математическое моделирование фирмы. М.: КомКнига, 2006. 224 с.
5. *Дубовицкий А. Я., Милютин А. А.* Задачи на экстремум при наличии ограничений // ЖВМ и МФ. 1965. № 3. С. 395–453.
6. *Трошина Н. Ю.* Принцип максимума для дискретной задачи оптимального управления со связанными краевыми условиями // Математика. Механика: сб. науч. тр. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та. 2002. Вып. 4. С.137–140.

УДК 517.51:517.91/.93

ПРИБЛИЖАЮЩИЕ СВОЙСТВА РЕШЕНИЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ С ИНТЕГРАЛЬНЫМ ГРАНИЧНЫМ УСЛОВИЕМ

А. А. Хромов, Г. В. Хромова*

Саратовский государственный университет,
кафедра дифференциальных уравнений и прикладной математики,
*кафедра математической физики и вычислительной математики
E-mail: KhromovAP@info.sgu.ru

На базе решений дифференциального уравнения первого порядка строятся приближения к непрерывным функциям с интегральными граничными условиями.

Ключевые слова: дифференциальное уравнение, приближение функций, интегральные условия, резольвента.

Approximating Properties of Solutions of the Differential Equation with Integral Boundary Condition

A. A. Khromov, G. V. Khromova*

Saratov State University,
Chair of Differential Equations and Applied Mathematics,
*Chair of Mathematical Physics and Calculating Mathematics
E-mail: KhromovAP@info.sgu.ru

With the use of the solution of the first-order differential equation the approximations to the continuous functions with integral boundary conditions are constructed.

Key words: differential equation, approximation of functions, resolvent.

Данная работа основана на приближающих свойствах резольвент обыкновенных дифференциальных операторов.

В работе [1] эти свойства были исследованы для произвольного линейного дифференциального оператора с регулярными краевыми условиями. В работе [2] такие свойства исследовались уже для простейших дифференциальных операторов с нерегулярными краевыми условиями.

В данной работе показано, что использование резольвент дифференциальных операторов позволяет учесть краевые условия, наложенные на приближаемую функцию (в данном случае — интегральные) и получать приближения, удовлетворяющие этим же краевым условиям, что бывает важным при решении как теоретических, так и прикладных задач.

1. Рассмотрим дифференциальный оператор

$$L: \quad y', \quad U(y) \equiv \int\limits_0^1 p(t)y(t)\,dt = 0, \tag{1}$$

где $y(x) \in C^1[0,1]$, $p(x) \in C^1[0,1]$.

Найдём резольвенту $R_\lambda(L)$, полагая $\lambda = -r > 0$. Обозначим её через R_{-r}.

Лемма 1. *Справедливо представление*

$$R_{-r}u = g_{-r}u - \frac{1}{\Delta(-r)}e^{-rx}U(g_{-r}u), \tag{2}$$

где $r > 0$, $g_{-r}u = \int\limits_0^x e^{-r(x-t)}u(t)\,dt$, $\Delta(-r) = U(e^{-rx})$.

Доказательство. Легко видеть, что $g_r(u)$ есть решение уравнения $y' + ry = u$, а общее решение этого уравнения имеет вид $y = g_r u + Ce^{-rx}$, откуда получаем (2). □

Пусть $u(x) \in C_0[0,1] \equiv \{u(x) \in C[0,1] : \ U(u) = 0\}$.

Лемма 2. *При $p(t) \in C^1[0,1]$, $u(x) \in C_0[0,1]$ для $U(g_{-r}u)$ справедливо представление*

$$U(g_{-r}u) = \frac{1}{r}\int_0^1 K_{-r}(t)u(t)dt, \tag{3}$$

где $K_{-r}(t) = -p(1)e^{-r(1-t)} + e^{rt}\int_t^1 p'(\tau)e^{-r\tau}d\tau$.

