафедра дифференциальных уравнений и прикладной математики
E-mail: HalovaVA@info.sgu.ru

В статье получен аналог теоремы Жордана – Дирихле о сходимости разложений по собственным функциям оператора $Ly = \alpha y'(x) - y'(1-x)$ с граничным условием $U(y) = ay(0) + by(1) - (y,\varphi) = 0$.

Ключевые слова: теорема Жордана – Дирихле, резольвента.

On Analogue of Jordan – Dirichlet Theorem about the Convergence of the Expansions in Eigenfunctions of a Certain Class of Differential-Difference Operators

V.A. Khalova

Saratov State University,
Chair of Differential Equations and Applied Mathematics
E-mail: HalovaVA@info.sgu.ru

An analogue of Jordan – Dirichlet theorem is established of convergence of the expansions in eigen functions of the operator $Ly = \alpha y'(x) - y'(1-x)$ with the boundary condition $U(y) = ay(0) + by(1) - (y,\varphi) = 0$.

Key words: Jordan – Dirichlet theorem, resolvent.

Рассматривается оператор

$$Ly = \alpha y'(x) - y'(1-x), \quad x \in [0,1], \quad \alpha^2 \neq 1, \tag{1}$$

с граничным условием

$$U(y) = ay(0) + by(1) - (y,\varphi) = 0, \tag{2}$$

где $y'(1-x) = \frac{d}{d\xi}y(\xi)|_{\xi=1-x}$, a, b — заданные постоянные, $(y,\varphi) = \int\limits_0^1 y(t)\varphi(t)\,dt$, $\varphi(t) \in C[0,1]$.

В настоящей статье для разложений по собственным и присоединенным функциям (в дальнейшем с.п.ф.) оператора (1)–(2) установлен аналог теоремы Жордана – Дирихле из теории тригонометрических рядов Фурье [1, с. 121–122]. Данная работа продолжает исследования функционально-дифференциальных и интегральных операторов с операторами отражения. В работе [2] такой результат был получен для оператора дифференцирования $y'(x)$ с краевым условием $\int\limits_0^1 y(t)\,d\sigma(t) = 0$, где $\sigma(t)$ — функция ограниченной вариации, имеющая скачки в точках 0 и 1. В работе [3] аналог теоремы Жордана – Дирихле установлен для разложений по с.п.ф. оператора

$$Ly = \beta y'(x) + y'(1-x), \quad x \in [0,1], \quad \beta^2 \neq 1,$$

с интегральным граничным условием

$$U(y) = \int_0^1 \frac{k(t)}{t^\alpha(1-t)^\alpha} y(t)\,dt = 0, \quad 0 < \alpha < 1.$$

1. Обозначим через $R_\lambda = (L - \lambda E)^{-1}$ резольвенту оператора (1)–(2).

Следующие утверждения приведем без доказательств (см., например, [3, 4]).

Лемма 1. *Если $y(x) = R_\lambda f(x)$, то $z(x) = (z_1(x), z_2(x))^{\mathrm{T}}$, где $z_1(x) = y(x)$, $z_2(x) = y(1-x)$, является решением следующей краевой задачи в пространстве вектор-функций:*

$$z'(x) - \lambda B_0 z(x) = B_0 F(x), \tag{3}$$

$$P_0 z(0) + Q_0 z(1) - \int_0^1 \Phi_0(t) z(t)\,dt = 0, \tag{4}$$

где $B_0 = \dfrac{1}{\alpha^2 - 1}\begin{pmatrix} \alpha & 1 \\ -1 & -\alpha \end{pmatrix}$, $P_0 = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $Q_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ b & a \end{pmatrix}$, $\Phi_0(t) = \begin{pmatrix} \varphi(t) & 0 \\ 0 & \varphi(1-t) \end{pmatrix}$, $F(x) = (f(x), f(1-x))^T$, T *— знак транспонирования.*

И наоборот. Пусть $z(x) = (z_1(x), z_2(x))^{\mathrm{T}}$ — решение задачи (3)–(4) *и $F(x) = (f(x), f(1-x))$. Если при $F(x) = 0$ задача* (3)–(4) *имеет только нулевое решение, то R_λ существует и $R_\lambda f = z_1(x)$, $z_2(x) = z_1(1-x)$.*

