Библиографический список

1. *Molchanov V. A.* Semigroups of mappings on graphs // Semigroup Forum. 1983. V. 27. C. 155–199.
2. *Хворостухина Е.В.* О полугруппах эндоморфизмов гиперграфов // Совр. проблемы диф. геометрии и общей алгебры: Тез. докл. Междунар. науч. конф., посвящ. 100-летию проф. В.В. Вагнера. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 2008. С. 136–137.
3. *Зыков А.А.* Гиперграфы // Успехи мат. наук. 1974. Т. 29, № 6. С. 89–154.
4. *Клиффорд А., Престон Г.* Алгебраическая теория полугрупп. В 2 т. М.: Мир, 1972. Т. 1. 286 с.
5. *Хартсхорн Р.* Основы проективной геометрии. М.: Мир, 1970. 161 с.

УДК 517.51

ПРИБЛИЖАЮЩИЕ СВОЙСТВА СТЕПЕНЕЙ РЕЗОЛЬВЕНТЫ ОПЕРАТОРА ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЯ

А.А. Хромов

Саратовский государственный университет,
кафедра дифференциальных уравнений
и прикладной математики
E-mail: KhromovAP@info.sgu.ru

Построены семейства операторов и исследованы их аппроксимирующие свойства в задаче приближения производных функций и в задаче приближения гладких решений интегральных уравнений.

Ключевые слова: аппроксимация функций и их производных, резольвента, интегральное уравнение, приближенное решение.

Approximating Properties of the Powers of the Differentiation Operator Resolvent

A.A. Khromov

Saratov State University,
Chair of Differential Equations and Applied Mathematics
E-mail: KhromovAP@info.sgu.ru

The families of operators are constructed and their approximating properties are investigated in the problems of approximating the derivative of functions and the smooth solutions of integral equations.

Key words: approximation of functions and their derivatives, resolvent, integral equation, approximate solution.

1. Рассмотрим операторы

$$\Omega_r u = \begin{cases} \Omega_{2r} u \equiv r\int\limits_x^1 e^{r(x-t)}u(t)dt, & x\in[0,1/2],\\ \Omega_{1r} u \equiv r\int\limits_0^x e^{-r(x-t)}u(t)dt, & x\in[1/2,1]. \end{cases}$$

Задание разрывной на отрезке $[0,1]$ функции в таком виде здесь и в дальнейшем означает, что мы не обращаем внимания на то, как именно она задана в точке $x=1/2$, поскольку это несущественно.

Построим операторы, комбинирующиеся из степеней операторов Ω_{1r} и Ω_{2r}, а именно операторы

$$\Omega_r^{(k)} u = \begin{cases} \Omega_{2r}^k u, & x\in[0,1/2],\\ \Omega_{1r}^k u, & x\in[1/2,1], \end{cases} \qquad D^m\Omega_r^{(k)} u = \begin{cases} D^m\Omega_{2r}^k u, & x\in[0,1/2],\\ D^m\Omega_{1r}^k u, & x\in[1/2,1], \end{cases}$$

где D^m — оператор m-го дифференцирования по x.

Лемма 1. *Операторы $\Omega_r^{(k)}$, $k=2,\dots$ имеют вид*

$$\Omega_r^{(k)} u = \begin{cases} r^k\int\limits_x^1 \frac{(t-x)^{k-1}}{(k-1)!}e^{r(x-t)}u(t)dt, & x\in[0,1/2],\\ r^k\int\limits_0^x \frac{(x-t)^{k-1}}{(k-1)!}e^{-r(x-t)}u(t)dt, & x\in[1/2,1]. \end{cases}$$

Доказательство для $k=2$ приведено в работе [1], для любого k получается по индукции.