Доказательство. Имеем

$$U(g_{-r}u) = \int_0^1 p(t)\int_0^t e^{-r(t-\tau)}u(\tau)d\tau dt = \int_0^1 e^{r\tau}u(\tau)\left[\frac{1}{r}(-p(t)e^{-rt})\mid_\tau^1 + \frac{1}{r}\int_\tau^1 e^{-rt}p'(t)dt\right]d\tau =$$

$$= \frac{1}{r}\int_0^1\left[p(\tau) - p(1)e^{-r(1-\tau)} + e^{r\tau}\int_\tau^1 p'(t)e^{-rt}dt\right]u(\tau)d\tau.$$

Отсюда получаем (3). □

Лемма 3. *Если $p(t) \in C^1[0,1]$, $p(0) \neq 0$, то при достаточно больших r справедлива оценка*

$$\Delta(-r) \geq \frac{C}{r}, \tag{4}$$

где $C \neq 0$.

Доказательство. Имеем

$$\Delta(-r) = \int_0^1 p(t)e^{-rt}dt = \frac{1}{r}(p(t)e^{-rt})\mid_0^1 + \frac{1}{r}\int_0^1 p'(t)e^{-rt}dt = \frac{1}{r}\left[p(0) - p(1)e^{-r} + \int_0^1 p'(t)e^{-rt}dt\right].$$

Из равенства $\int_0^1 p'(t)e^{-rt}dt = O\left(\frac{1}{r}\right)$ следует, что

$$\Delta(-r) = \frac{1}{r}\left[p(0) + O\left(\frac{1}{r}\right)\right],$$

а отсюда вытекает оценка (4). □

Лемма 4. *Для любой $u \in C[0,1]$ при достаточно больших r справедлива оценка*

$$\|g_{-r}u\|_{C[0,1]} = O\left(\frac{1}{r}\|u\|_C\right).$$

Доказательство вытекает из вида $g_{-r}u$. □

Лемма 5. *Для $u \in C_0[0,1]$ при $p(t) \in C^1[0,1]$ и достаточно больших r справедлива оценка*

$$U(g_{-r}u) = O\left(\frac{1}{r^2}\|u\|_C\right).$$

Доказательство. Имеем

$$\int_0^1 e^{-r(1-t)}u(t)dt = O\left(\frac{1}{r}\|u\|_C\right), \qquad \left|\int_t^1 p'(\tau)e^{-r\tau}d\tau\right| = O\left(\frac{1}{r}\right).$$

Отсюда и из (4) получаем утверждение леммы. □

Лемма 6. *Для $u \in C_0[0,1]$ при $p(t) \in C^1[0,1]$, $p(0) \neq 0$ и достаточно больших r справедлива оценка*

$$\|rR_{-r}u\|_{C[0,1]} = O(\|u\|_C).$$

Доказательство. Из лемм 1 и 4 получаем $\|rg_{-r}u\|_C = O(\|u\|_C)$, а из лемм 3 и 5 —

$$\frac{e^{-rx}}{\Delta(-r)}U(g_{-r}u) = O\left(\frac{e^{-rx}}{r}\|u\|_C\right).$$

Отсюда следует утверждение леммы. □

2. Выясним, для каких $u \in C_0[0,1]$ имеет место сходимость:

$$\|rR_{-r}u - u\|_{C[0,1]} \to 0, \quad \text{при} \quad r \to \infty. \tag{5}$$

Рассмотрим множество $M_0 = \{u \in C^1[0,1] : U(u) = U_1(u) = 0\}$, где $U_1(u) = p(1)u(1) - p(0)u(0) - \int\limits_0^1 p'(t)u(t)\,dt$.

Очевидно, для дифференцируемой функции выполняется $U_1(u) \equiv U(u')$.

Лемма 7. *Если* $\int\limits_0^1 p(t)dt \neq 0$, *то* $M_0 = M_1 = \{u \in C'[0,1] : u = R_0 g,\ g \in C_0[0,1]\}$.

Доказательство. Из равенства (2), которое, очевидно, справедливо и при $r = 0$, следует, что R_0 существует, поскольку $\Delta(0) = \int\limits_0^1 p(t)dt$.

Докажем сначала включение $M_0 \subset M_1$. Пусть $u \in M_0$. Положим $u' = g$. Так как $U(u) = 0$, то $u = R_0 g$, где $g \in C_0[0,1]$ в силу условия $U(u') = 0$.