Пусть $\Gamma = \begin{pmatrix} 1 & \gamma \\ \gamma & 1 \end{pmatrix}$, $\gamma = \dfrac{1 - \alpha d}{d} = \dfrac{-d}{1 + \alpha d}$, $d = \dfrac{1}{\sqrt{\alpha^2 - 1}}$. В (3)–(4) выполним замену $z(x) = \Gamma v(x)$. Тогда краевая задача (3)–(4) примет вид

$$v'(x) - \lambda \mathcal{D} v(x) = BF(x), \tag{5}$$

$$\mathbf{U}(v) = Pv(0) + Qv(1) - \int_0^1 \Phi(t) v(t)\,dt = 0, \tag{6}$$

где $\mathcal{D} = \begin{pmatrix} d & 0 \\ 0 & -d \end{pmatrix}$, $B = \Gamma^{-1} B_0 = -\dfrac{d^2}{2\gamma}\begin{pmatrix} 1 & -\gamma \\ \gamma & -1 \end{pmatrix} = \dfrac{d}{2}\begin{pmatrix} \alpha d + 1 & d \\ -d & -(\alpha d + 1) \end{pmatrix}$, $P = P_0 \Gamma = \begin{pmatrix} p_1 & p_2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $Q = Q_0 \Gamma = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ p_2 & p_1 \end{pmatrix}$, $p_1 = a + \gamma b$, $p_2 = \gamma a + b$, $\Phi(t) = \begin{pmatrix} \varphi(t) & \gamma\varphi(t) \\ \gamma\varphi(1-t) & \varphi(1-t) \end{pmatrix}$.

Для определенности, считаем, что $\mathrm{Re}\,\lambda d \ge 0 \ge \mathrm{Re}\,(-\lambda d)$.

Лемма 2. *Если λ таково, что $\Delta^{-1}(\lambda)$ существует, то для решения $v(x) = v(x, \lambda)$ задачи* (5)–(6) *имеет место формула*

$$v(x, \lambda) = -V(x, \lambda)\Delta^{-1}(\lambda) \int_0^1 \mathbf{U}_x(g(x, t, \lambda)) BF(t)\,dt + \int_0^1 g(x, t, \lambda) BF(t)\,dt,$$

где $V(x, \lambda) = \begin{pmatrix} e^{\lambda dx} & 0 \\ 0 & e^{-\lambda dx} \end{pmatrix}$, $\Delta(\lambda) = \mathbf{U}(V(x, \lambda))$, $g(x, t, \lambda) = \begin{pmatrix} g_1(x, t, \lambda) & 0 \\ 0 & g_2(x, t, \lambda) \end{pmatrix}$, $g_1(x, t, \lambda) = -\varepsilon(t, x) e^{\lambda d(x-t)}$, $g_2(x, t, \lambda) = \varepsilon(x, t) e^{-\lambda d(x-t)}$, $\varepsilon(x, t) \equiv 1$ *при* $t \le x$, $\varepsilon(x, t) = 0$ *при* $t > x$, $\mathbf{U}_x$ *означает, что условие* (6) *применяется по переменной* x.

Следствие. *Имеет место формула $R_\lambda f(x) = v_1(x, \lambda) + \gamma v_2(x, \lambda)$.*

2. Пусть $f(x) \in C[0, 1] \cap V[0, 1]$ и $U(f) = af(0) + bf(1) - \int_0^1 \varphi(t) f(t)\,dt = 0$.

Лемма 3. *Для компонент вектора $BF(x) = (\Phi_1(x), \Phi_2(x))^{\mathrm{T}}$ справедливы формулы*

$$\Phi_1(x) = -\frac{d^2}{2\gamma}[f(x) - \gamma f(1-x)] = \frac{d}{2}[(\alpha d + 1) f(x) + d f(1-x)],$$

$$\Phi_2(x) = -\Phi_1(1-x), \tag{7}$$

$$\Phi_1(x) + \gamma\Phi_1(1-x) = df(x). \tag{8}$$

Доказательство леммы непосредственно следует из того, что $\Phi_i(x) = b_{i1}f(x) + b_{i2}f(1-x)$, где b_{ij} — компоненты матрицы B.