Лемма 2. *Операторы $D^m\Omega_r^{(k)}$, $k \ge 2$, $m = 1, \dots, k-1$ имеют вид*

$$D^m\Omega_r^{(k)}u = \begin{cases} r^k \int\limits_x^1 K_{2m}(x,t,k,r)u(t)dt, & x \in [0,1/2], \\ r^k \int\limits_0^x K_{1m}(x,t,k,r)u(t)dt, & x \in [1/2,1], \end{cases}$$

где

$$K_{1m}(x,t,k,r) = (-1)^m e^{-r(x-t)} \left[r^m \frac{(x-t)^{k-1}}{(k-1)!} - m r^{m-1} \frac{(x-t)^{k-2}}{(k-2)!} + \right.$$

$$\left. + C_m^2 r^{m-2} \frac{(x-t)^{k-3}}{(k-3)!} + \dots + (-1)^{m-1} C_m^{m-1} r \frac{(x-t)^{k-m}}{(k-m)!} + (-1)^m \frac{(x-t)^{k-m-1}}{(k-m-1)!} \right],$$

$$K_{2m}(x,t,k,r) = e^{r(x-t)} \left[r^m \frac{(t-x)^{k-1}}{(k-1)!} - m r^{m-1} \frac{(t-x)^{k-2}}{(k-2)!} + \right.$$

$$\left. + C_m^2 r^{m-2} \frac{(t-x)^{k-3}}{(k-3)!} + \dots + (-1)^{m-1} C_m^{m-1} r \frac{(t-x)^{k-m}}{(k-m)!} + (-1)^m \frac{(t-x)^{k-m-1}}{(k-m-1)!} \right].$$

Доказательство проводится методом математической индукции.

Теорема 1. *Для любой функции $u(x) \in C[0,1]$ выполняется сходимость*

$$\|\Omega_r^{(k)}u - u\|_{L_\infty[0,1]} \to 0 \quad \text{при} \quad r \to \infty, \ k = 1, 2 \dots .$$

Здесь и в дальнейшем $\|v(x)\|_{L_\infty[0,1]} = \max\{\|v(x)\|_{C[0,1/2]}, \|v(x)\|_{C[1/2,1]}\}$.

Доказательство. Для $k = 1, 2$ эта сходимость выполняется [1]. Для любого $k > 2$ применяем метод математической индукции и теорему Банаха – Штейнгауза.

Теорема 2. *Для любой функции $u(x) \in C^{k-1}[0,1]$ при $k \ge 2$, $m \le k-1$ выполняется сходимость:*

$$\|D^m\Omega_r^{(k)}u - u^{(m)}\|_{L_\infty[0,1]} \to 0 \quad \text{при} \quad r \to \infty.$$

Доказательство сводится к доказательству сходимостей:

$$\|D^m\Omega_{1r}^k u - u^{(m)}\|_{C[1/2,1]} \to 0 \quad \text{при} \quad r \to \infty \qquad \text{и} \qquad \|D^m\Omega_{2r}^k u - u^{(m)}\|_{C[0,1/2]} \to 0 \quad \text{при} \quad r \to \infty,$$

а каждая из них доказывается методом индукции с использованием теоремы 1.

2. Пусть непрерывно дифференцируемая m раз функция $u(x)$ задана ее приближением $f_\delta(x)$ в метрике пространства $L_2[0,1]$:$\|f_\delta - f\|_{L_2} \le \delta$. Поставим задачу: по f_δ и δ найти равномерные приближения к $u^{(m)}(x)$. Это известная задача восстановления функций [2].

Теорема 3. *При $k \ge 2$, $m = 1, \dots, k-1$ для сходимости*

$$\Delta(\delta, D^m\Omega_r^{(k)}u) \equiv \sup\{\|D^m\Omega_r^{(k)}f_\delta - u^{(m)}\|_{L_\infty[0,1]} : \|f_\delta - f\|_{L_2[0,1]} \le \delta\} \to 0 \quad \textit{при} \quad \delta \to 0$$

необходимо и достаточно выполнения согласования $r = r(\delta)$, удовлетворяющего условиям: $r(\delta) \to \infty$ и $(r(\delta))^{\frac{2m+1}{2}}\delta \to 0$ при $\delta \to 0$.