Теперь пусть $u \in M_1$, т. е. $u = R_0 g$. Тогда $U(u) = 0$, так как $U(R_0 g) = 0$. Далее, $u' = g$, а так как $g \in C_0[0,1]$, то $U(u') = 0$, т. е. $U_1(u) = 0$. Значит, $u \in M_0$. Лемма доказана. □

Лемма 8. *Если* $p(t)$ *— непрерывная на отрезке* $[0,1]$ *функция, не равная тождественно нулю, то существует* $\mu > 0$ *такое, что* $\int\limits_0^1 p(t)e^{-\mu t}dt \neq 0$.

Доказательство. Предположим противное. Пусть $F(\mu) \equiv \int\limits_0^1 p(t)e^{-\mu t}\,dt = 0$ при любом $\mu > 0$. По теореме единственности аналитической функции $F(\mu) = 0$ при любом комплексном μ. А по теореме единственности разложения в степенной ряд функции $F(\mu)$ коэффициенты этого ряда равны нулю, т. е. $\int\limits_0^1 p(t)t^k\,dt = 0$, $k = 0, 1, \ldots$ Отсюда следует, что $\int\limits_0^1 p(t)P(t)\,dt = 0$, где $P(t)$ — любой многочлен.

Возьмём последовательность многочленов $P_n(t)$, сходящуюся к $p(t)$. Она существует по теореме Вейерштрасса. Из того что $\int\limits_0^1 p(t)P_n(t)\,dt = 0$, следует: $\lim\limits_{n\to\infty}\int\limits_0^1 p(t)P_n(t)dt = 0$. Тогда придём к тому, что $\int\limits_0^1 p^2(t)\,dt = 0$, откуда $p(t) \equiv 0$, что противоречит условию леммы. Лемма доказана. □

Лемма 9. *Если* $\int\limits_0^1 p(t)dt = 0$, *то* $M_0 = M_{1\mu} = \{u \in C^1[0,1] : u = R_{-\mu}g, g \in C_0[0,1]\}$, *где* $\mu > 0$ *и таково, что* $\int\limits_0^1 p(t)e^{-\mu t}\,dt \neq 0$.

Доказательство. Повторяем схему доказательства леммы 7. Из условия леммы 9 следует, что $R_{-\mu}$ существует, так как $\int\limits_0^1 p(t)e^{-\mu t}\,dt = \Delta(-\mu)$.

Пусть $u \in M_0$. Положим $u' + \mu u = g$. Учитывая, что $U(u) = 0$, получаем $u = R_{-\mu}g$, где $g \in C_0[0,1]$ в силу условия $U_1(u) = 0$ ($U_1(u) = U(u')$, откуда $U(g) = U(u') + \mu U(u) = 0$).

Теперь пусть $u \in M_{1\mu}$, т. е. $u = R_{-\mu}g$. В силу равенства $U(R_{-\mu}g) = 0$ получаем $U(u) = 0$. А так как $g \in C_0[0,1]$, то $U(u') \equiv U_1(u) = 0$, значит, $u \in M_0$. Отсюда следует утверждение леммы. □

В дальнейшем для определённости будем рассматривать случай, когда $\int\limits_0^1 p(t)\,dt \neq 0$.

Теорема 1. *Если* $u(x) \in M_0$, $p(t) \in C^1[0,1]$, $p(0) \neq 0$, *то имеет место сходимость* (5).

Доказательство. Рассмотрим тождество Гильберта для резольвенты:

$$\frac{R_{-r} - R_0}{-r} = R_{-r}R_0.$$

Запишем его в виде

$$R_0 - rR_{-r}R_0 = R_{-r}. \qquad (6)$$

По лемме 7 $u = R_0 g$, $g \in C_0[0,1]$. Применяем (6) к функции g, получаем $u - rR_{-r}u = R_{-r}g$. Из леммы 6 вытекает сходимость (5). □

Найдём необходимое и достаточное условие сходимости (5).

Рассмотрим множество $M = \{u \in C[0,1] : U(u) = U_1(u) = 0\}$.