Лемма 4. *Для компонент вектора*

$$\int_0^1 g(x,t,\lambda)BF(t)\,dt = \left(\int_0^1 g_1(x,t,\lambda)\Phi_1(t)\,dt, \int_0^1 g_2(x,t,\lambda)\Phi_2(t)\,dt\right)^T$$

справедливы формулы

$$\int_0^1 g_2(x,t,\lambda)\Phi_2(t)\,dt = \int_0^1 g_1(1-x,t,\lambda)\Phi_1(t)\,dt, \tag{9}$$

$$\int_0^1 g_1(x,t,\lambda)\Phi_1(t)\,dt = \frac{1}{\lambda d}e^{\lambda d(x-1)}\Phi_1(1) - \frac{1}{\lambda d}\Phi_1(x) - \frac{1}{\lambda d}\int_x^1 e^{\lambda d(x-t)}\,d\Phi_1(t), \tag{10}$$

$$\int_0^1 g_1(x,t,\lambda)\Phi_1(t)\,dt + \gamma\int_0^1 g_2(x,t,\lambda)\Phi_2(t)\,dt = -\frac{1}{\lambda}f(x) + \frac{1}{\lambda d}\Phi_1(1)[e^{\lambda d(x-1)} + \gamma e^{-\lambda dx}] + Q_1(x,\lambda), \tag{11}$$

где

$$Q_1(x,\lambda) = -\frac{1}{\lambda d}\left(\int_x^1 e^{\lambda d(x-t)}\,d\Phi_1(t) + \gamma\int_{1-x}^1 e^{\lambda d(1-x-t)}\,d\Phi_1(t)\right). \tag{12}$$

Доказательство. Имеем

$$\int_0^1 g_1(x,t,\lambda)\Phi_1(t)\,dt = -\int_x^1 e^{\lambda d(x-t)}\Phi_1(t)\,dt, \tag{13}$$

$$\int_0^1 g_2(x,t,\lambda)\Phi_2(t)\,dt = \int_0^x e^{-\lambda d(x-t)}\Phi_2(t)\,dt. \tag{14}$$

Выполняя в (14) замену $\tau = 1-t$ и учитывая (7) и (13), получаем (9). Интегрируя (13) по частям, приходим к (10). В силу (8)–(10) следует справедливость равенства (11). □

Лемма 5. *Имеет место формула*

$$\int_0^1 \mathbf{U}_x(g(x,t,\lambda))BF(t)\,dt = (P(\lambda), P(\lambda))^{\mathrm{T}},$$

где

$$P(\lambda) = \frac{1}{\lambda d}\Phi_1(1)e^{-\lambda d}[U_{11} + U_{21}] + U_1(Q_1(x,\lambda)), \tag{15}$$

$U_{j1} = U_j(e^{\lambda dx})$ (*условия применяются по переменной* x),

$$U_1(f) = p_1 f(0) - \int_0^1 \varphi(t)f(t)\,dt, \quad U_2(f) = p_2 f(1) - \gamma\int_0^1 \varphi(1-t)f(t)\,dt. \tag{16}$$

Доказательство. Из (13), (14) имеем $g_1(1,t,\lambda) = g_2(0,t,\lambda) = 0$. Тогда

$$\int_0^1 \mathbf{U}_x(g(x,t,\lambda))BF(t)\,dt = \begin{pmatrix} p_1\int\limits_0^1 g_1(0,t,\lambda)\Phi_1(t)\,dt - I_1 \\ p_1\int\limits_0^1 g_2(1,t,\lambda)\Phi_2(t)\,dt - I_2 \end{pmatrix}, \tag{17}$$

$$I_1 = \int_0^1 \varphi(\tau) \left(\int_0^1 g_1(\tau, t, \lambda)\Phi_1(t)\, dt + \gamma \int_0^1 g_2(\tau, t, \lambda)\Phi_2(t)\, dt \right) d\tau,$$

$$I_2 = \int_0^1 \varphi(1-\tau) \left(\gamma \int_0^1 g_1(\tau, t, \lambda)\Phi_1(t)\, dt + \int_0^1 g_2(\tau, t, \lambda)\Phi_2(t)\, dt \right) d\tau. \quad (18)$$