Доказательство. На основании оценки

$$\|D^m\Omega_r^{(k)}f_\delta - u^{(m)}\|_{L_\infty[0,1]} \le \|D^m\Omega_r^{(k)}\|_{L_2[0,1]\to L_\infty[0,1]}\delta + \|D^m\Omega_r^{(k)}u - u^{(m)}\|_{L_\infty[0,1]}$$

и теоремы 2 нам достаточно доказать ограниченность норм $\|D^m\Omega_r^{(k)}\|_{L_2[0,1]\to L_\infty[0,1]}$ при каждом фиксированном r, а для нахождения согласований $r = r(\delta)$, нужно затем найти асимптотику по r при $r \to \infty$ указанных норм.

Имеем

$$\|D^m\Omega_r^{(k)}\|_{L_2[0,1]\to L_\infty[0,1]} = \max\{\|D^m\Omega_{2r}^k\|_{L_2[0,1]\to C[0,1/2]}, \quad \|D^m\Omega_{1r}^k\|_{L_2[0,1]\to C[1/2,1]}\}.$$

Рассмотрим сначала норму $\|D^m\Omega^k_{1r}\|_{L_2[0,1]\to C[1/2,1]}$. Имеем

$$\|D^m\Omega^k_{1r}\|_{L_2[0,1]\to C[1/2,1]} = r^k \max_{1/2\le x\le 1}\left(\int\limits_0^x K^2_{1m}(x,t,k,r)dt\right)^{1/2}. \tag{1}$$

Раскроем квадрат скобки, стоящей в правой части (1). Обозначим для краткости $x-t=\tau$, $k-1=k_1$. Тогда получим $K^2_{1m}(x,t,k,r)=P_{1m}(\tau,r)$, где $P_{1m}(\tau,r)$ имеет вид (располагаем слагаемые в порядке возрастания степеней r)

$$P_{1m}(\tau,r) = a_0\tau^{2k_1-2m} + a_1 r\tau^{2k_1-2m+1} + a_2 r^2\tau^{2k_1-2m+2} + \dots + a_l r^l\tau^{2k_1-2m+l} + \dots + a_{2m} r^{2m}\tau^{2k_1},$$

где a_j, $j=0,\dots,2m$ — константы, выражающиеся через произведения констант, стоящих при степенях $r^{m-l}(x-t)^{k-l-1}$, $l=0,1,\dots,m$ в квадратной скобке выражения (1).

Тогда интеграл $I=\int\limits_0^x K^2_{1m}(x,t,k,r)dt$, стоящий в правой части (1), можно представить в виде

$$I = a_0 I_0 + a_1 r I_1 + \dots + a_l r^l I_l + \dots + a_{2m} r^{2m} I_{2m},$$

где $I_l = \int\limits_0^x \tau^{2k_1-2m+l}e^{-2r\tau}d\tau$, $l=0,1,\dots,2m$.

Вычисляя эти интегралы, получим

$$I = Cr^{-(2k_1-2m+1)} + O(r^{2m-1}e^{-r}),$$

$$\|D^m\Omega^k_{1r}\|_{L_2[0,1]\to C[1/2,1]} = r^k C^{1/2} r^{-(m+1/2)}[1+O(r^{2k-2}e^{-r})].$$

Точно такое же выражение получаем для нормы $\|D^m\Omega^k_{2r}\|_{L_2[0,1]\to C[0,1/2]}$ и в целом справедлива формула

$$\|D^m\Omega^{(k)}_{1r}\|_{L_2[0,1]\to L_\infty[0,1]} = C^{1/2}r^{-\frac{2m+1}{2}} + O(r^{2k+m-3/2}e^{-r}). \tag{2}$$

Из этой формулы и теории некорректно поставленных задач следует, что константа C отлична от нуля. В противном случае норма $\|D^m\Omega^{(k)}_r\|_{L_2[0,1]\to L_\infty[0,1]} \to 0$ при $r\to\infty$, а значит, $\|D^m\Omega^{(k)}_r\|_{L_2[0,1]\to L_\infty[0,1]} \le K$, где K не зависит от r. А этого не может быть, поскольку операторы $D^m\Omega^{(k)}_r$ аппроксимируют неограниченный оператор.

Из равенства (2) и из работы [3] вытекает утверждение теоремы 3.