Лемма 10. *При $p(t) \in C^1[0,1]$ справедливо равенство $\overline{M}_0 = M$, где $\overline{M}_0$ — замыкание множества M_0 в равномерной метрике.*

Доказательство. Очевидно, $M_0 \subset M$. Пусть $u \in M$. Построим многочлен, принадлежащий множеству M_0 и аппроксимирующий функцию $u(x)$. Зададим $\varepsilon > 0$. По теореме Вейерштрасса существует многочлен $P(x)$ такой, что $\|u - P\|_C < \varepsilon$. Из этой оценки в силу равенств $U(P) \equiv U(P - u)$, $U_1(P) \equiv U_1(P - u)$ выполняются оценки

$$|U(P)| < C\varepsilon, \qquad |U_1(P)| < C\varepsilon. \qquad (7)$$

(Обозначаем здесь и в дальнейшем одной и той же буквой C константы в оценках, когда конкретизация оценки несущественна.)

Теперь построим многочлен $\widetilde{P}(x) = P(x) + C_0 + C_1 x$ с такими коэффициентами C_0 и C_1, чтобы $\widetilde{P}(x) \in M_0$ (т. е. чтобы $U(\widetilde{P}) = U_1(\widetilde{P}) = 0$).

Из (7) вытекают оценки $C_0 \le C\varepsilon$, $C_1 \le C\varepsilon$, а из них — оценка $\|\widetilde{P} - P\|_C \le C\varepsilon$.

Тогда из оценки $\|u - \widetilde{P}\|_C \le \|u - P\|_C + \|P - \widetilde{P}\|_C$ следует утверждение леммы. □

Теорема 2. *При $p(t) \in C^1[0,1]$, $p(0) \neq 0$, $\int\limits_0^1 p(t)\,dt \neq 0$ для сходимости* (5) *необходимо и достаточно, чтобы $u \in M$.*

Доказательство. Пусть выполняется сходимость (5). Так как $U(R_{-r}u) = 0$, то $R_{-r}u \in C_0[0,1]$. Множество $C_0[0,1]$ является замкнутым в равномерной метрике. Поэтому из (8) следует, что $u \in C_0[0,1]$. Но тогда $R_{-r}u \in M_{-r}$, где $M_{-r} = \{y \in C^1[0,1] : y = R_{-r}v, v \in C_0[0,1]\}$. Поскольку $U(v) = 0$ и $U(R_{-r}v) = 0$, а $R_{-r}v$ удовлетворяет уравнению $(R_{-r}v)' + r(R_{-r}v) = v$, то $R_{-r}v \in M_0$, т. е. $M_{-r} \subset M_0$.

Таким образом, мы получаем, что $R_{-r}u \in M_0$, а из (5) — $u \in \overline{M}_0 = M$. Необходимость доказана.

Пусть теперь $u \in M$. Зададим $\varepsilon > 0$ и найдём функцию $u_\varepsilon \in M_0$ такую, что $\|u - u_\varepsilon\|_C < \varepsilon$.

Имеем

$$\|rR_{-r}u - u\|_C \le \|u - u_\varepsilon\|_C + \|rR_{-r}u_\varepsilon - u_\varepsilon\|_C + \|rR_{-r}u_\varepsilon - rR_{-r}u\|_C.$$

По теореме 1 справедлива оценка $\|rR_{-r}u_\varepsilon - u_\varepsilon\| \le \varepsilon$ при $r \ge r_0$, а по лемме 6 —

$$\|rR_{-r}(u_\varepsilon - u)\|_C \le \|rR_{-r}\|_C \|u_\varepsilon - u\|_C \le C\varepsilon.$$

Отсюда следует утверждение теоремы. □

Следствие. *При $p = 1$ для сходимости* (5) *необходимо и достаточно, чтобы $u \in M_2$, где $M_2 = \{u(x) \in C[0,1] : U(u) = 0,\ u(1) = u(0)\}$.*

Доказательство следует из того, что в данном случае $U_1(u) = u(1) - u(0)$ и, значит, $M = M_2$. □

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (*проект* 10-01-00270-а) *и гранта Президента по государственной поддержке ведущих научных школ* (*проект НШ*-4383.2010.1).

Библиографический список

1. *Хромова Г. В.* Приближающие свойства резольвент дифференциальных операторов в задаче приближения функций и их производных // Журн. вычисл. мат. и мат. физ. 1998. Т. 38, № 7. С. 1106–1113.

2. *Хромов А. А.* Приближающие свойства степеней резольвенты оператора дифференцирования // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. 2009. Т. 9. Сер. Математика. Механика. Информатика, вып. 3. С. 75–78.