Выполняя в (18) замену $\xi = 1 - \tau$ и учитывая (9), получаем, что $I_2 = I_1$. Далее, из (9) следует, что $\int_0^1 g_1(0, t, \lambda)\Phi_1(t)\, dt = \int_0^1 g_2(1, t, \lambda)\Phi_2(t)\, dt$. Поэтому (17) можно записать в виде

$$\int_0^1 U_x(g(x, t, \lambda))BF(t)\, dt = (P(\lambda), P(\lambda))^{\mathrm{T}},$$

где $P(\lambda) = p_1 \int_0^1 g_1(0, t, \lambda)\Phi_1(t)\, dt - \int_0^1 \varphi(\tau) \left(\int_0^1 g_1(\tau, t, \lambda)\Phi_1(t)\, dt + \gamma \int_0^1 g_2(\tau, t, \lambda)\Phi_2(t)\, dt \right) d\tau$.

Учитывая (10)–(11) и (12) при $x = 0$, получаем

$$P(\lambda) = -\frac{1}{\lambda d} p_1 \Phi_1(0) + \frac{1}{\lambda} \int_0^1 \varphi(\tau) f(\tau)\, d\tau - \frac{\gamma}{\lambda d} \Phi_1(1) \int_0^1 \varphi(\tau) e^{-\lambda d\tau}\, d\tau +$$

$$+ \frac{1}{\lambda d} e^{-\lambda d} \Phi_1(1) \left(p_1 - \int_0^1 \varphi(\tau) e^{\lambda d\tau}\, d\tau \right) + \left(p_1 Q_1(0, \lambda) - \int_0^1 \varphi(\tau) Q_1(\tau, \lambda)\, d\tau \right).$$

Так как $p_1\Phi_1(0) = -p_2\Phi_1(1) + d(af(0) + bf(1))$, то в силу условия $U(f) = 0$ получаем

$$P(\lambda) = \frac{1}{\lambda d} \Phi_1(1) e^{-\lambda d} \left(p_2 e^{\lambda d} - \gamma \int_0^1 \varphi(\tau) e^{\lambda d(1-\tau)}\, d\tau \right) +$$

$$+ \frac{1}{\lambda d} e^{-\lambda d} \Phi_1(1) \left(p_1 - \int_0^1 \varphi(\tau) e^{\lambda d\tau}\, d\tau \right) + \left(p_1 Q_1(0, \lambda) - \int_0^1 \varphi(\tau) Q_1(\tau, \lambda)\, d\tau \right).$$

Выполняя в интеграле $\int_0^1 \varphi(\tau) e^{\lambda d(1-\tau)}\, d\tau$ замену переменных $\xi = 1 - \tau$ и учитывая (16), можно записать

$$P(\lambda) = \frac{1}{\lambda d} \Phi_1(1) e^{-\lambda d} [U_1(e^{\lambda dx}) + U_2(e^{\lambda dx})] + U_1(Q_1(x, \lambda)).$$

Так как $U_j(e^{\lambda dx}) = U_{j1}$, то приходим к утверждению леммы. □

Теорема 1. *Если* $f(x) \in C[0,1] \cap V[0,1]$ *и* $U(f) = af(0) + bf(1) - \int_0^1 \varphi(t) f(t)\, dt = 0$*, то*

$$R_{0,\lambda} f = -\frac{1}{\lambda} f(x) + Q_1(x, \lambda) + Q_2(x, \lambda), \quad (19)$$

где

$$Q_2(x, \lambda) = -U_1(Q_1(x, \lambda))[e^{\lambda dx}(x_{11} + x_{12}) + \gamma e^{-\lambda dx}(x_{21} + x_{22})], \quad (20)$$

x_{ij} *— компоненты матрицы* $\Delta^{-1}(\lambda)$.