3. Рассмотрим интегральное уравнение Фредгольма второго рода:

$$Au \equiv u(x) - \lambda\int\limits_0^1 K(x,t)u(t)dt = f(x). \tag{3}$$

Предполагаем, что ядро $K(x,t)$ суммируемо с квадратом по обеим переменным и что однородное уравнение $Au=0$ имеет только тривиальное решение в пространстве $L_2[0,1]$. Будем считать, что оператор A в уравнении (1) действует из пространства $C^p[0,1]$ в пространство $L_2[0,1]$.

Лемма 3. *Если в уравнении* (3) $A\in(C^p[0,1]\to L_2[0,1])$ *($p\ge 0$ — целое) и* A^{-1} *существует, то* A^{-1} *неограничен.*

Доказательство аналогично доказательству леммы 1 в работе [1].

Построим операторы, с помощью которых можно находить приближения к производным от точного решения уравнения (3). С этой целью рассмотрим операторы

$$T^{(m,k)}_r f = D^m\Omega^{(k)}_r\tilde{A}^{-1}f,$$

где $\tilde{A}$ — оператор A, рассматриваемый как оператор, действующий из $L_2[0,1]$ в $L_2[0,1]$.

Теорема 4. *Если* $u(x)\in C^{k-1}[0,1]$, $f_\delta(x)\in L_2[0,1]$, $\|f_\delta - f\|_{L_2[0,1]}\le\delta$, *где* $f=Au$, A *— оператор в уравнении* (3), *то для сходимости*

$$\Delta(\delta, T^{(m,k)}_r, u) \equiv \{\sup\|T^{(m,k)}_r f_\delta - u^{(m)}\|_{L_\infty[0,1]} : \|f_\delta - Au\|_{L_2[0,1]}\le\delta\} \to 0$$

при $r \to \infty$ *необходимо и достаточно выбрать* $r = r(\delta)$ *так, чтобы*

$$r(\delta) \to +\infty, \quad (r(\delta))^{\frac{2m+1}{2}}\delta \to 0 \quad \text{при} \quad \delta \to 0 \quad (m = 1, \ldots, k-1, \quad k \geq 2).$$

Доказательство. Запишем оценку:

$$\|T_r^{(m,k)} f_\delta - u^{(m)}\|_{L_\infty} \leq \|T_r^{(m,k)}(f_\delta - f)\|_{L_\infty} + \|T_r^{(m,k)} Au - u^{(m)}\|_{L_\infty}. \tag{4}$$

Тогда

$$\|T_r^{(m,k)} Au - u^{(m)}\|_{L_\infty} = \|D^m \Omega_r^{(k)} u - u^{(m)}\|_{L_\infty} \to 0$$

при $r \to \infty$ по теореме 2. Далее,

$$\|T_r^{(m,k)}(f_\delta - f)\|_{L_\infty[0,1]} = \|D^m \Omega_r^{(k)} \tilde{A}^{-1}(f_\delta - f)\|_{L_\infty[0,1]} \leq$$

$$\leq \|D^m \Omega_r^{(k)}\|_{L_2[0,1] \to L_\infty[0,1]} \|\tilde{A}^{-1}(f_\delta - f)\|_{L_2} \leq \|D^m \Omega_r^{(k)}\|_{L_2[0,1] \to L_\infty[0,1]} \|\tilde{A}^{-1}\|_{L_2[0,1]} \delta.$$

Из формулы (2) для нормы $\|D^m \Omega_r^{(k)}\|_{L_2[0,1] \to L_\infty[0,1]}$ и оценки (4) получаем утверждение теоремы 4.

Работа выполнена при финансовой поддержке гранта Президента РФ для государственной поддержки ведущих научных школ РФ (*проект* НШ-2970.2008.01).

Библиографический список

1. *Хромов А.А.* Решение интегральных уравнений с помощью резольвент простейших дифференциальных операторов // Изв. Сарат. ун-та. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2009. Т. 9, вып. 1. С. 53–58.
2. *Морозов В.А.* О восстановлении функций методом регуляризации // Журн. вычисл. мат. и мат. физ. 1967. Т. 7, № 4. С. 874–884.
3. *Иванов В.К.* Об интегральных уравнениях Фредгольма первого рода // Диф. уравнения. 1967. Т. III, № 3. С. 410–421.