Доказательство. Имеем

$$V(x, \lambda)\Delta^{-1}(\lambda) \int_0^1 U_x(g(x, t, \lambda))BF(t)\, dt = \begin{pmatrix} P(\lambda) e^{\lambda dx}(x_{11} + x_{12}) \\ P(\lambda) e^{-\lambda dx}(x_{21} + x_{22}) \end{pmatrix}.$$

В силу леммы 2 и следствия из нее имеем

$$R_\lambda f = -P(\lambda)(e^{\lambda dx}(x_{11}+x_{12})+\gamma e^{-\lambda dx}(x_{21}+x_{22}))+\int\limits_0^1 g_1(x,t,\lambda)\Phi_1(t)\,dt+\gamma\int\limits_0^1 g_2(x,t,\lambda)\Phi_2(t)\,dt.$$

Учитывая (11) и (15), получаем

$$\begin{gathered}R_\lambda f = -\frac{1}{\lambda d}\Phi_1(1)e^{-\lambda d}(U_{11}+U_{21})(e^{\lambda dx}(x_{11}+x_{12})+\gamma e^{-\lambda dx}(x_{21}+x_{22}))- \\ -\frac{1}{\lambda}f(x)+\frac{1}{\lambda d}\Phi_1(1)[e^{\lambda d(x-1)}+\gamma e^{-\lambda dx}]+Q_1(x,\lambda)+Q_2(x,\lambda). \qquad (21)\end{gathered}$$

Так как $\Delta(\lambda)=\mathbf{U}(V(x,\lambda))=\begin{pmatrix}U_{11} & U_{21}e^{-\lambda d}\\ U_{21} & U_{11}e^{-\lambda d}\end{pmatrix}$ и $\Delta^{-1}(\lambda)\Delta(\lambda)=E$, то

$$\begin{cases}U_{11}x_{11}+U_{21}x_{12}=1,\\ e^{-\lambda d}(U_{21}x_{11}+U_{11}x_{12})=0\end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases}U_{11}x_{21}+U_{21}x_{22}=0,\\ e^{-\lambda d}(U_{21}x_{21}+U_{11}x_{22})=1.\end{cases}$$

Отсюда

$$x_{11}+x_{12}=\frac{1}{U_{11}+U_{21}}, \qquad x_{21}+x_{22}=\frac{e^{\lambda d}}{U_{11}+U_{21}}. \qquad (22)$$

Подставляя (22) в (21) приходим к утверждению теоремы. □

Лемма 6. *Если $a^2+b^2-2\alpha ab\neq 0$, то $p_1p_2\neq 0$ и имеет место следующая асимптотическая формула*:

$$\det\Delta(\lambda)=e^{\lambda d}(p_1^2e^{-2\lambda d}-p_2^2+o(1)).$$

Доказательство. В силу леммы 4 из работы [5] $U_{11}=e^{\lambda d}(p_1e^{-\lambda d}+o(1))$, $U_{21}=e^{\lambda d}(p_2+o(1))$. Поэтому $\det\Delta(\lambda)=e^{-\lambda d}(U_{11}^2-U_{21}^2)=e^{\lambda d}(p_1^2e^{-2\lambda d}-p_2^2+o(1))$. □

Следствие. *Обозначим через S_{δ_0} область, получающуюся из полуплоскости $\operatorname{Re}\lambda d\geq 0$ удалением всех нулей функции $p_1^2e^{-2\lambda d}-p_2^2$ вместе с круговыми окрестностями одного и того же радиуса δ_0. Тогда в S_{δ_0} при больших $|\lambda|$ имеет место оценка*

$$|\det\Delta(\lambda)|\geq C|e^{\lambda d}|, \qquad (23)$$

где $C>0$ и не зависит от λ.

Здесь и далее через C будем обозначать различные константы, не зависящие от λ.

Лемма 7. *В области S_{δ_0} при больших $|\lambda|$ справедливы оценки*

$$x_{11}+x_{12}=O(e^{-\lambda d}), \qquad x_{21}+x_{22}=O(1). \qquad (24)$$

Доказательство. Из (22) имеем

$$x_{11}+x_{12}=\frac{1}{\det\Delta(\lambda)}e^{-\lambda d}(U_{11}-U_{21}), \qquad x_{21}+x_{22}=\frac{1}{\det\Delta(\lambda)}(U_{11}-U_{21}).$$

Так как $|U_{11}-U_{21}|\leq|e^{\lambda d}||p_1e^{-\lambda d}-p_2+o(1)|\leq C|e^{\lambda d}|$, то в силу (23) приходим к (24). □

Лемма 8. *Имеют место следующие оценки:*

$$\int\limits_{|\lambda|=r} Q_1(x,\lambda)\,d\lambda=o(1), \qquad (25)$$

$$\int\limits_{|\lambda|=r} Q_2(x,\lambda)\,d\lambda=o(1). \qquad (26)$$

Доказательство. Имеем

$$Q_1(x,\lambda) = -\frac{1}{\lambda d}\left(\int\limits_x^1 e^{\lambda d(x-t)} d\Phi_1(t) + \gamma \int\limits_{1-x}^1 e^{\lambda d(1-x-t)} d\Phi_1(t)\right) =$$
$$= -\frac{1}{\lambda d}\left(\int\limits_x^1 e^{\lambda d(x-t)} d\Phi_1(t) + \gamma \int\limits_0^x e^{-\lambda d(x-t)} d\Phi_2(t)\right). \qquad (27)$$

Так как

$$\int\limits_x^1 e^{\lambda d(x-t)} d\Phi_1(t) = \int\limits_x^{x+r_1} + \int\limits_{x+r_1}^1 = O\left(\overset{x+r_1}{\underset{x}{V}}(\Phi_1)\right) + O(|e^{-\lambda d r_1}|),$$
$$\int\limits_0^x e^{-\lambda d(x-t)} d\Phi_2(t) = \int\limits_0^{x-r_1} + \int\limits_{x-r_1}^x = O(|e^{-\lambda d r_1}|) + O\left(\overset{x}{\underset{x-r_1}{V}}(\Phi_2)\right)$$

(r_1 — достаточно малое положительное число), то из (27) получаем

$$Q_1(x,\lambda) = O\left(\frac{1}{|\lambda|}|e^{-\lambda d r_1}|\right) + O\left(\frac{1}{|\lambda|}\overset{x+r_1}{\underset{x}{V}}(\Phi_1)\right) + O\left(\frac{1}{|\lambda|}\overset{x}{\underset{x-r_1}{V}}(\Phi_2)\right). \qquad (28)$$

Обозначим через $\int\limits_{|\lambda|=r}{}'$ интеграл по части контура $|\lambda| = r$, для которого $\mathrm{Re}\,\lambda d \geq 0 \geq \mathrm{Re}\,(-\lambda d)$, а через $\int\limits_{|\lambda|=r}{}''$ — для которого $\mathrm{Re}\,\lambda d \leq 0 \leq \mathrm{Re}\,(-\lambda d)$ (r считаем таким, что $|\lambda| = r$ находится целиком в области S_{δ_0}).

В силу произвольности выбора r_1 из (28) получаем $\int\limits_{|\lambda|=r}{}' Q_1(x,\lambda)\,d\lambda = o(1)$. Аналогичная оценка имеет место и для интеграла $\int\limits_{|\lambda|=r}{}''$. Следовательно, оценка (25) доказана.

Далее, в силу леммы 7

$$|Q_2(x,\lambda)| = \left|U_1(Q_1(x,\lambda))(e^{\lambda dx}(x_{11}+x_{12}) + \gamma e^{-\lambda dx}(x_{21}+x_{22}))\right| =$$
$$= |U_1(Q_1(x,\lambda))|(O(e^{\lambda d(x-1)}) + O(e^{-\lambda dx})). \qquad (29)$$

Имеем

$$U_1(Q_1(x,\lambda)) = p_1 Q_1(0,\lambda) - \int\limits_0^1 \varphi(\tau) Q_1(\tau,\lambda)\,d\tau. \qquad (30)$$

Аналогично (28) получаем

$$Q_1(0,\lambda) = O\left(\frac{1}{|\lambda|}\overset{r_1}{\underset{0}{V}}(\Phi_1)\right) + O\left(\frac{1}{|\lambda|}|e^{-\lambda d r_1}|\right).$$

Следовательно,

$$\int\limits_{|\lambda|=r}{}' Q_1(0,\lambda)(O(e^{\lambda d(x-1)}) + O(e^{-\lambda dx}))\,d\lambda = o(1). \qquad (31)$$

Рассмотрим

$$-\int\limits_0^1 \varphi(\tau) Q_1(\tau,\lambda)\,d\tau = \frac{1}{\lambda d}\int\limits_0^1 \varphi(\tau)\left(\int\limits_\tau^1 e^{\lambda d(\tau-t)} d\Phi_1(t) + \gamma \int\limits_0^\tau e^{-\lambda d(\tau-t)} d\Phi_2(t)\right). \qquad (32)$$

Меняя порядок интегрирования и применяя лемму 4 из работы [5] к внутренним интегралам, имеем

$$\int_0^1 e^{-\lambda dt} d\Phi_1(t) \int_0^t e^{\lambda d\tau} \varphi(\tau) d\tau = \int_0^1 e^{-\lambda dt}(o(e^{\lambda dt}) + o(1)) d\Phi_1(t) = \int_0^1 (o(1) + o(e^{-\lambda dt})) d\Phi_1(t). \quad (33)$$

$$\int_0^1 e^{\lambda dt} d\Phi_2(t) \int_t^1 e^{-\lambda d\tau} \varphi(\tau) d\tau = \int_0^1 e^{\lambda dt}(o(e^{-\lambda d}) + o(e^{-\lambda d} t)) d\Phi_2(t) = \int_0^1 (o(e^{\lambda d(t-1)}) + o(1)) d\Phi_2(t). \quad (34)$$

В силу (32)–(34)

$$\int_{|\lambda|=r}' (O(e^{\lambda d(x-1)}) + O(e^{-\lambda dx})) \int_0^1 \varphi(\tau) Q_1(\tau, \lambda)\, d\tau\, d\lambda = o(1). \quad (35)$$

Таким образом, учитывая (29)–(31), (35), получаем

$$\int_{|\lambda|=r}' Q_2(x, \lambda)\, d\lambda = o(1).$$

Аналогичная оценка имеет место и для интеграла $\int_{|\lambda|=r}''$. Значит, оценка (26) доказана. □

Теорема 2. *Если* $f(x) = C[0,1] \cap V[0,1]$, $U(f) = af(0) + b(f) - (y, \varphi) = 0$, $a^2 + b^2 - 2\alpha ab \neq 0$, *то выполняется соотношение*

$$\lim_{r \to \infty} \max_{0 \le x \le 1} \left| f(x) + \frac{1}{2\pi i} \int_{|\lambda|=r} R_\lambda f\, d\lambda \right| = 0.$$

Доказательство. По теореме 1 в силу леммы 8 имеем

$$\int_{|\lambda|=r} R_\lambda f\, d\lambda = -\int_{|\lambda|=r} \frac{f(x)}{\lambda}\, d\lambda + o(1).$$

Отсюда следует утверждение теоремы. □

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (*проект* 10-01-00270) *и гранта Президента РФ для государственной поддержки ведущих научных школ* (*проект* НШ-4383.2010.1).

Библиографический список

1. *Бари, Н.К.* Тригонометрические ряды / Н.К. Бари. – М.: Физматгиз, 1961.

2. *Молоденков, В.А.* Разложение по собственным функциям одной краевой задачи для оператора дифференцирования / В.А. Молоденков, А.П. Хромов // Дифференциальные уравнения и вычислительная математика. – Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 1972. – Вып.1. – С. 17–26.

3. *Хромов, А.П.* Об аналоге теоремы Жордана – Дирихле для разложений по собственным функциям дифференциально-разностного оператора с интегральным граничным условием / А.П. Хромов // Докл. РАЕН (Поволжское межрегиональное отделение). – 2004. – № 4. – С. 80–87

4. *Халова, В.А.* Конечномерные возмущения интегральных операторов с ядрами, имеющими скачки производных на диагоналях: дис. … канд. физ.-мат. наук / В.А. Халова. – Саратов, 2006. – 123 с.

5. *Хромов, А.П.* Теоремы равносходимости для интегродифференциальных и интегральных операторов / А.П. Хромов // Мат. сборник. – 1981. – Т. 114 (156), № 3. – С. 378–405.